PUCP

PROCESAMIENTO DE SEÑALES E IMÁGENES DIGITALES

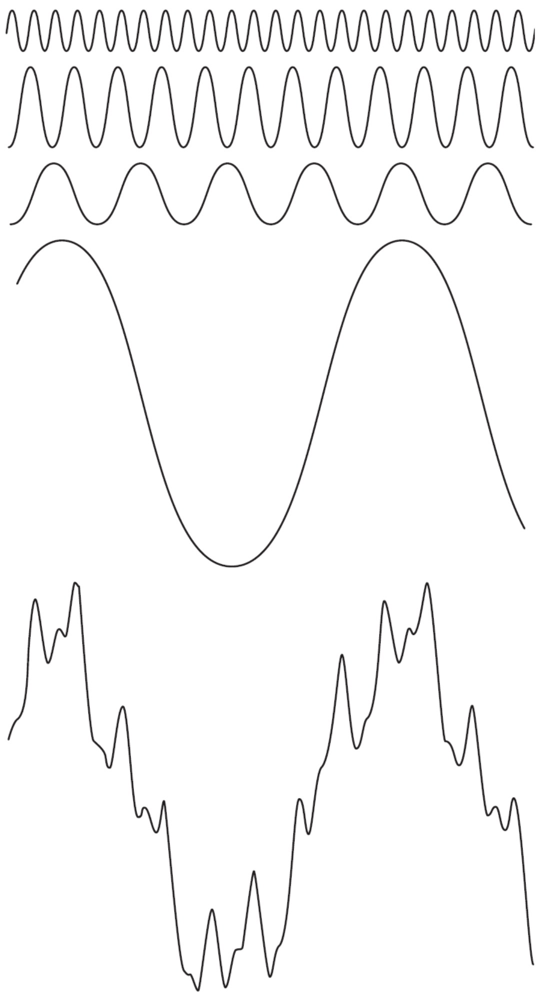
IEE239

INGENIERÍA MECATRÓNICA

Facultad de Ciencias e Ingeniería

PUCP

Dominio Frecuencial



- La forma de onda, de la parte baja, es la suma de las cuatro señales superiores.
- Pasar una imagen al dominio de la frecuencia permite la aplicación de operaciones que modifican directamente a las componentes frecuenciales.
  - Se pueden aplicar filtros: Pasabajos, Pasaaltos, Pasabandas.
- Los ruidos presentes en imágenes más comunes son:
  - Ruido Blanco o Gaussiano. Es aquel que tiene una distribución uniforme de energía y se aplica por toda la imagen.
  - Ruido Impulsivo. Constituido por pequeños impulsos en algunos puntos de la imagen.
  - Ruido Coherente. Cuando la distorsión en la imagen sigue cierto patrón o frecuencia en toda la imagen.

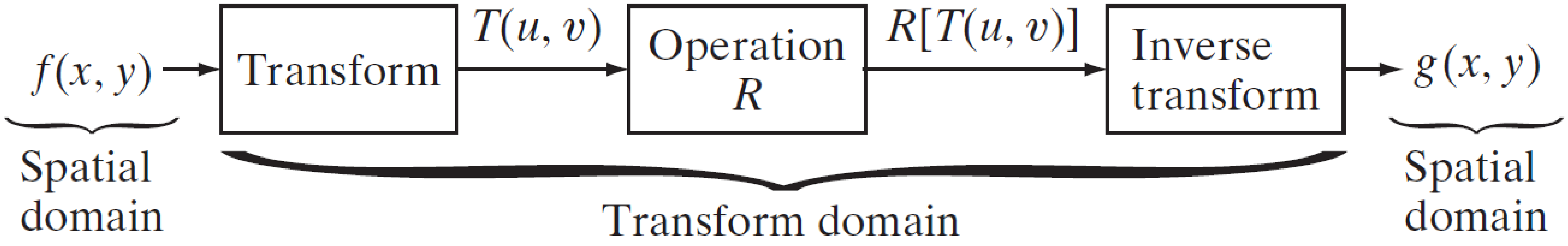
Dominio Frecuencial

- De una imagen, en el dominio frecuencial, se sabe dónde se encuentran los distintos rangos de frecuencias. De esta forma, en vez de realizar la convolución, se efectúa la operación correspondiente en el dominio frecuencial: el producto.

$$G(u,v) = H(u,v).F(u.v)$$

- Los resultados son iguales que con el filtrado en el dominio espacial (convolución) pero en este caso estamos trabajando con otras variables y manejando conceptos diferentes.

Transformada de una Imagen



Transformada de Fourier 1D

- La Transformada Discreta de Fourier (DFT) de una señal en tiempo discreto se define como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

, donde $0 \leq k \leq N - 1$

- La Transformada Discreta Inversa de Fourier (IDFT):

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

, donde $0 \leq k \leq N - 1$

Transformada de Fourier 2D

- Se realiza a partir de la transformada de Fourier de 1D.
- Se transforma primero a las filas y luego a las columnas (o viceversa).
- La Transformada Discreta de Fourier (DFT), para una imagen MxN, se define como:

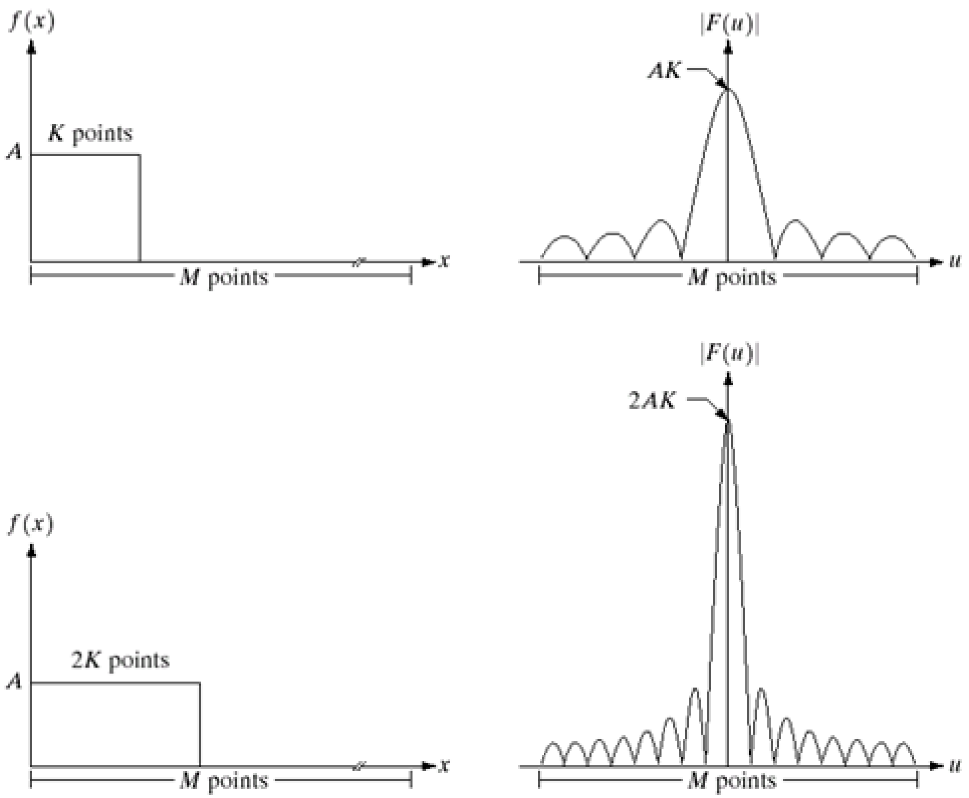
$$F[u,v] = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f[x,y] e^{-j2\pi\left[\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M}\right]}$$

- Y la Transformada Inversa Discreta de Fourier (IDFT)

$$f[x,y] = \frac{1}{NM} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F[u,v] e^{j2\pi\left[\frac{ux}{N}+\frac{vy}{M}\right]}$$

- Se tienen las mismas propiedades que en el caso de 1D.

Transformada de Fourier de un Variable Continua



a b
c d

FIGURE 4.2 (a) A discrete function of M points, and (b) its Fourier spectrum. (c) A discrete function with twice the number of nonzero points, and (d) its Fourier spectrum.

Tomado de: **Digital Image Processing**. R.C. Gonzalez y R. Woods.

TRANSFORMADA DE FOURIER EN UNA IMAGEN

- Si contamos con una señal sinusoidal discreta de longitud limitada. Para lograr una representación adecuada en su correspondiente Transformada de Fourier Discreta, se debe cumplir lo siguiente:

$$T = [2 \dots M]\frac{px}{ciclos}, \qquad \text{donde } M \text{ es el ancho de la imagen}$$

$$f = \left[\frac{1}{M} \dots \frac{1}{2}\right]\frac{ciclos}{px}$$

- Entonces en la imagen de Fourier se mostrará la componente frecuencial en $f.M$

Propiedades de la Transformada de Fourier

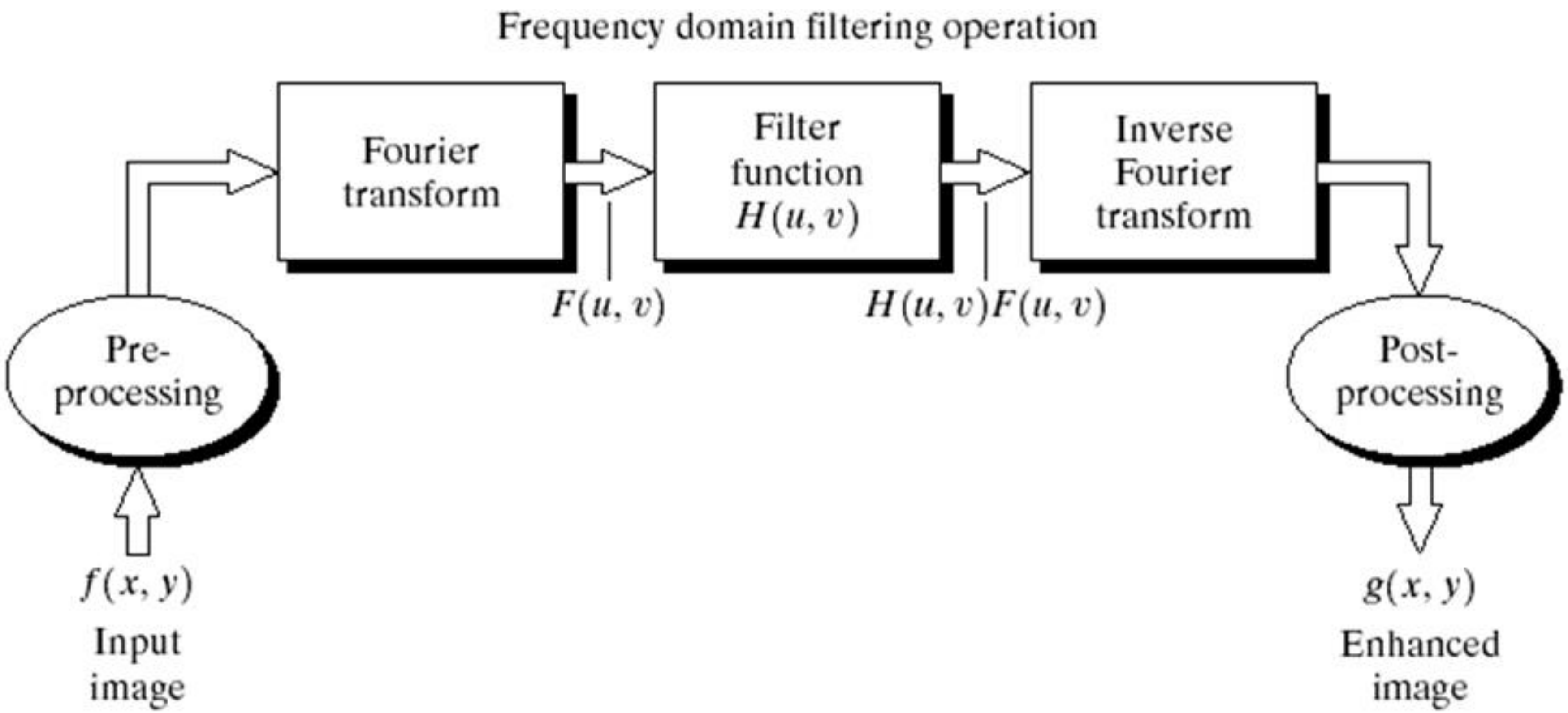
Property	Signal		Transform
superposition	$f_1(x) + f_2(x)$		$F_1(\omega) + F_2(\omega)$
shift	$f(x - x_0)$		$F(\omega)e^{-j\omega x_0}$
reversal	$f(-x)$		$F^*(\omega)$
convolution	$f(x) * h(x)$		$F(\omega)H(\omega)$
correlation	$f(x) \otimes h(x)$		$F(\omega)H^*(\omega)$
multiplication	$f(x)h(x)$		$F(\omega) * H(\omega)$
differentiation	$f'(x)$		$j\omega F(\omega)$
domain scaling	$f(ax)$		$1/aF(\omega/a)$
real images	$f(x) = f^*(x)$	$\Leftrightarrow$	$F(\omega) = F(-\omega)$
Parseval's Theorem	$\sum_x [f(x)]^2$	$=$	$\sum_\omega [F(\omega)]^2$

Tomado de: **Computer Vision: Algorithms and Applications.** R. Szeliski.

Filtraje en el Dominio de la Frecuencia

- La convolución es un proceso de filtraje.
- Sea $f(x, y)$ la imagen que se desea filtrar con el filtro $h(x, y)$.
- Se obtendrá la señal filtrada $g(x, y) = f * h$.
- El teorema de la convolución establece que la transformada de $g = f * h$ es igual al producto de las transformadas de f y h:
$$G(u, v) = \Im(f * h) = F(u, v).H(u, v)$$
  - Donde $F(u, v) = \Im(f(x, y))$ y H$(u, v) = \Im(h(x, y))$
- $\Im(.)$ es la Transformada Bidimensional de Fourier.

Pasos Básicos para el Filtraje en el Dominio de la Frecuencia



Tomado de: **Digital Image Processing**. R.C. Gonzalez y R. Woods.

Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro Pasa bajas Ideal

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & Si\ D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & Si\ D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- Filtro Pasa bajas Butterworth

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

- Filtro Pasa bajas Gaussiano

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro Pasa altas Ideal

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & Si\ D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & Si\ D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- Filtro Pasa altas Butterworth

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}}$$

- Filtro Pasa altas Gaussiano

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

Filtros en el Dominio de la Frecuencia

- Filtro Rechaza banda Ideal

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & Si\ D_0 - \dfrac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \dfrac{W}{2} \\ 1 & Otro\ Caso \end{cases}$$

- Filtro Rechaza banda Butterworth

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [\frac{DW}{D^2 - D_0^2}]^{2n}}$$

- Filtro Rechaza banda Gaussiano

$$H(u,v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2 - D_0^2}{DW}\right]^2}$$