PUCP

Sistemas dinámicos y control B

Tema 5: Control por realimentación de estados y estimadores de estado – Parte I

Docente: Juan Carlos Suárez Quispe, M.Sc.

PUCP

6.1 Realimentación de estados

Sea un sistema dinámico de una entrada y una salida, expresado en el espacio de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Se supone que todas las variables de estado están disponibles para su realimentación, y que no hay restricciones sobre u. Se selecciona la señal de control como:

$$u = -Kx$$
$$\rightarrow \dot{x}(t) = Ax - Bu = A - B(-Kx) = (A - BK)x(t)$$

Se demuestra que la colocación arbitraria de los polos para un sistema determinado es posible si y sólo si el sistema es de estado completamente controlable.

Este sistema en lazo cerrado no tiene entradas. El objetivo es mantener la salida en cero.

El sistema controlado sin entrada (referencia) se muestra en la Figura 1.

6.1 Realimentación de estados

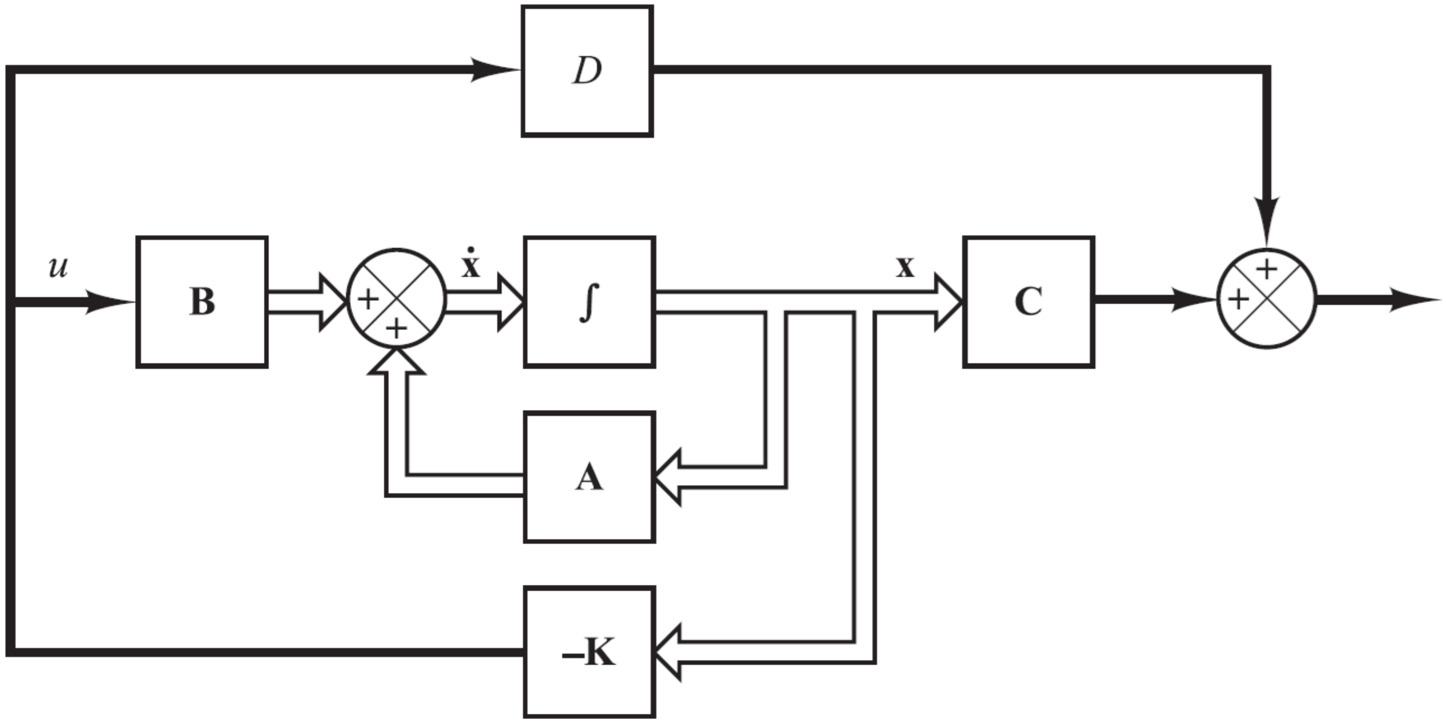

Figura 1: Sistema de control en lazo cerrado con $u = -Kx$ [Ogata, 2010].

6.2 Diseño por asignación de polos

En lugar de especificar sólo los polos dominantes en lazo cerrado (enfoque del diseño convencional), el enfoque actual de asignación de polos especifica todos los polos en lazo cerrado.

Se requiere que el sistema sea de estado completamente controlable.

Sea un sistema de control:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Se selecciona la señal de control como:

$$u = -Kx$$

Determinación de la matriz K utilizando el método de sustitución directa

Cuando el sistema es de un orden inferior a 3 (n≤3). Por ejemplo:

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

Luego se iguala$|sI - A + BK|$ al polinómio característico deseado (s-μ_1)(s-μ_2)(s-μ_3):

$$|sI - A + BK| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$$

Ejercicio 1

Sea el sistema dinámico masa-resorte-amortiguador que se muestra en la Figura 2.

$$f - kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

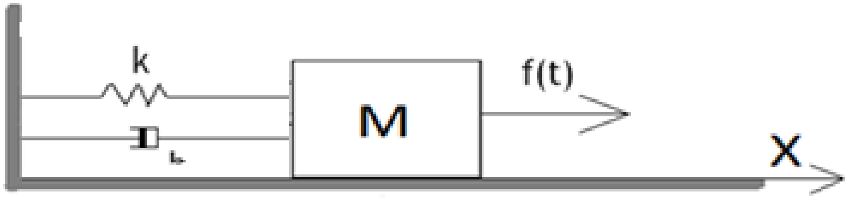

Fig. 2 Sistema masa-resorte-amortiguador.

Donde:

- f: Fuerza externa, manipulable.
- k: Constante de elasticidad del resorte.
- b: Coeficiente de amortiguamiento.
- m: Masa del bloque.

$$m = 0.2Kg$$
$$k = 0.7N/m$$
$$b = 0.5Kg/s$$

Diseñe un controlador por ubicación de polos utilizando el método de sustitución directa, de modo de que el sistema controlado posea una salida (x(t)) con sobre elongación máxima porcentual del 10% y un tiempo de asentamiento de 1s (según el criterio del 2%). Considere que las condiciones iniciales son; x(0)=-0.5,$\dot{x}$(0)=0.2.

Ejercicio 1

Solución

Modelamiento del sistema dinámico

$$f - kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Sin embargo, con fines de generalización, se cambiará el nombre de la variable "f", a "u". Por lo que, la dinámica del sistema queda expresada de la siguiente forma:

$$u - kx - b\dot{x} = m\ddot{x} \quad \dots (1)$$

Representación del sistema dinámico en el espacio de estados

- Entradas : u
- Salidas : x
- Variables de estado : $x, \dot{x}$
- Vector de estado : $X = [x, \dot{x}]^T$
- Obtención de la ecuación de estado

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = f(x, \dot{x}, u, t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dfrac{-kx - b\dot{x}}{m} + \dfrac{u}{m} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}\mathrm{u}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1

Solución

Obtención de la ecuación de salida

$$y = x = g(x, \dot{x}, u, t) = CX + Du = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + 0u$$
$$\therefore C = [1 \quad 0], D = 0$$

Diseño del controlador

La matriz de controlabilidad es:

$$M_c = [B \vdots AB] = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -12.5 \end{bmatrix}$$

Al ser M_c una matriz de orden 2 si su determinante es diferente de cero, entonces su rango es 2. Esto se verifica por lo que el rango de M_c es igual a 2. Por lo tanto, el sistema es de estado completamente controlable.

Se calculan los polos deseados utilizando la ecuación característica de la forma estándar de un sistema de segundo orden:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

Donde:

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} = 0.1 \rightarrow \zeta = 0.5912$$
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.5912\omega_n} = 1 \rightarrow \omega_n = 6.7664$$

Ejercicio 1

Solución

Luego, la ecuación característica deseada es:

$$s^2 + 2\zeta w_n + w_n^2 = s^2 + 8s + 45.7844$$

Por su parte, se plantea aplicar un controlador por realimentación de estados, de ganancia K, de modo que:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, la dinámica del sistema controlado puede ser expresada de la forma:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) = AX(t) + B\big(-K \cdot X(t)\big) = (A - BK)X(t)$$

La ecuación característica de este sistema está dada por el determinante de sI-(A-BK), donde I es una matriz identidad del mismo orden de A. Entonces:

$$\left| s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right) \right| = \left\| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5k_1 & 5k_2 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3.5 + 5k_1 & s + 2.5 + 5k_2 \end{bmatrix} \right\| = s(s + 2.5 + 5k_2) + (3.5 + 5k_1)$$

$$= s^2 + s(2.5 + 5k_2) + (3.5 + 5k_1)$$

Ejercicio 1

Solución

Esta ecuación característica es del mismo orden que la ecuación característica deseada, por lo tanto, es posible calcular K igualando ambas ecuaciones características, de la siguiente forma:

$$s^2 + s(2.5 + 5k_2) + (3.5 + 5k_1) = s^2 + 8s + 45.7844$$

$$\therefore k_1 = 8.4569, k_2 = 1.1$$

$$K = [8.4569 \quad 1.1] \quad \ldots Respuesta$$

Si bien no se pide, se simulará el comportamiento de este sistema dinámico en Simulink. Se elabora el modelo mostrado en la Figura 3.

Ejercicio 1

Solución

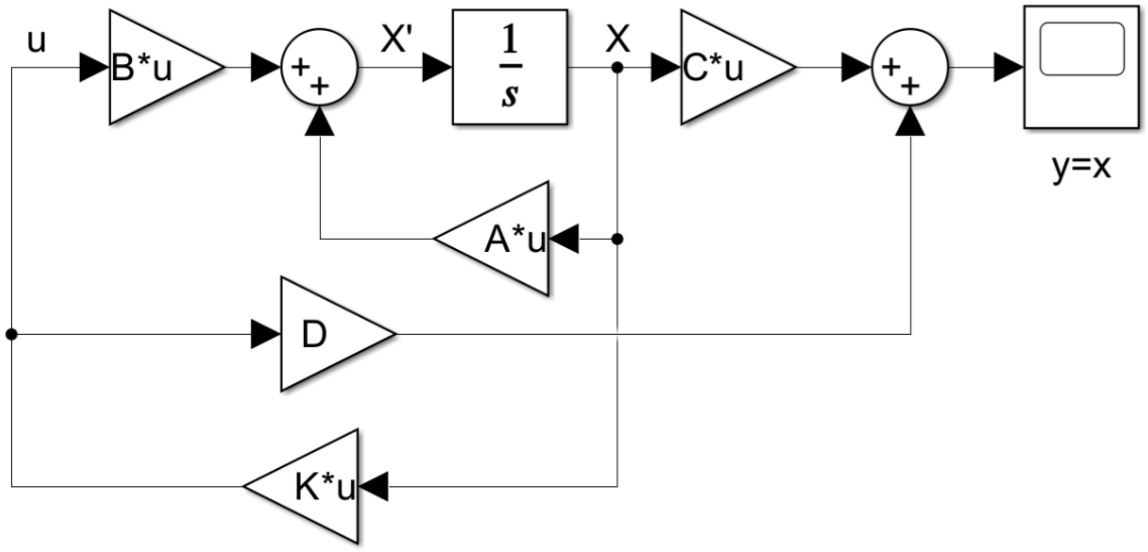

Figura 3: Sistema controlado por realimentación de estados – sustitución directa.

Solución

Ejercicio 1

Este modelo va acompañado del siguiente código:

```
clc, close all, clear all;

% Datos de la planta
m=0.2;
k=0.7;
b=0.5;
x0=[-0.5;0.2];

% Espacio de estados
A=[   0     1
   -k/m -b/m];

B=[0
   1/m];

C=[1 0];
D=0;

K=[8.4569 1.1];
```

Ejercicio 1

Solución

Asimismo, en la Figura 4 se muestra la evolución de la variable controlada a lo largo del tiempo.

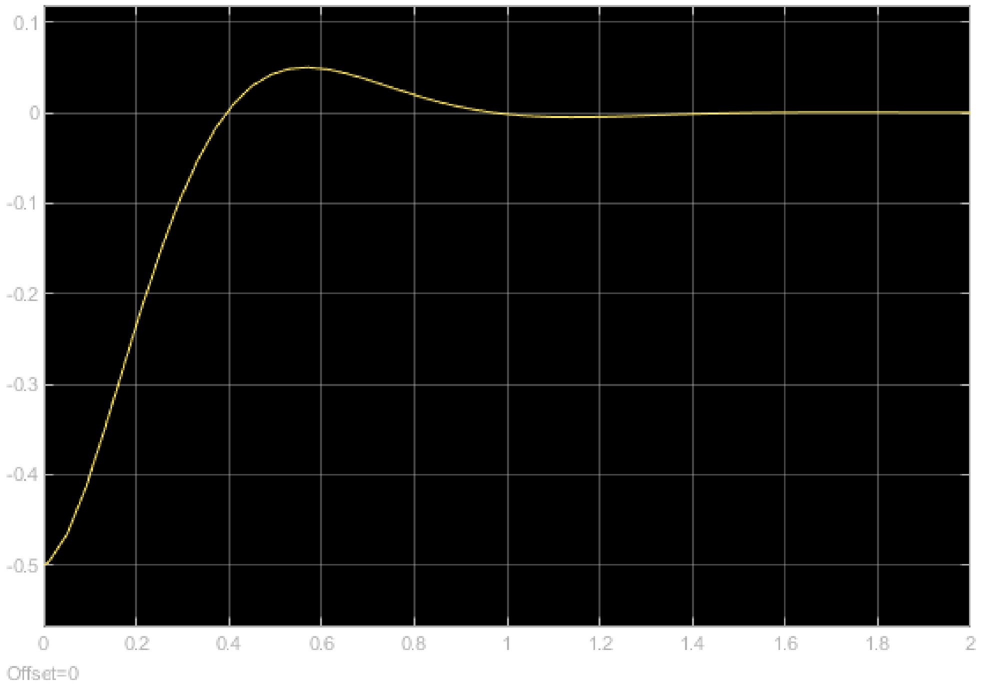

Figura 4: Evolución de la variable controlada a lo largo del tiempo.

6.2 Diseño por asignación de polos

Determinación de la matriz K utilizando la matriz de transformación T

La matriz K que hace que sean los valores propios de $A - BK$ sean μ_1, μ_2, μ_3 (valores deseados), se determinan mediante los siguientes pasos:

Paso 1: Compruebe que el sistema sea de estado completamente controlable.

Paso 2: A partir del polinomio característico de la matriz A,

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

Determine los valores de $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Paso 3: Determine la matriz de transformación T que convierte la ecuación de estado del sistema a su forma canónica controlable. No es necesario escribir la ecuación de estado en la forma canónica controlable

$$T = M_c W$$

$$M_c = [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinación de la matriz K utilizando la matriz de transformación T

Paso 4: Escriba el polinomio característico deseado:

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)\dots(s-\mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$$

Y determine los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

Paso 5: La matriz de ganancias de realimentación de estado K requerida se determina de:

$$K = [\alpha_n - a_n \,\vdots\, \alpha_{n-1} - a_{n-1} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \alpha_2 - a_2 \,\vdots\, \alpha_1 - a_1]T^{-1}$$

Ejercicio 2

Resuelva el Ejercicio 1, utilizando el método de la matriz de transformación.

Solución

Paso 1: De la solución del Ejercicio 1, se conoce que el sistema es de estado completamente controlable.

Paso 2: También, de la solución del Ejercicio 1, se conoce que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

Entonces, el polinomio característico de A, es:

$$|sI - A| = \left| s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3.5 & s + 2.5 \end{bmatrix} \right|$$
$$= s^2 + 2.5s + 3.5 = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$
$$\therefore a_1 = 2.5, a_2 = 3.5$$

Paso 3: Se obtiene la matriz de transformación $T = M_c W$

$$M_c = [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -12.5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2

Solución

Paso 3: Se obtiene la matriz de transformación $T = M_c W$

$$M\_c = [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A\^(n-1)\, B] = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -12.5 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore T = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -12.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Paso 4: De la solución del Ejercicio 1, se conoce que la ecuación característica deseada es:

$$s^2 + 2\zeta w_n + w_n^2 = s^2 + 8s + 45.7844 = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

$$\therefore \alpha_1 = 8, \alpha_2 = 45.7844$$

Ejercicio 2

Solución

Paso 5: La matriz de ganancias de realimentación de estado K requerida se determina de:

$$K = [\alpha_n - a_n \vdots \alpha_{n-1} - a_{n-1} \vdots \cdots \vdots \alpha_2 - a_2 \vdots \alpha_1 - a_1]T^{-1}$$
$$= [\alpha_2 - a_2 \vdots \alpha_1 - a_1]T^{-1}$$
$$= [45.7844 - 3.5 \quad 8 - 2.5]\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} = [8.4569 \quad 1.1]$$
$$\therefore K = [8.4569 \quad 1.1] \quad \ldots Respuesta$$

6.2 Diseño por asignación de polos

Determinación de la matriz K utilizando la fórmula de Ackerman

Sea el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Donde:

$$u = -Kx$$

Se supone que este sistema es de estado completamente controlable y que los polos en lazo cerrado deseados están en $s = \mu_1, s = \mu_2, \ldots, s = \mu_n$.

Se define

$$\tilde{A} = A - BK$$

La ecuación característica deseada es:

$$|sI - A + BK| = \left|sI - \tilde{A}\right| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \ldots (s - \mu_n)$$
$$= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$

Luego,

$$\phi(A\ ) = A^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A\ + \alpha_n I$$

Finalmente:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B\right]^{-1} \phi(A)$$

Ejercicio 3

Resuelva el Ejercicio 1, utilizando la fórmula de Ackerman

Solución

De la solución del Ejercicio 1, se conoce que:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3.5 & -2.5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}, M_c=[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 5 & -12.5\end{bmatrix}$$

También se conoce que la ecuación característica deseada es:

$$s^2+2\zeta w_n+w_n^2=s^2+8s+45.7844=s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n$$
$$\therefore \alpha_1=8, \alpha_2=45.7844$$

Se calcula ϕ(A) de acuerdo con:

$$\phi(A)=A^2+\alpha_1 A+\alpha_2 I=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3.5 & -2.5\end{bmatrix}^2+8\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3.5 & -2.5\end{bmatrix}+45.7844\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}42.2844 & 5.5\\ -19.25 & 28.5344\end{bmatrix}$$

A continuación, se calcula la ganancia K de la siguiente forma:

$$K=[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix}0 & 5\\ 5 & -12.5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}42.2844 & 5.5\\ -19.25 & 28.5344\end{bmatrix}=[8.4569 \quad 1.1]$$
$$\therefore K=[8.4569 \quad 1.1] \quad \ldots Respuesta$$

6.3 Regulación y seguimiento

Diseño de servosistemas de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador

Sea el sistema dinámico definido por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

La Figura 5 muestra una configuración general del servosistema de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador. Se supone que $y = x_1$. Se asume que la entrada de referencia r es una función escalón. Entonces:

$$u = -\begin{bmatrix} 0 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + k_1(r - x_1)$$
$$= -Kx + k_1 r$$

Donde:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

6.3 Regulación y seguimiento

Diseño de servosistemas de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador

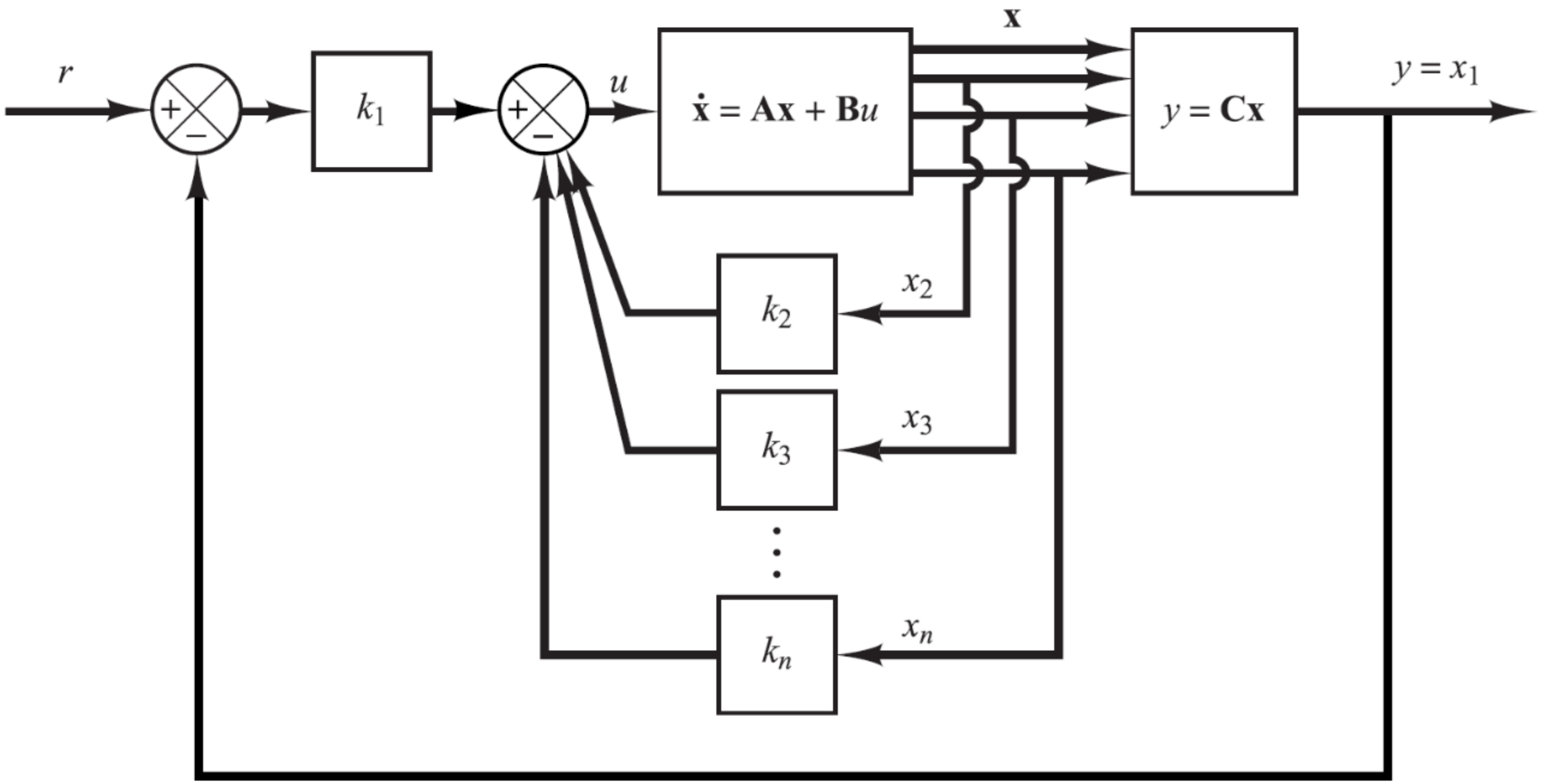

Figura 5: Servosistema de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador [Ogata, 2010].

Diseño de servosistemas de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador

Para una entrada de referencia de tipo escalón, se aplica en t=0. Así, para t>0, entonces:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(-Kx + k_1 r)\\ &= Ax - BKx + k_1 r\\ &= (A - BK)x + Bk_1 r\end{aligned}$$

Se diseñará el servosistema de tipo 1 de modo que los polos en lazo cerrado se localicen en las posiciones deseadas. En estado estacionario, se tiene que:

$$\dot{x}(\infty) = (A - BK)x(\infty) + Bk_1 r(\infty)$$

Luego, $r(\infty) = r(t) = r$ (constante) para t>0. Entonces:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) &= (A - BK)x(t) + Bk_1 r(t) - \big((A - BK)x(\infty) + Bk_1 r(\infty)\big)\\ &= (A - BK)(x(t) - x(\infty)) + Bk_1\big(r(t) - r(\infty)\big)\\ &= (A - BK)\big(x(t) - x(\infty)\big)\end{aligned}$$

$$\therefore x^{\cdot}(t) - x^{\cdot}(\infty) = (A - BK)\big(x(t) - x(\infty)\big)$$

Se define:

$$e(t) = x(t) - x(\infty)$$

Entonces:

$$\dot{e}(t) = (A - BK)e(t)$$

Esta última ecuación describe la dinámica del error.

6.3 Regulación y seguimiento

Si el sistema definido mediante $\dot{x} = Ax + Bu$ es de estado completamente controlable, entonces, para los valores propios deseados $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ para la matriz $A - BK$, la matriz K se determina mediante la técnica de asignación de polos.

Asimismo, se demuestra que:

$$u(\infty) = -Kx(\infty) + k_1 r = 0$$

Ejercicio 4

Sea el sistema masa-amortiguador, mostrado en la Figura 6. Diseñe un controlador por realimentación de estado de modo de que ante una entrada de tipo escalón, la variable controlada x(t) tenga una sobre elongación máxima porcentual del 10%, y un tiempo de asentamiento de 1s. Considere que las condiciones iniciales son iguales a cero.

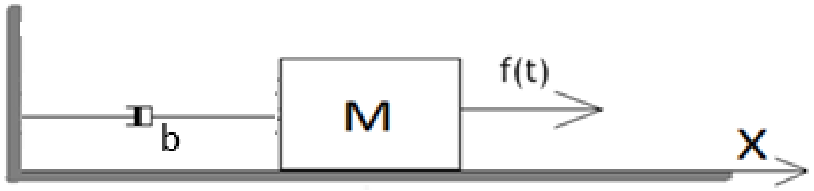

Figura 6: Sistema masa-amortiguador.

Donde:

- f: Fuerza externa, manipulable.
- b: Coeficiente de amortiguamiento.
- m: Masa del bloque.

$$m = 0.2Kg$$
$$b = 0.5Kg/s$$

Ejercicio 4

Solución

Modelamiento del sistema dinámico

$$f - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Sin embargo, con fines de generalización, se cambiará el nombre de la variable "f", a "u". Por lo que, la dinámica del sistema queda expresada de la siguiente forma:

$$u - b\dot{x} = mx\ \ddot{x}$$

Representación del sistema dinámico en el espacio de estados

- Entradas : u
- Salidas : x
- Variables de estado : $x, \dot{x}$
- Vector de estado : $X = [x, \dot{x}]^T$

Obtención de la ecuación de estado

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = f(x, \dot{x}, u, t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{-b\dot{x}}{m} + \frac{u}{m} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}u$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4

Solución

- Obtención de la ecuación de salida

$$y = x = g(x, \dot{x}, u, t) = CX + Du = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + 0u$$

$$\therefore C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

Si bien no se pide, la función de transferencia del sistema dinámico está dada por:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{5}{s^2 + 2.5s} = \frac{5}{s(s + 2.5)}$$

Diseño del controlador

La matriz de controlabilidad es:

$$M_c = [B \,\vdots\, AB] = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -12.5 \end{bmatrix}$$

Al ser M_c una matriz de orden 2 si su determinante es diferente de cero, entonces su rango es 2. Esto se verifica por lo que el rango de M_c es igual a 2. Por lo tanto, el sistema es de estado completamente controlable.

Se calculan los polos deseados utilizando la ecuación característica de la forma estándar de un sistema de segundo orden:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

Ejercicio 4

Solución

Donde:

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} = 0.1 \rightarrow \zeta = 0.5912$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.5912\omega_n} = 1 \rightarrow \omega_n = 6.7664$$

Luego, la ecuación característica deseada es:

$$s^2 + 2\zeta w_n + w_n^2 = s^2 + 8s + 45.7844$$

Por su parte, se plantea aplicar un controlador por realimentación de estados, de ganancia K, de modo que:

$$K = [k_1 \quad k_2]$$

Entonces, la dinámica del sistema controlado puede ser expresada de la forma:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) = AX(t) + B\big(-K \cdot X(t)\big) = (A - BK)X(t)$$

Ejercicio 4

Solución

La ecuación característica de este sistema está dada por el determinante de sI-(A-BK), donde I es una matriz identidad del mismo orden de A. Entonces:

$$\left| s\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2.5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\right)\right| = \left|\begin{bmatrix}s & 0\\0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2.5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\5k_1 & 5k_2\end{bmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{bmatrix}s & -1\\5k_1 & s+2.5+5k_2\end{bmatrix}\right| = s(s+2.5+5k_2)+(5k_1)$$

$$= s^2 + s(2.5+5k_2)+(5k_1) = s^2 + s(2.5+5k2)+2k_1$$

Esta ecuación característica es del mismo orden que la ecuación característica deseada, por lo tanto, es posible calcular K igualando ambas ecuaciones características, de la siguiente forma:

$$s^2 + s(2.5+5k_2)+(5k_1) = s^2 + 8s + 45.7844$$

$$\therefore k_1 = 9.1749, k_2 = 1.1$$

$$K = [9.1749 \quad 1.1], k_1 = 9.1749 \quad \ldots Respuesta$$

Si bien no se pide, se simulará el comportamiento de este sistema dinámico en Simulink. Se elabora el modelo mostrado en la Figura 7.

Ejercicio 4

Solución

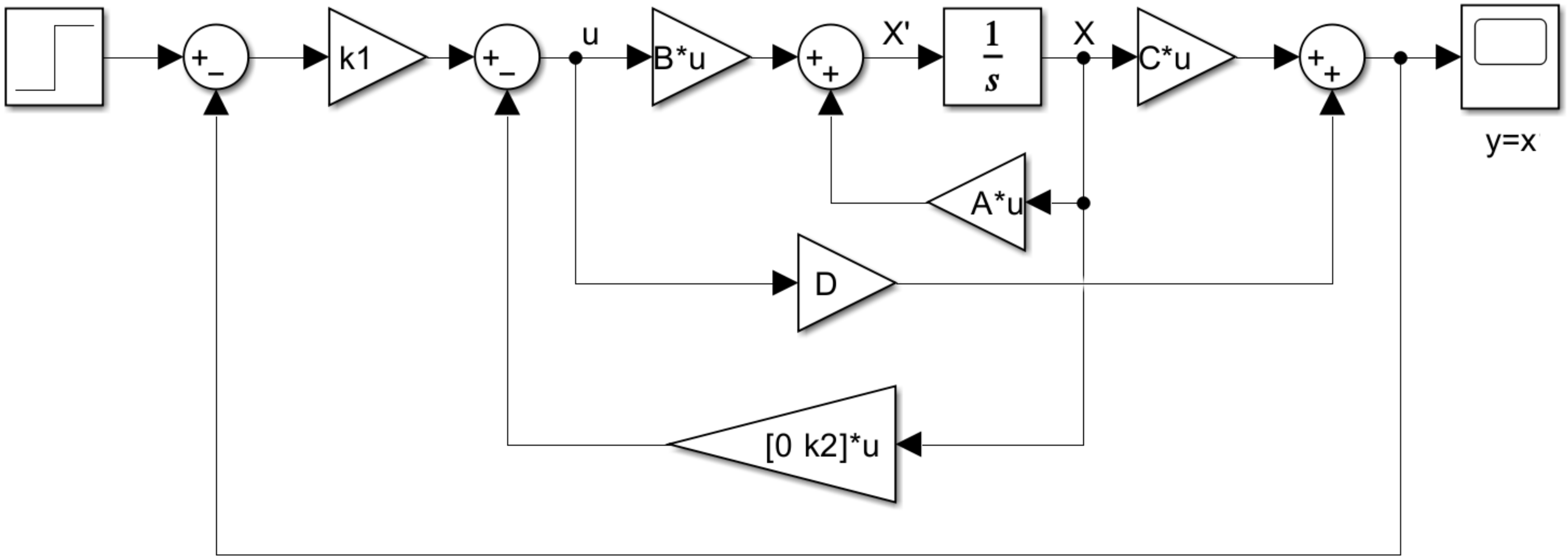

Figura: 7 Sistema dinámico controlado por realimentación de estados.

La simulación se acompaña del siguiente código:

Ejercicio 4

Solución

```
% Datos de la planta
m=0.2;
k=0.7;
b=0.5;
x0=[0;0];

% Espacio de estados
A=[   0    1
   0 -b/m];

B=[0
   1/m];

C=[1 0];
D=0;

% Controlador
K=[9.1749 1.1];
k1=K(1);
k2=K(2);
```

Ejercicio 4

Solución

Asimismo, en la Figura 8 se muestra la evolución de la variable controlada a lo largo del tiempo.

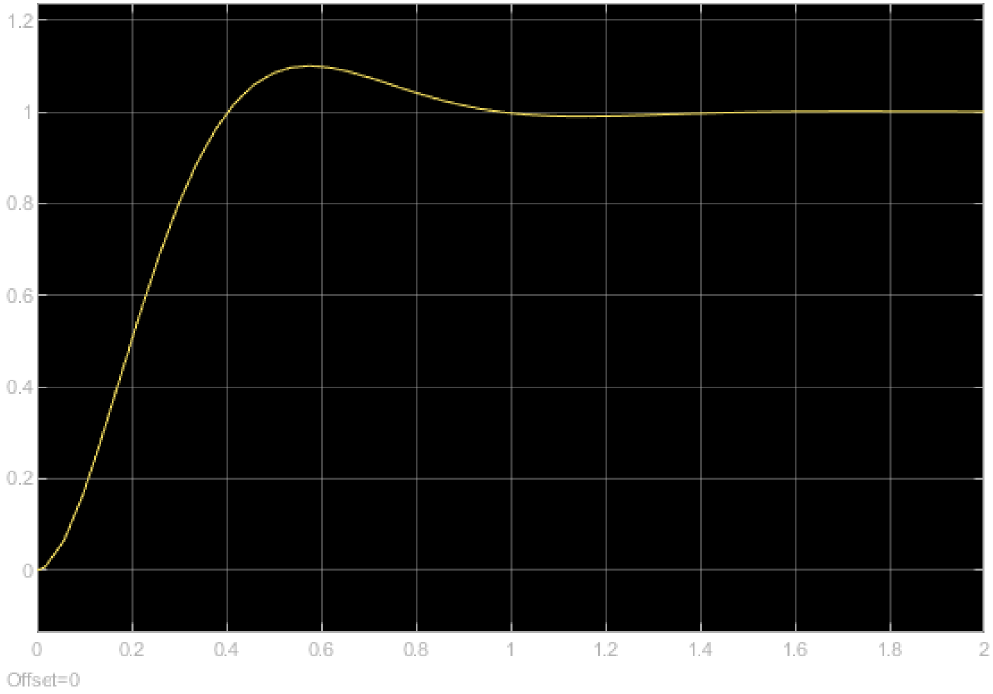

Figura 8: Evolución de la variable controlada a lo largo del tiempo.

Referencias

- Ogata, K. (2010). Modern control engineering (5th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education. ISBN: 9780136156734.

Muchas gracias

PUCP

PUCP