PUCP

Sistemas dinámicos y control B

Tema 7: Control y estimación óptima

Docente: Juan Carlos Suárez Quispe, M.Sc.

PUCP

7.2 Regulador cuadrático lineal

Dadas las ecuaciones del sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Se la matriz K del vector de control óptimo, de modo que:

$$u(t) = -Kx(t)$$

Se minimiza la función la función de coste:

$$J = \int_0^{\infty} (x^* Q x + u^* R u)\, dt$$

Donde:

- Q: matriz hermítica definida positiva (o semidefinida positiva) o simétrica real.
- R: Matriz hermítica definida positiva o simétrica real.

7.3 Diseño del regulador cuadrático lineal y la ecuación de Ricatti (ARE)

Se plantea:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Luego,

$$K = R^{-1}B^T P$$

7.2 Regulador cuadrático lineal

La regla de Bryson

Esta regla permite obtener valores para Q y R, de acuerdo con:

$$Q_{ii} = \frac{1}{\left(max(x_i)\right)^2}, i = 1, \dots, n_x$$

$$R_{jj} = \frac{1}{\left(max(u_j)\right)^2}, j = 1, \dots, n_u$$

Donde:

- $max(x_i)$: Desviación máxima aceptable para la variable de estado x_i.
- $max(u_j)$: Valor máximo aceptable para la entrada u_j.

Ejercicio 1

Sea el sistema dinámico masa-resorte-amortiguador que se muestra en la FIGURA.

$$f - kx - b \cdot \dot{x} = m\ddot{x}$$

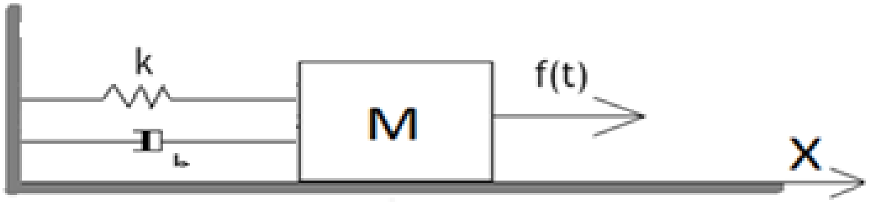

Fig. 1 Sistema masa-resorte-amortiguador.

- f: Fuerza externa, manipulable.
- k: Constante de elasticidad del resorte.
- b: Coeficiente de amortiguamiento.
- m: Masa del bloque.

$$m = 0.2Kg, k = 0.7N/m, b = 0.5Kg/s$$

Diseñe un controlador LQR de modo de que:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, R = 1$$

Ejercicio 1

Solución

Luego de realizar el modelamiento matemático, se puede obtener la siguiente ecuación de estado, y la ecuación salida.

- Entradas : u
- Salidas : x
- Variables de estado : $x, \dot{x}$
- Vector de estado : $X = [x, \dot{x}]^T$

Obtención de la ecuación de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = 0$$

Ejercicio 1

Solución

Se plantea la ecuación de Ricatti para calcular $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.5 & -2.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$100 - \frac{7p_{21}}{2} - 25p_{12}p_{21} - \frac{7p_{12}}{2} = 0$$

$$p_{11} - \frac{7p_{22}}{2} - 25 * p_{12} * p_{22} = 0$$

$$p_{11} - \frac{7p_{22}}{2} - 25 * p_{21} * p_{22} = 0$$

$$-25 * p_{22}^2 + p_{12} + p_{21} + 4 = 0$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 27.8705 & 1.8649 \\ 1.8649 & 0.556 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow K = R^{-1}B^T P = 1^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 27.8705 & 1.8649 \\ 1.8649 & 0.556 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.3245 & 2.7802 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$k_r = -\frac{1}{C(A - BK)^{-1}B} = 10.245$$

Ejercicio 2

Para el Ejercicio 1, calcule los valores de Q y R. Considere que: se desea una variación máxima para la posición del bloque, de 0.1m. Por su parte, se considera una desviación máxima para la rapidez del bloque de 0.5m/s. Y, se desea que la fuerza máxima aceptable sea de 1N.

Referencias

- Ogata, K. (2010). Modern control engineering (5th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education. ISBN: 9780136156734.

Muchas gracias

PUCP

PUCP