PUCP

Sistemas dinámicos y control B

Tema 5: Control por realimentación de estados y estimadores de estado – Parte II

Docente: Juan Carlos Suárez Quispe, M.Sc.

6.3 Regulación y seguimiento

Diseño de un servosistema de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador

Se inserta un integrador en el camino directo entre el comparador de error y la planta, tal como se muestra en la FIGURA.

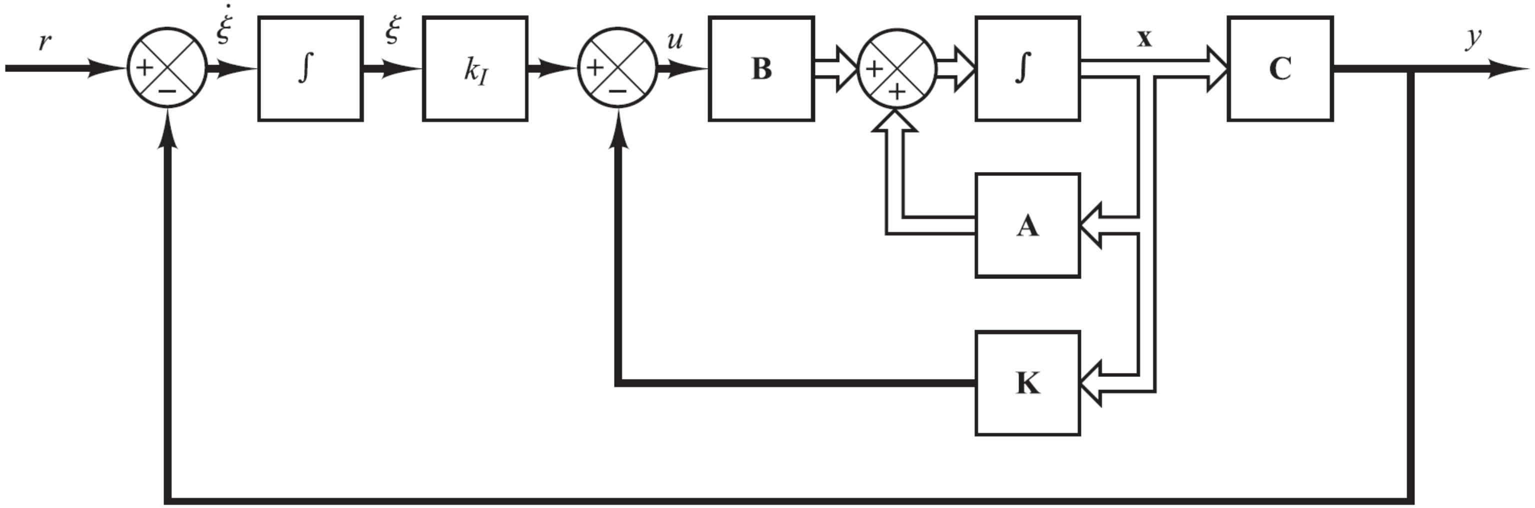

Figura: Esquema de control de una planta sin integrador [Ogata, 2010]. Tome en consideración que este gráfico no considera la parte componente Du de la ecuación de salida.

6.3 Regulación y seguimiento

Diseño de un servosistema de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador

Donde:

- y: Señal de salida (escalar).
- ξ: Salida del integrador (variable de estado del sistema, escalar).
- r: Señal de entrada de referencia (función escalón, escalar).
- A: Matriz de coeficientes constantes (n×n).
- B: Matriz de coeficientes constantes (n×1).
- C: Matriz de coeficientes constantes (1×n).

A partir del diagrama se obtiene:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$
$$u = -Kx + k\_I\ \xi$$
$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx$$

La función de transferencia de la planta se obtiene mediante:

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Se supone que $G_p(s)$ no tiene un cero en el origen.

Diseño de un servosistema de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador

Se define un nuevo vector de error e(t) de dimensión (n+1) mediante

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix}$$

Así, la ECUACIÓN se transforma en:

$$\dot{e}(t) = \hat{A}e + \hat{B}u_e$$

Donde:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\dot{e}(t) = \hat{A}e + \hat{B}u_e = \hat{A}e + \hat{B}\left(-\widehat{K}e\right)$$
$$\therefore \dot{e}(t) = (\hat{A} - \hat{B}\widehat{K})e$$

Donde:

$$\widehat{K} = [K \vdots -k_I]$$

Si los valores propios deseados de la matriz $\hat{A} - \hat{B}\widehat{K}$ se especifican como $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}$, entonces K y k_I pueden determinarse por asignación de polos, bajo la premisa que $\dot{e}(t) = \hat{A}e + \hat{B}u_e$ es de estado completamente controlable.

Ejercicio 1

Sea el sistema dinámico masa-resorte-amortiguador que se muestra en la Figura 1.

$$f - k \cdot x - b \cdot \dot{x} = m\ddot{x}$$

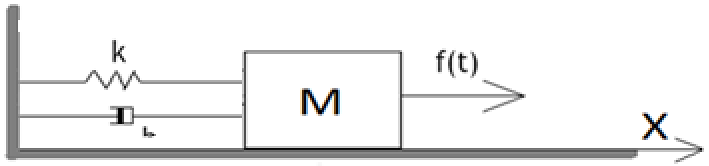

Figura 1: Sistema masa-resorte-amortiguador.

Donde:

- f: Fuerza externa, manipulable.
- k: Constante de elasticidad del resorte.
- b: Coeficiente de amortiguamiento.
- m: Masa del bloque.

m=0.2Kg, k=0.7N/m, b=0.5Kg/s

Diseñe un controlador por ubicación de polos utilizando el método de modo de que el sistema controlado posea una salida (x(t)) con sobreelongación máxima porcentual del 10% y un tiempo de asentamiento de 1s (según el criterio del 2%). Considere que las condiciones iniciales iguales a cero, y que la referencia de control es de tipo escalón unitario.

Ejercicio 1

Solución

Modelamiento del sistema dinámico: $f - kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

Sin embargo, con fines de generalización, se cambiará el nombre de la variable "f", a "u". Por lo que, la dinámica del sistema queda expresada de la siguiente forma:

$$u - kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Representación del sistema dinámico en el espacio de estados

- Entradas : u
- Salidas : x
- Variables de estado : $x, \dot{x}$
- Vector de estado : $X = [x, \dot{x}]^T$

Ejercicio 1

Solución

- Obtención de la ecuación de estado

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = f(x, \dot{x}, u, t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{-kx - b\dot{x}}{m} + \frac{u}{m} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}\mathrm{u}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- Obtención de la ecuación de salida

$$y = x = g(x, \dot{x}, u, t) = CX + Du = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + 0u$$

$$\therefore C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

Ejercicio 1

Solución

Diseño del controlador

La matriz de controlabilidad es:

$$M_c = [B \vdots AB] = \left[\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix}0 & 1\\-3.5 & -2.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}0 & 5\\5 & -12.5\end{bmatrix}$$

Al ser M_c una matriz de orden 2 si su determinante es diferente de cero, entonces su rango es 2. Esto se verifica por lo que el rango de M_c es igual a 2. Por lo tanto, el sistema es de estado completamente controlable.

Se calculan los polos deseados utilizando la ecuación característica de la forma estándar de un sistema de segundo orden:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

Ejercicio 1

Solución

Donde:

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} = 0.1 \rightarrow \zeta = 0.5912$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.5912\omega_n} = 1 \rightarrow \omega_n = 6.7664$$

Luego, la ecuación característica deseada es:

$$s^2 + 2\zeta w_n + w_n^2 = s^2 + 8s + 45.7844$$

Y, los polos deseados (polos de la ecuación característica deseada) son:

$$\mu_1 = -4 + 5.4575j$$
$$\mu_2 = -4 - 5.4575j$$

Como se verá más adelante, la dinámica del error (e(t)) es de tercer orden. Por lo tanto, la ecuación característica deseada debe tener tres polos. Entonces, se introduce el siguiente polo no dominante :

$$\mu_3 = -20$$

Ejercicio 1

Solución

Entonces, la nueva ecuación característica deseada es:

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3) = s^3 + 28s^2 + 205.7844s + 915.6873$$
$$\therefore \alpha_1 = 28, \alpha_2 = 205.7844, \alpha_3 = 915.6873$$

Por su parte, se plantea la ecuación de estado del error:

$$\dot{e}(t) = \left(\hat{A} - \hat{B}\widehat{K}\right)e$$

Donde:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3.5 & -2.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \widehat{K} = [K \,\vdots\, -k_I]$$

Ejercicio 1

Solución

Luego,

$$\phi(\hat{A}) = \hat{A}^n + \alpha_1 \hat{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\hat{A} + \alpha_n I = \hat{A}^3 + \alpha_1 \hat{A}^2 + \alpha_2 \hat{A} + \alpha_3 I$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3.5 & -2.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 + 28 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3.5 & -2.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + 205.7844 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3.5 & -2.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 915.6873 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \phi(\hat{A}) = \begin{bmatrix} 826.4373 & 138.5344 & 0 \\ -484.8703 & 480.1014 & 0 \\ -202.2844 & -25.5 & 915.6873 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\hat{K} = [0 \quad 0 \quad 1][B \vdots AB \vdots A^2B]^{-1}\phi(A) = [40.4569 \quad 5.1 \quad -183.1375] = [K \vdots -k_I]$$

$$\therefore K = [40.4569 \quad 5.1], k_I = 183.1375 \quad \ldots Respuesta$$

Si bien no se pide, se simulará el comportamiento de este sistema dinámico en Simulink. Se elabora el modelo mostrado en la Figura 2.

Ejercicio 1

Solución

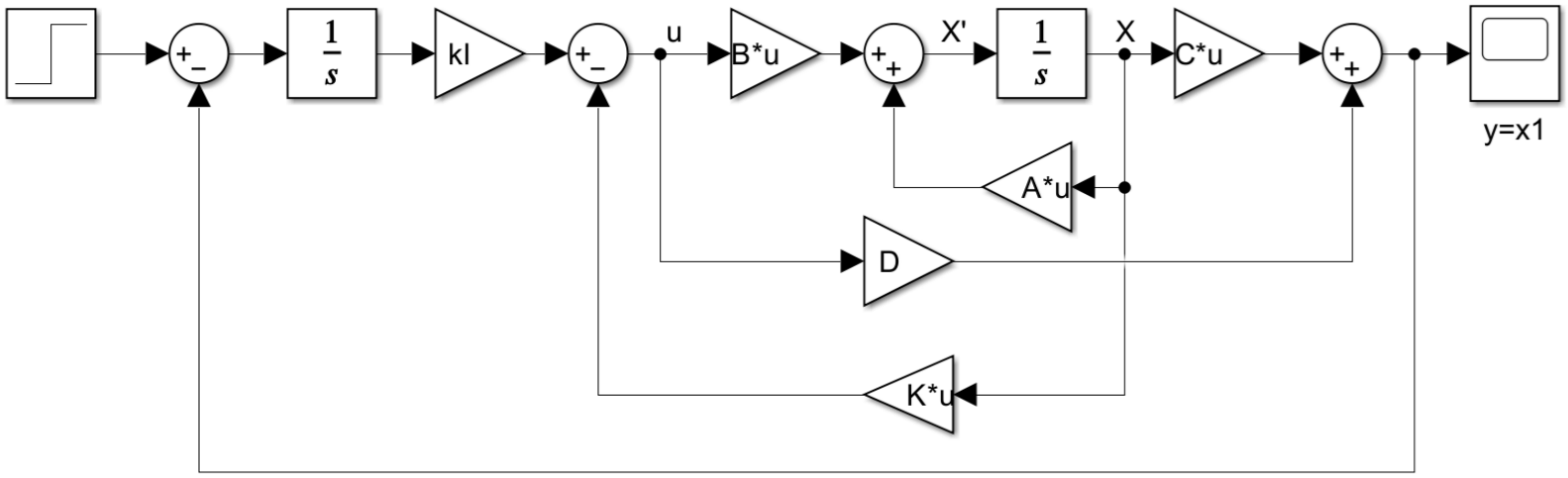

Figura: Esquema de control de una planta sin integrador.

Ejercicio 1

Solución

Este modelo va acompañado del siguiente código:

```
clc, close all, clear all;

% Datos de la planta
m=0.2;
k=0.7;
b=0.5;

% Espacio de estados
A=[   0    1
   -k/m -b/m];

B=[0
   1/m];

C=[1 0];
D=0;

Ahat=[ A zeros(size(A,1),1)
      -C zeros(size(C,1),1)];

Bhat=[B
      zeros(1,size(B,2))];

K=[40.4569 5.1];
kI=[183.1375];
```

Ejercicio 1

Solución

Asimismo, en la Figura 3 se muestra la evolución de la variable controlada a lo largo del tiempo.

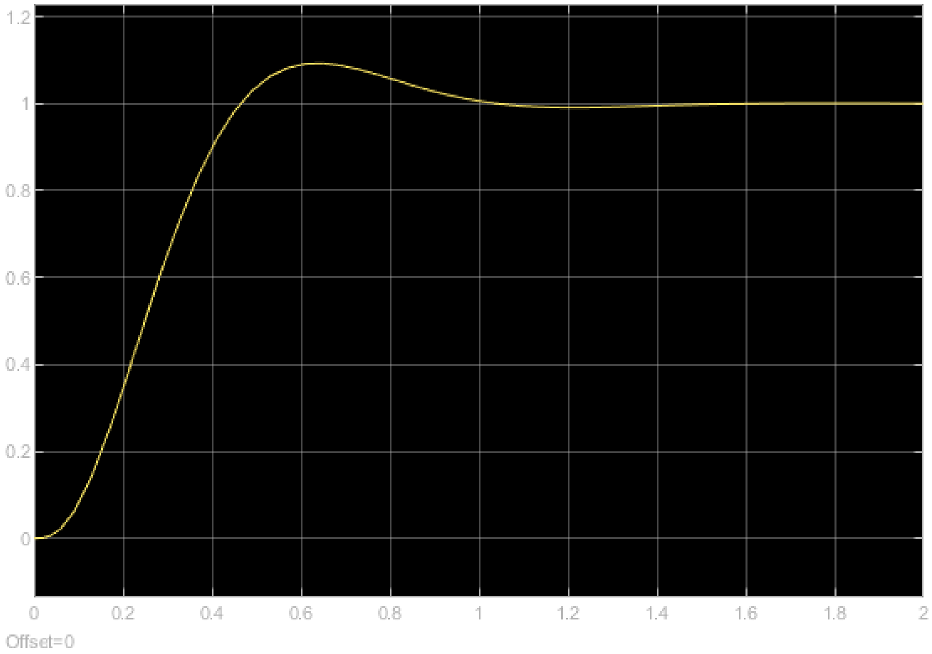

Figura 3: Evolución de la variable controlada a lo largo del tiempo.

6.3 Regulación y seguimiento

Estabilización por realimentación de estado

Se asumirá que el sistema a controlar se describe mediante un modelo de estado lineal y tiene una única entrada.

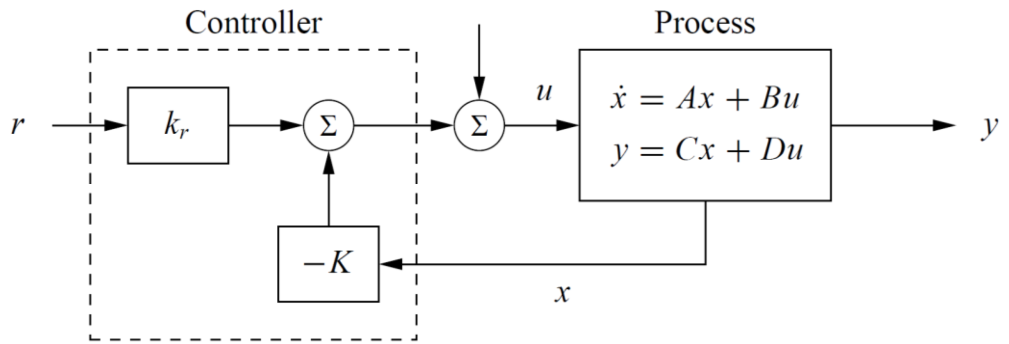

Figura 4: Sistema de control con realimentación de estado [Astrom, 2008].

En este sistema,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$
$$u = -Kx + k_r r$$

Entonces:

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx + k_r r)$$
$$\therefore \dot{x} = (A - BK)x + Bk_r r$$

Estabilización por realimentación de estado

Se determina la ganancia de realimentación K de modo que el sistema en lazo cerrado tenga el polinomio característico deseado.

$$\dot{x}_e = (A - BK)x_e + Bk_r r$$
$$\rightarrow 0 = (A - BK)x_e + Bk_r r$$
$$\rightarrow -Bk_r r = (A - BK)x_e$$
$$\therefore x_e = -(A - BK)^{-1}Bk_r r$$

Además,

$$y_e = Cx_e + Du_e$$

Entonces, k_r debería elegirse de modo de que $y_e = r$ (valor de salida deseado). Dado que k_r es escalar, considerando $D = 0$ (caso más común), se obtiene que:

$$x_e = C^{-1}y_e = C^{-1}r = -(A - BK)^{-1}Bk_r r$$
$$\rightarrow C^{-1} = -(A - BK)^{-1}Bk_r$$
$$\therefore k_r = -1/(C(A - BK)^{-1}B)$$

Ejercicio 2

Sea el sistema dinámico masa-resorte-amortiguador que se muestra en la Figura 4.

$$f - k \cdot x - b \cdot \dot{x} = m\ddot{x}$$

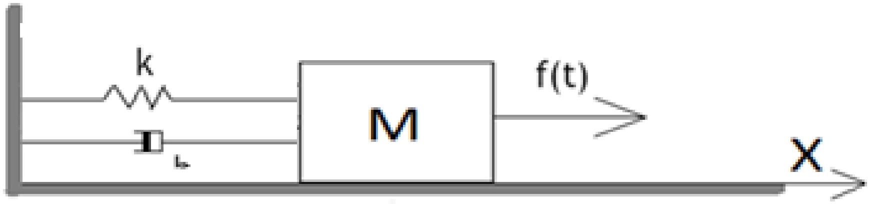

Figura 4: Sistema masa-resorte-amortiguador.

Donde:

- f: Fuerza externa, manipulable.
- k: Constante de elasticidad del resorte.
- b: Coeficiente de amortiguamiento.
- m: Masa del bloque.

$$m = 0.2Kg, k = \frac{0.7N}{m}, b = 0.5Kg/s$$

Diseñe un controlador por ubicación de polos utilizando el método de sustitución directa, de modo de que el sistema controlado posea una salida (x(t)) con sobreelongación máxima porcentual del 10% y un tiempo de asentamiento de 1s (según el criterio del 2%). Considere que las condiciones iniciales iguales a cero, y que la referencia de control es de tipo escalón unitario.

Ejercicio 2

Solución

$$f - kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Sin embargo, con fines de generalización, se cambiará el nombre de la variable "f", a “u”. Por lo que, la dinámica del sistema queda expresada de la siguiente forma:

$$u - kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Representación del sistema dinámico en el espacio de estados

- Entradas : u
- Salidas : x
- Variables de estado : $x, \dot{x}$
- Vector de estado : $X=[x, \dot{x}]^T$
- Obtención de la ecuación de estado

Ejercicio 2

Solución

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = f(x,\dot{x},u,t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dfrac{-kx - b\dot{x}}{m} + \dfrac{u}{m} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}\mathrm{u}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- Obtención de la ecuación de salida

$$y = x = g(x,\dot{x},u,t) = CX + Du = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + 0u$$

$$\therefore C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

Ejercicio 2

Solución

Diseño del controlador

La matriz de controlabilidad es:

$$M_c = [B \vdots AB] = \left[\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix}0 & 1\\-3.5 & -2.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}0 & 5\\5 & -12.5\end{bmatrix}$$

Al ser M_c una matriz de orden 2 si su determinante es diferente de cero, entonces su rango es 2. Esto se verifica por lo que el rango de M_c es igual a 2. Por lo tanto, el sistema es de estado completamente controlable.

Se calculan los polos deseados utilizando la ecuación característica de la forma estándar de un sistema de segundo orden:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

Donde:

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} = 0.1 \rightarrow \zeta = 0.5912$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.5912\omega_n} = 1 \rightarrow \omega_n = 6.7664$$

Ejercicio 2

Solución

Luego, la ecuación característica deseada es:

$$s^2 + 2\zeta w_n + w_n^2 = s^2 + 8s + 45.7844$$

Por su parte, se plantea aplicar un controlador por realimentación de estados, de ganancia K, de modo que:

$$K = [k_1 \quad k_2]$$

Entonces, la dinámica del sistema controlado puede ser expresada de la forma:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) = AX(t) + B\big(-K \cdot X(t)\big) = (A - BK)X(t)$$

La ecuación característica de este sistema está dada por el determinante de sI-(A-BK), donde I es una matriz identidad del mismo orden de A. Entonces:

$$\left| s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}[k_1 \quad k_2]\right)\right| = \left|\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5k_1 & 5k_2 \end{bmatrix}\right|$$
$$= \left|\begin{bmatrix} s & -1 \\ 3.5 + 5k_1 & s + 2.5 + 5k_2 \end{bmatrix}\right| = s(s + 2.5 + 5k_2) + (3.5 + 5k_1)$$
$$= s^2 + s(2.5 + 5k_2) + (3.5 + 5k_1)$$

Esta ecuación característica es del mismo orden que la ecuación característica deseada, por lo tanto, es posible calcular K igualando ambas ecuaciones características, de la siguiente forma:

$$s^2 + s(2.5 + 5k_2) + (3.5 + 5k_1) = s^2 + 8s + 45.7844$$
$$\therefore k_1 = 8.4569, k_2 = 1.1$$
$$K = [8.4569 \quad 1.1]$$

Nota: Si se conocen los polos deseados y estos se almacenan en un vector pd, se puede calcular K utilizando Matlab, como:

```
K=place(A,B,pd);
```

Ejercicio 2

Solución

Luego,

$$k_r = -1/(C(A - BK)^{-1}B) = 9.1569$$

Si bien no se pide, se simulará el comportamiento del sistema dinámico controlado utilizando Simulink. Se elabora el modelo mostrado en la Figura 5.

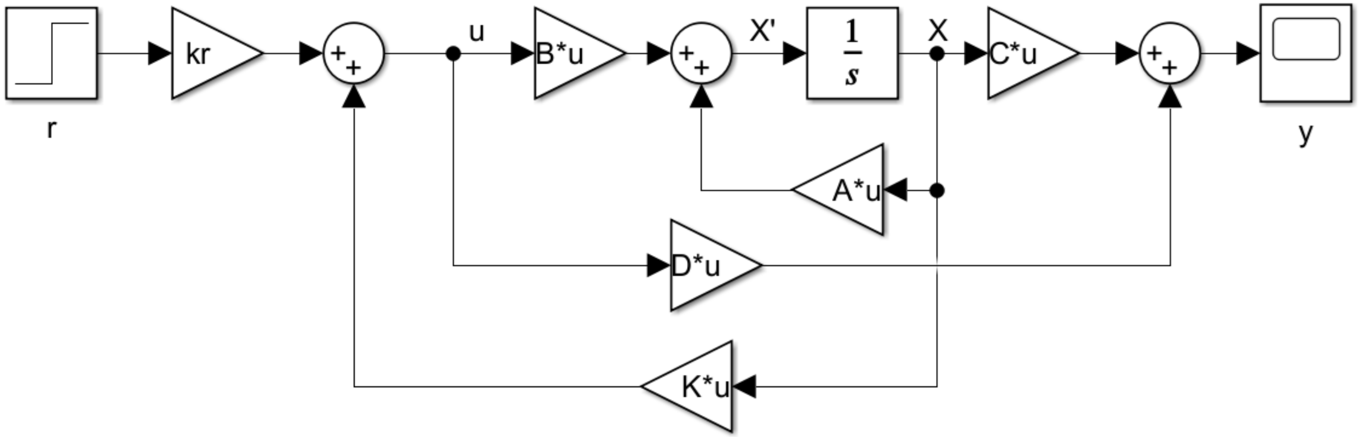

Figura 5: Sistema dinámico con realimentación de estado y referencia.

En la Figura 6 se muestra la evolución de la salida a lo largo del tiempo.

Ejercicio 2

Solución

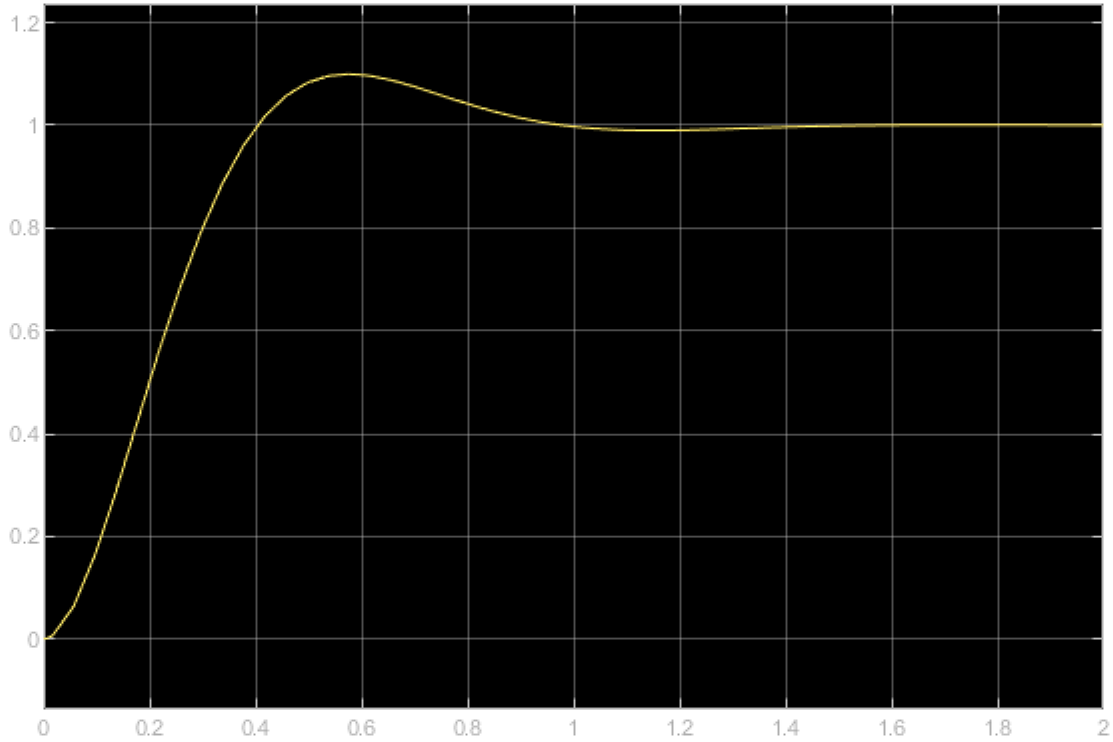

Figura 6: Evolución de la variable controlada a lo largo del tiempo.

6.4 Estimador de estados

Observadores de estado

- Estima las variables de estado basándose en las mediciones de las variables de salida y de control.
- Los observadores de estado pueden diseñarse si y sólo sise satisface la condición de observabilidad.

Sea el sistema dinámico definido por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

El error de estimación o error de observación es la diferencia entre la medida en la salida y la salida estimada:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - \tilde{y})$$
$$\tilde{y} = C\tilde{x}$$

- $\tilde{x}$: Vector de estado observado.
- $\tilde{y}$: Salida estimada.
- K_e: Matriz de ganancia del observador

Observadores de estado

Luego:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - \tilde{y})$$
$$= A\tilde{x} + Bu + K_e y - K_e\tilde{y}$$
$$= A\tilde{x} + Bu + K_e y - K_e C\tilde{x}$$
$$\therefore \frac{d\tilde{x}}{dt} = (A - K_e C)\tilde{x} + Bu + K_e y$$

6.4 Estimador de estados

Observadores de estado

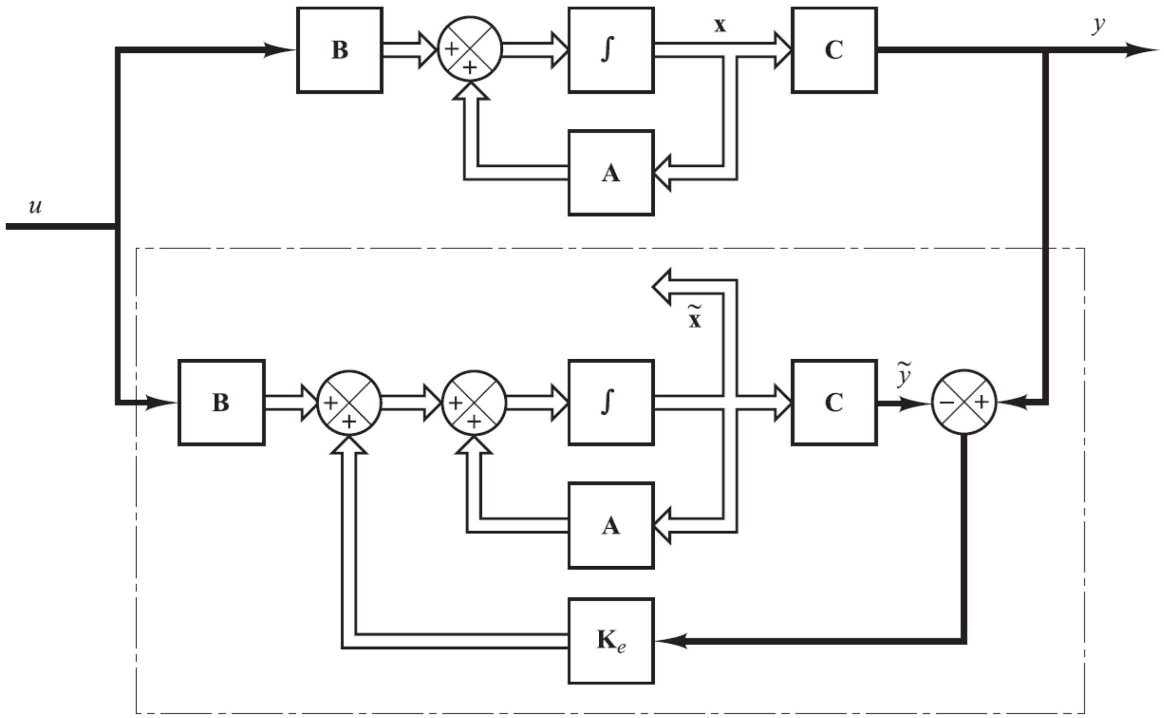

Figura 7: Diagrama de bloques de un sistema dinámico con observador de estado de orden completo [Ogata, 2010].

Observador de estado de orden completo

El orden del observador de estado que se analiza aquí es igual al del sistema.

$$
\begin{aligned}
&e = x - \tilde{x} \\
&\rightarrow \frac{de}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\tilde{x}}{dt} \\
&\rightarrow \frac{de}{dt} = Ax + Bu - \big((A - K_eC)\tilde{x} + Bu + K_ey\big) \\
&= Ax + Bu - \big((A - K_eC)\tilde{x} + Bu + K_eCx\big) \\
&= Ax - K_eCx - (A - K_eC)\tilde{x} + Bu - Bu \\
&= (A - K_eC)x - (A - K_eC)\tilde{x} \\
&= (A - K_eC)(x - \tilde{x}) \\
&\therefore \dot{e} = (A - K_eC)e
\end{aligned}
$$

Donde:

- e: vector de error, diferencia entre x y $\tilde{x}$.

6.4 Estimador de estados

Problema dual

Considérese el sistema definido mediante:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Al diseñar el observador de estado de orden completo, se resuelve el problema dual, es decir, se obtiene la solución del problema de asignación de polos para el sistema dual.

$$\dot{z} = A^{*}z + C^{*}v$$
$$w = B^{*}z$$

Suponiendo que la señal de control v es:

$$v = -Kz$$

Donde:

- A^{*}, transpuesta conjugada de la matriz A.
- C^{*} , transpuesta conjugada de la matriz C.
- B^{*}, transpuesta conjugada de la matriz B.

Se obtiene realizando; la conjugación compleja y la transposición de una matriz, en este caso de la matriz A.

6.4 Estimador de estados

Problema dual

Si $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ son los valores propios deseados de la matriz del observador de estado, entonces si se toman los mismos μ_i como valores propios deseados:

$$|sI - (A^* - C^*K)| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (\mu_n)$$

Considerando que los valores característicos de $A^* - C^*K$ y los de $A - K^*C$ son iguales, se tiene que:

$$|sI - (A^* - C^*K)| = |sI - (A - K^*C)|$$

Luego,

$$K_e = K^*$$

NOTA: Los valores proios deseados de la ecuación característica se deberían escoger de forma que el observador de estado responda al menos de dos a cinco veces más rápido que el sistema en lazo cerrado considerado.

Ejercicio 3

Diseñe un observador de estado de orden completo para el sistema dinámico mostrado en el Ejercicio 2.

Solución

Se define el sistema dual:

Se define el sistema dual, con las siguientes características:

- Entrada : w
- Salida : v
- Variables de estado : z_1, z_2
- Vector de estado : $z = [z_1, z_2]^T$

Entonces, la ecuación de estado, y ecuación de salida, para este sistema, están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{z} = A^* z + C^* v$$
$$v = B^* z$$

Por practicidad, se empelarán los términos A_d, B_d, C_d para referirse a A^*, C^*, B^*, respectivamente, luego:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix}, \rightarrow A_d = \begin{bmatrix} 0 & -3.5 \\ 1 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow C_d = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

Solución

Se obtiene la ecuación característica deseada a partir de los **requerimientos de diseño del observador**, estos son:

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} = 0.1 \rightarrow \zeta = 0.5912$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta \cdot w_n} = 0.1 \rightarrow w_n = 67.664$$

Luego, la ecuación característica deseada (sistema de segundo orden) está dada por la ecuación (10).

$$\begin{aligned} & s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 \\ & = s^2 + 80s + 4578.44 \quad \ldots (10) \end{aligned}$$

Los polos deseados (p_1 y p_2) son las raíces de la ecuación característica deseadas (10), entonces, el vector p que contiene a los polos deseados es:

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 + 54.5751i \\ -40 - 54.5751i \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

Solución

En este punto, es posible calcular el controlador del sistema dual, definido por la ganancia por realimentación de estado K_d, utilizando el comando "place" de Matlab, de la siguiente forma:

```
>> Kd=place(Ad,Bd,polos);
```

Se obtiene:

$$K_d = [77.5 \quad 4381.2]$$

$$\therefore K_e = K_d^* = \begin{bmatrix} 77.5 \\ 4381.2 \end{bmatrix}$$

Si bien no se pide, se realiza una simulación en Simulink tal como se muestra en la Figura 8.

Ejercicio 3

Solución

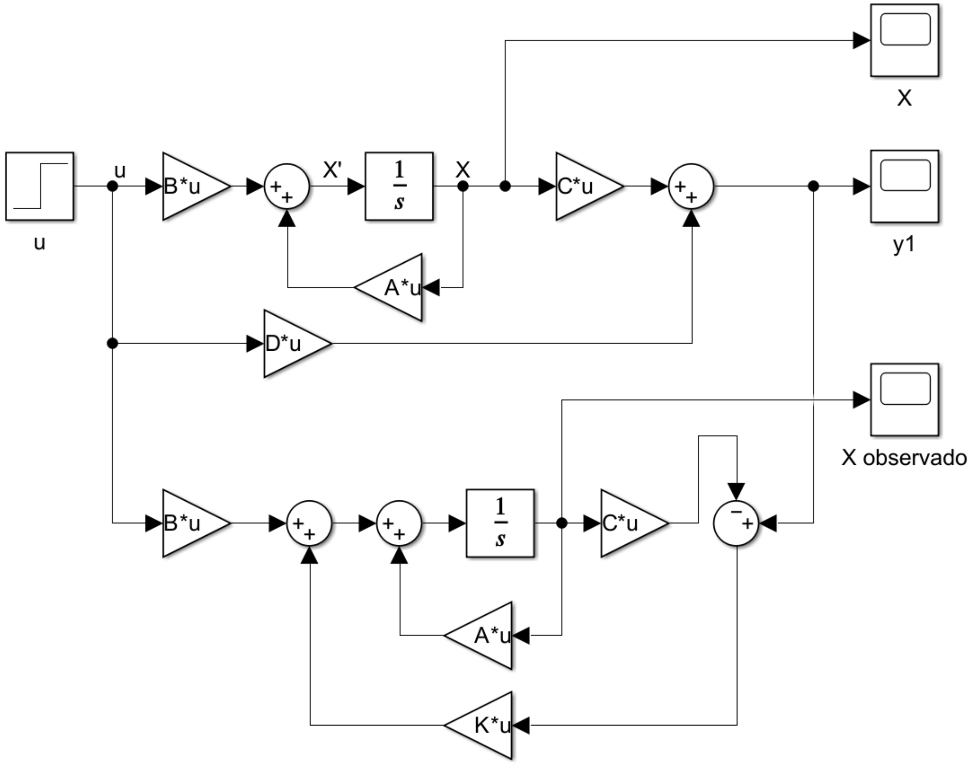

Figura 8: Sistema dinámico con observador de estado.

Referencias

- Ogata, K. (2010). Modern control engineering (5th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education. ISBN: 9780136156734.
- Astrom, K. J., & Murray, R. M. (2008). *Feedback systems: An introduction for scientists and engineers*. Princeton University Press.

Muchas gracias

PUCP