PUCP

Sistemas dinámicos y control B

Tema 5: Análisis de estabilidad, controlabilidad, y observabilidad

Docente: Juan Carlos Suárez Quispe, M.Sc.

PUCP

Estabilidad

Informalmente, estabilidad significa que algo se está comportando de manera adecuada y predecible, y está bajo control. En este contexto (informal), un sistema dinámico estable no se comporta de manera demasiado caótica o impredecible. No se descontrola ni varía mucho.

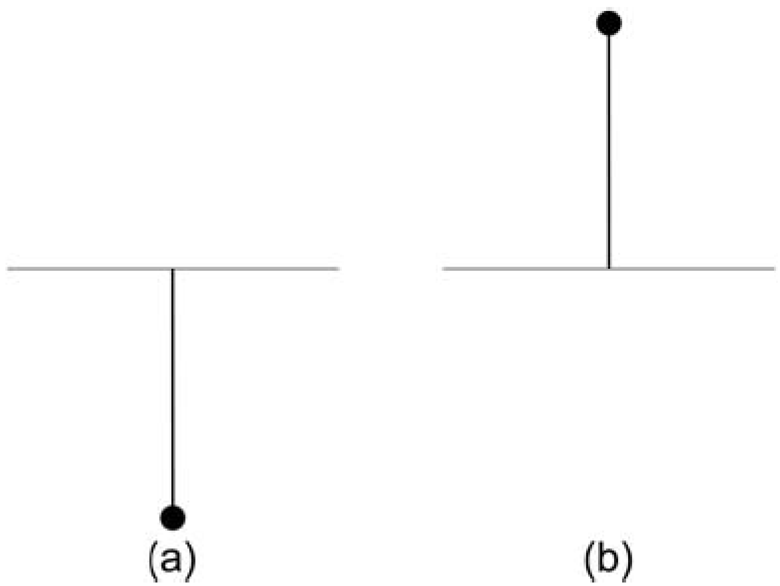


Figura 1: Dos puntos de equilibrio, (a) equilibrio estable, y (b) equilibrio inestable [Mellodge, 2015].

Estabilidad de un sistema LTI

Para sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) continuos y discretos, sin entrada.

$$\dot{x} = Ax$$

Se definen tres tipos de estabilidad:

Estabilidad espectral

Si todos los autovalores de A tienen partes reales negativas o cero.

Estabilidad lineal

Si todas las soluciones están acotadas para todo (t). Es decir, si x(t) es una solución, entonces existe algún M, tal que:

$$|x(t)| \leq M, \qquad t \geq 0$$

Estabilidad lineal asintótica

Si todas las soluciones se aproximan a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Es decir, si $x(t)$ es una solución, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$$

Estabilidad

Por ejemplo, para el sistema de primer orden:

$$\dot{x} = ax$$

con condición inicial $x(0) = x_0$. El autovalor del sistema es a. Entonces, el sistema es espectralmente estable si $a \leq 0$. La solución del sistema es

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

- Para $a = 0$, la solución es constante, por lo tanto, es acotada y linealmente estable, pero no asintóticamente linealmente estable porque no se acerca a cero.
- Para $a < 0$, la solución es acotada y se acerca a cero, por lo tanto, es tanto lineal como asintóticamente linealmente estable.

En la Tabla 1 se resumen los resultados de estabilidad

Estabilidad

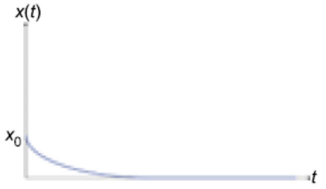
	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
Solution			
Spectrally stable?	No	Yes	Yes
Linearly stable?	No	Yes	Yes
Asymptotically linearly stable?	No	No	Yes

Tabla 1: Estabilidad de un sistema de primer orden [Mellodge, 2015].

Ejercicio 1

Sea el sistema dinámico descrito por la siguiente ecuación diferencia:

$$\ddot{x} = -4x$$

Analice la estabilidad del sistema. Considere condiciones iniciales diferentes de cero.

Solución

Representación del sistema dinámico en el espacio de estados:

- Entradas : No se tienen
- Salidas : No están definidas
- Variables de estado : $x, \dot{x}$
- Vector de estado : $X = [x, \dot{x}\ ]^T$

Luego,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1

Solución

Donde:

$$x_1 = x$$
$$x_2 = \dot{x}$$

La matriz de transición de estados Φ(s) esta dada por:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

Entonces:

$$\Phi(s) = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s \end{bmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2+4} & \dfrac{1}{s^2+4} \\ -\dfrac{4}{s^2+4} & \dfrac{s}{s^2+4} \end{bmatrix}$$

Utilizando la tabla de transformadas:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos(2t) & t \\ -4t & \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1

Solución

Luego,

$$X(t) = \Phi(t)X(0) = \begin{bmatrix} \cos(2t) & \dfrac{\sin(2t)}{2} \\ -2\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X(t) = \begin{bmatrix} x_{10}\cos(2t) + \dfrac{x_{20}t\sin(2t)}{2} \\ -2x_{10}\sin(2t) + x_{20}\cos(2t) \end{bmatrix}$$

Asimismo, la ecuación característica del sistema está dada por:

$$|sI - A| = 0$$

$$\rightarrow \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\rightarrow \left| \begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\rightarrow s^2 + 4 = 0$$

Ejercicio 1

Solución

Por lo tanto, los polos del sistema s_1 y s_2 (autovalores -valores propios- de A) son:

$$s_1 = 2i, s_2 = -2i$$

Dado que todos los autovalores de A tienen parte real igual a cero (negativa o igual a cero), el sistema es **espacialmente estable**.

De acuerdo con lo obtenido para $X(t)$, la solución está acotada para cada componente, dado que las funciones seno y coseno nunca exceden 1. También (al depender de senos y cosenos), la solución no decae a cero con el tiempo, sino, oscila para siempre. Por lo tanto, el sistema es **linealmente estable** pero **no asintóticamente estable**.

Ejercicio 2

Sea el sistema dinámico péndulo amortiguado linealizado, definido por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}x_1 - \frac{b}{ml^2}x_2 + \frac{1}{ml^2}T$$

Determine la estabilidad espectral del sistema para valores genéricos de las constantes.

Solución

- Entradas : T
- Salidas : No especificado.
- Variables de estado : x_1, x_2
- Vector de estado : $[x_1, x_2]^T$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} T$$

Ejercicio 2

Solución

Por lo tanto:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{b}{ml^2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$

Para analizar la estabilidad interna, se establece que $T = 0$. Entonces, la ecuación característica del sistema es:

$$|sI - A| = 0$$

$$\rightarrow \left| s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\rightarrow \left| \begin{bmatrix} s & -1 \\ \dfrac{g}{l} & s + \dfrac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\therefore s^2 + s\left(\frac{b}{ml^2}\right) + \frac{g}{l} = 0$$

Ejercicio 2

Solución

Entonces, las raíces de la ecuación característica (s_1, s_2) están dadas por:

$$s_1 = \frac{-\frac{b}{ml^2} + \sqrt{\left(\frac{b}{ml^2}\right)^2 - 4\frac{g}{l}}}{2}, s_2 = \frac{-\frac{b}{ml^2} - \sqrt{\left(\frac{b}{ml^2}\right)^2 - 4\frac{g}{l}}}{2}$$

Casos a considerar; subamortiguado (para segundo orden, polos reales diferentes), críticamente amortiguado (para segundo orden, polos reales iguales), y sobreamortiguado (para segundo orden, polos complejos congutados).

Para los casos subamortiguado y críticamente amortiguado, la parte real de cada autovalor es $-\frac{b}{2ml^2}$, y el sistema es espectralmente estable (todos los autovalores de A tienen partes reales negativas o cero).

Ejercicio 2

Solución

Para el caso sobreamortiguado, se puede ver que la solución siempre es negativa:

$$-4\frac{g}{l} < 0 \rightarrow \left(\frac{b}{ml^2}\right)^2 - 4\frac{g}{l} < \left(\frac{b}{ml^2}\right)^2$$

$$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{b}{ml^2}\right)^2 - 4\frac{g}{l}} < \frac{b}{ml^2}$$

$$\rightarrow -\frac{b}{ml^2} + \sqrt{\left(\frac{b}{ml^2}\right)^2 - 4\frac{g}{l}} < 0$$

Por lo tanto, el péndulo sobreamortiguado también es espectralmente estable.

5.2 Estabilidad interna de sistemas LTI

Al estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio, no se consideran los efectos de las entradas externas. Por lo tanto, este tipo de estabilidad se conoce como estabilidad interna (solo tiene en cuenta cómo se comporta el sistema por sí solo).

Punto de equilibrio

Estado del sistema que no cambia con el tiempo. Para un sistema descrito por la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = f(x)$$

Un punto x^* es un punto de equilibrio si solo si, al ser el estado inicial del sistema $x(0) = x^*$, la derivada del estado es cero:

$$f(x^*) = 0$$

Puntos de equilibrio estables

Al discutir puntos de equilibrio estables, hay tres tipos diferentes a considerar:

- Lyapunov
- Asintótica
- Exponencial.

5.2 Estabilidad interna de sistemas LTI

Estabilidad de Lyapunov

Un punto de equilibrio x^* es Lyapunov estable si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x(0) - x^*| < \delta$, entonces $|x(t) - x^*| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.

- La estabilidad de Lyapunov es implicada si un punto de equilibrio es descrito simplemente como “estable”.
- Una trayectoria permanece arbitrariamente cerca del punto de equilibrio si no comienza demasiado lejos de él.

Estabilidad asintótica

Un punto de equilibrio x^* es asintóticamente estable si existe un $\delta > 0$ tal que si $\lim_{t \to \infty} |x(t) - x^*| = 0$.

- Una trayectoria eventualmente termina en el punto de equilibrio si no comienza demasiado lejos de él.

Estabilidad exponencial

Un punto de equilibrio x^* es exponencialmente estable si existen $a > 0$ y $\lambda > 0$ tales que $|x(t) - x^*(t)| < \alpha e^{-\lambda t}|x(0) - x^*|$ para todo $t > 0$.

- Una trayectoria va al punto de equilibrio, y se puede especificar qué tan rápido usando una función exponencial.

Estabilidad marginal

Un punto de equilibrio x^* es marginalmente estable si es Lyapunov estable pero no asintóticamente estable.

5.2 Estabilidad interna de sistemas LTI

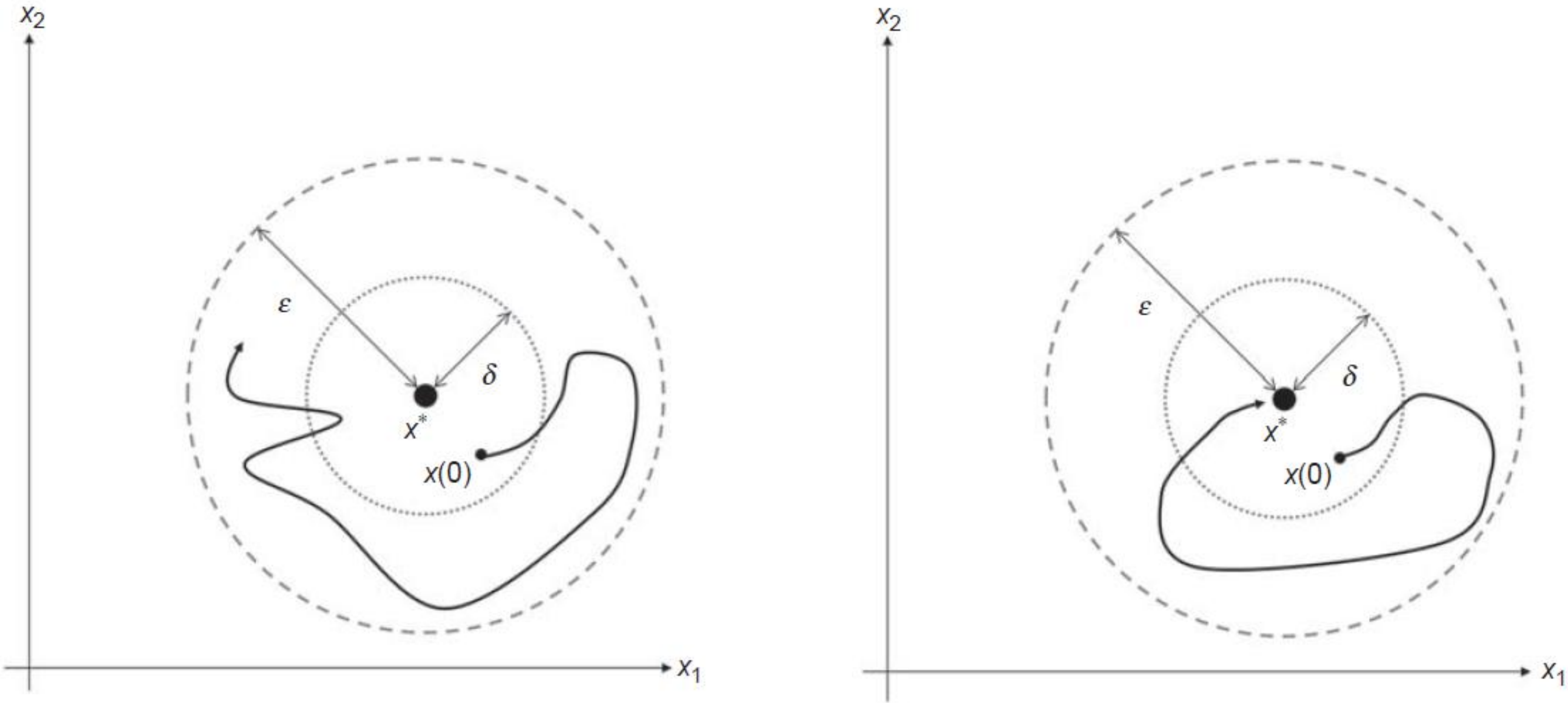


Figura 2: Trayectoria en un sistema con un punto de equilibrio; Lyapunov estable (izquierda), y asintóticamente estable (derecha) [Mellodge, 2015].

5.2 Estabilidad interna de sistemas LTI

- Para los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), la estabilidad de Lyapunov y la estabilidad asintótica se reducen a verificar los autovalores de la matriz (A).

Se tienen los siguientes teoremas para la estabilidad de los sistemas lineales:

Estabilidad de Lyapunov para Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo

Un sistema $\dot{x} = Ax$ es Lyapunov estable si y solo si ningún autovalor de A se encuentra en la mitad derecha del plano complejo

Estabilidad asintótica para Sistemas Lineales Invariantes en el tiempo

Un sistema $x^{\cdot} = Ax$ es asintóticamente estable si y solo si todos los autovalores de A se encuentran en la mitad izquierda del plano complejo.

5.1 Estabilidad entrada-salida de sistemas LTI

En general, los sistemas tienen entradas, y es importante saber si el sistema reacciona a esas entradas de manera estable. Este tipo de estabilidad se conoce como estabilidad externa.

Sea el sistema el sistema en tiempo continuo:

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big)$$
$$y(t) = h\big(t, x(t), u(t)\big)$$

Estabilidad de entrada acotada, salida acotada (BIBO)

El sistema es estable BIBO si para cualquier entrada acotada $u(t)$ y cualquier condición inicial $x(0)$, la salida $y(t)$ también está acotada. Es decir, si existe una M con $|u(t)| \leq M$ para todo t, entonces existe una constante N_o tal que $|y(t)| \leq N_o$, para todo t.

Estabilidad de entrada acotada, estado acotado (BIBS)

El sistema es estable BIBS si para cualquier entrada acotada $u(t)$ y cualquier condición inicial $x(0)$, el estado $x(t)$ también está acotado. Es decir, si existe una M tal que $|u(t)| \leq M$ para todo t, entonces existe una constante N_s tal que $|x(t)| \leq N_s$, para todo t.

5.1 Estabilidad entrada-salida de sistemas LTI

- En la Figura 3 se representa una relación entre los tipos de estabilidad para sistemas lineales.
- Cabe precisar que, se pueden encontrar ejemplos de sistemas que exhiben estabilidad Lyapunov que no son estables BIBO y viceversa

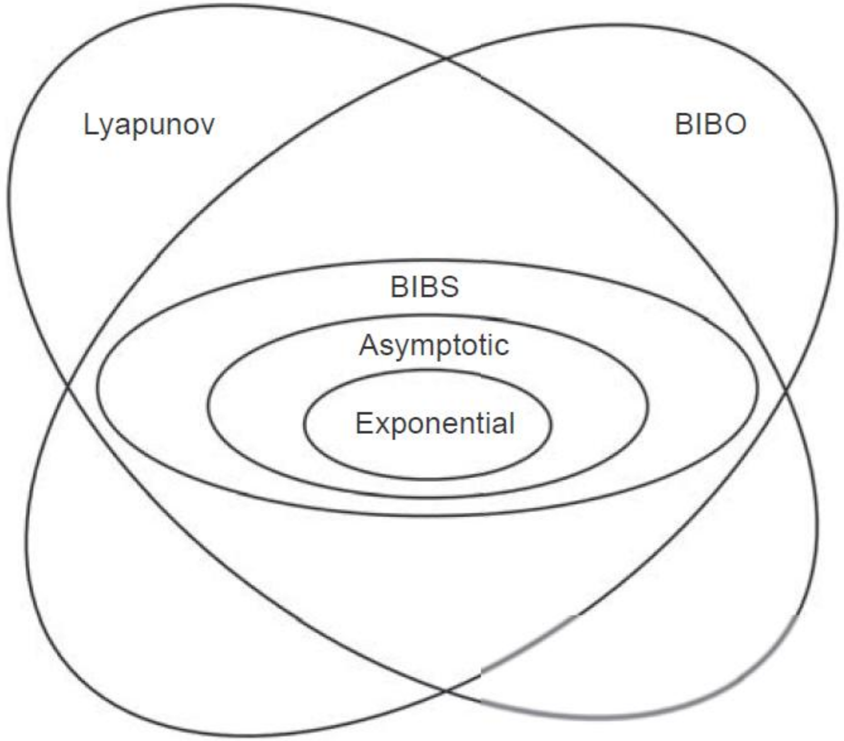


Figura 3: Relación entre diferentes tipos de estabilidad para sistemas lineales [Mellodge, 2015].

5.3 Teorema de Lyapunov

Sea x^* un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$. Si existe una función escalar continuamente diferenciable V(x) definida en una vecindad D de x^* tal que:

i. $V(x^*) = 0$

ii. $V(x) > 0$ cuando $x \in D$ y $x \neq x^*$

iii. $\dot{V}(x) \leq 0$ cuando $x \in D$, entonces x^* es Lyapunov estable.

iv. $\dot{V}(x) < 0$ cuando $x \in D$ y $x \neq x^*$, entonces x^* es asintóticamente estable.

NOTAS:

- El teorema no puede utilizarse para probar inestabilidad en ausencia de una función de Lyapunov. Si no se puede encontrar tal V(x), el punto equilibrio puede ser estable o no.
- El teorema no da ninguna indicación sobre cómo encontrar tal V(x).

Estabilidad basada en la ecuación de Lyapunov para sistemas LTI

El sistema LTI, $\dot{x} = Ax$ es asintóticamente estable si y solo si, para cualquier matriz simétrica definida positiva Q, existe una única matriz simétrica definida positiva P que satisface la ecuación de Lyapunov:

$$A^T P + PA = Q$$

Definiciones

- Matriz definida positiva (M) : Tiene todos sus autovalores positivos
- Matriz semidefinida positiva (M) : Tiene todos sus autovalores no negativos.
- Matriz definida negativa (M) : $-M$ es definida positiva.
- Matriz semidefinida negativa(M) : $-M$ es semidefinida positiva.
- Rango de una matriz : Cantidad máxima de filas o columnas linealmente independientes entre sí.

Ejercicio 3

Sea el sistema dinámico definido por la siguiente ecuación de estado:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Determine si el punto; $x_1 = 0, x_2 = 0$ es asintóticamente estable. Considere que:

$$g = 9.8m/s\text{^}2$$
$$l = 1m$$
$$b = 0.1Ns/m$$
$$m = 1kg;$$

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.8 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Se define;

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

Solución

Luego

$$A\text{^}T\ P + PA = -Q$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -9.8 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.8 & -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -9.8b - 9.8c & a - 0.1b - 9.8d \\ a - 0.1c - 9.8d & b + c - 0.2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow a = 54, b = 0.051, c = 0.051, d = 5.51$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 54 & 0.051 \\ 0.051 & 5.51 \end{bmatrix}$$

Luego, se obtienen los autovalores de la siguiente forma:

$$|\lambda I - P| = 0$$

$$\rightarrow \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 54 & 0.051 \\ 0.051 & 5.51 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 5.5102, \lambda_2 = 54.0052$$

Ejercicio 3

Solución

Por lo tanto, al ser todos los autovalores de $P, \lambda_1 y\ \lambda_2$, positivos, P es una matriz definida positiva. Por ende, se puede concluir que el sistema es asintóticamente estable.

Alternativamente, se pueden calcular los valores de $P, \lambda_1 y\ \lambda_2$ utilizando Matlab, de la siguiente forma:

```
clc, close all, clear all;
g=9.8;
l=1;
b=0.1;
m=1;
A=[   0          1
   -g/l -b/(m*l^2)];
B=[0
   1/(m*l^2)];
Q=eye(size(A));
P=lyap(A',Q);
lambda=eig(P);
lambda1=lambda(1);
lambda2=lambda(2);
```

5.4 Análisis de Controlabilidad de sistemas LTI

Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede transferir dese cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

Controlabilidad completa del estado de sistemas en tiempo continuo

Sea el sistema en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Donde:

- x: Vector de estado (de longitud n).
- u: Señal de control (escalar).
- A: Matriz de n×n.
- B: Matriz de n×1.

El sistema es de estado controlable en $t = t_0$, si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera un estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Si todos los estados son controlables, se dice que el sistema es de **estado completamente controlable**.

5.4 Análisis de Controlabilidad de sistemas LTI

El sistema es de estado completamente controlable si y sólo si los vectores $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ son linealmente independientes, o la matriz de controlabilidad M_c de orden n×n, es de rango n:

$$M\_c = [B \;\vdots\; AB \;\vdots \cdots \vdots\; A^{n-1}B]$$

Ejercicio 4

Sea el sistema dinámico linealizado representado por la siguiente ecuación:

$$\ddot{q} + \frac{g}{d} q = \frac{1}{md^2} \tau$$

Determine si el sistema es de estado completamente controlable, considere que:

$$g = 9.81$$
$$m = 0.1$$
$$d = 0.2$$

Solución

- Entradas : τ
- Salidas : No definido
- Variables de estado : $q \ \dot{q}$
- Vector de estado : $x = [q, \dot{q}]^T$

Ejercicio 4

Solución

Luego,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\frac{gq}{d} + \frac{\tau}{md^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{d} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{md^2} \end{bmatrix}\tau$$

Entonces

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{d} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -49.05 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{md^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 250 \end{bmatrix}$$

Se calcula la matriz de controlabilidad como:

$$M_c = [B \ \vdots \ AB \ \vdots \cdots \vdots \ A^{n-1}B] = [B \ \vdots \ AB] = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 250 \end{bmatrix} \ \vdots \ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -49.05 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 250 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 250 \\ 250 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz M (que puede ser obtenido utilizando la función rank de Matlab) es igual a 2 (valor de n). Por lo tanto, el sistema descrito es de estado completamente controlable.

Controlabilidad a la salida

Una controlabilidad completa del estado no es condición necesaria ni suficiente para controlar la salida del sistema. Sea el sistema descrito mediante:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Donde:

- x: Vector de estado (de longitud n).
- u: Vector de control (vector de dimensión r).
- y: Vector de salida (de longitud m)
- A: Matriz de n×n.
- B: Matriz de n×r.
- C: Matriz de m×n.
- D: Matriz de m×r.

5.4 Análisis de Controlabilidad de sistemas LTI

Se dice que este sistema es de **salida completamente controlable** si es posible construir un vector de control sin restricciones $u(t)$ que transfiera cualquier salida inicial $y(t_0)$ en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

El sistema es de salida completamente controlable si y sólo si la matriz de dimensiones m×(n+1)r

$$[CB \;\vdots\; CAB \;\vdots\; CA^2B \;\ldots \vdots\; CA^{n-1}B \;\vdots\; D]$$

Es de rango m.

Ejercicio 5

Determine si el sistema mostrado en el Ejercicio 4 es de salida completamente controlable, considere que la salida es q.

5.5 Análisis de Observabilidad de sistemas LTI

Se dice que un sistema es observable en el tiempo t_0 si, con el sistema en el estado $x(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

Sea el sistema, descrito mediante las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

El sistema es completamente observable si el estado $x(t_0)$ se determina a partir de la observación de y(t) durante un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

Para sistemas LTI, el sistema descrito por las ecuaciones es completamente observable si y sólo si la matriz M_o

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Es de rango n.

Ejercicio 6

Determine si el sistema descrito en el Ejercicio 4 es de estado completamente observable.

Referencias

- Ogata, K. (2010). Modern control engineering (5th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education. ISBN: 9780136156734.
- Mellodge, P. (2015). A Practical Approach to Dynamical Systems for Engineers. Woodhead Publishing. ISBN: 9780081002025. Disponible en Elsevier y Scientific Research Publishing.

Muchas gracias

PUCP

PUCP