



UNIVERSIDADE DO MINHO
LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA

Investigação Operacional

André Santos - a106854 Daniel Parente - a107363
Pedro Ferreira - a107292

Ano Letivo 2024/2025

0. Valores a trabalhar

De acordo com os dados do enunciado, e tal como já tinha sido o caso no primeiro projeto, o valor de $xABCDE$ a trabalhar será 107363, o maior número de inscrição dos membros do grupo. Podemos obviamente concluir que: $x = 1$, $A = 0$, $B = 7$, $C = 3$, $D = 6$ e $E = 3$.

Vamos calcular o valor de k , sabendo que equivale ao resto da divisão de DE por 7. Ou seja, o número natural tal que $63 = x \cdot 7 + k$. Daqui tiramos que $63 = 9 \cdot 7 + 0$. Como $k = 0$, os vértices origem O e destino D são, pela tabela no enunciado, 1 e 4, respetivamente.

As capacidades dos outros vértices foram também calculadas. Essa informação encontra-se calculada a seguir:

Capacidade dos vértices

- Vértice 1: $+\infty$ (*exceção mencionada no enunciado*);
- Vértice 2: $10 \times (B + D + 1) = 10 \times (7 + 6 + 1) = 10 \times 14 = 140$;
- Vértice 3: $10 \times (C + 1) = 10 \times (3 + 1) = 10 \times 4 = 40$;
- Vértice 4: $+\infty$ (*exceção mencionada no enunciado*);
- Vértice 5: $10 \times (E + 1) = 10 \times (3 + 1) = 10 \times 4 = 40$;
- Vértice 6: $10 \times (D + E + 1) = 10 \times (6 + 3 + 1) = 10 \times 10 = 100$;

A qual se pode sumarizar na Tabela 1:

Vértice	Capacidade
1	$+\infty$
2	140
3	40
4	$+\infty$
5	40
6	100

Tabela 1: Capacidade dos vértices.

Com essa informação disponível, o grafo a usar para o problema está representado a seguir, onde O e D são os vértices *origem* e *destino*, respetivamente, e o número por cima de cada vértice representa a sua capacidade:

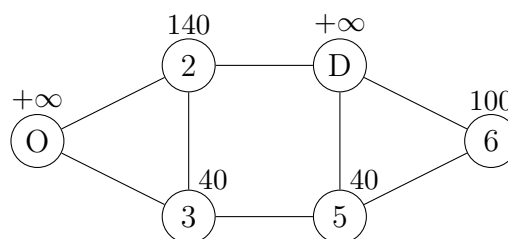


Figura 1: Grafo representativo da rede de fluxos

1. Formulação do Problema

1.1 Descrição do problema

O problema apresentado neste trabalho prático traduz-se num problema de otimização de fluxos em redes, onde se pretende determinar o fluxo máximo que pode ser transportado de um vértice de origem (aqui denominado O), para um vértice de destino (D), respeitando as restrições impostas pelas capacidades dos vértices intermediários.

Ao contrário do tradicional problema de fluxo máximo em que as restrições são normalmente colocadas sobre as arestas, aqui o foco recai sobre as quantidades internas dos vértices, que representam limites na quantidade de fluxo que pode passar por cada um.

1.2 Objetivo

O objetivo central deste problema é determinar o valor máximo de fluxo que pode ser enviado do vértice origem O para o vértice destino D , sem exceder as capacidades de processamento dos vértices intermediários (vértices 2, 3, 5 e 6). Para isso, é necessário encontrar a melhor forma de distribuir o fluxo ao longo da rede de forma eficiente, utilizando os vários caminhos disponíveis, enquanto se respeitam todas as restrições impostas.

1.3 Composição da rede

A rede é, assim, composta por:

- Vértices: Representam pontos de decisão ou nós de um sistema de fluxo.
 - O vértice O é o ponto de origem do fluxo
 - O vértice D é o ponto de destino do fluxo
 - Os vértices 2,3,5 e 6 são vértices intermediários com capacidades limitadas.
- Arestas: Representam as conexões entre os vértices. Cada aresta tem uma capacidade virtualmente infinita. São também bidirecionais.

Capacidade dos vértices:

- Os vértices 2, 3, 5 e 6 têm capacidades definidas:
 - Vértice 2: Capacidade de 140 unidades de fluxo;
 - Vértice 3: Capacidade de 40 unidades de fluxo;
 - Vértice 5: Capacidade de 40 unidades de fluxo;
 - Vértice 6: Capacidade de 100 unidades de fluxo.
- Os vértices 1 e 4 (O e D , respetivamente) têm capacidades infinitas.

1.4 Relação com um sistema real

Este tipo de problema é particularmente relevante em contextos reais onde o congestionamento ou a capacidade de processamento num ponto específico da rede (e não do caminho) impõe o verdadeiro limite ao fluxo total - por exemplo, em redes logísticas, redes de dados, ou sistemas de transportes urbanos.

1.5 Explicação dos valores das capacidades

Os valores das capacidades dos vértices foram definidos com base no maior número de inscrição nos membros do grupo - neste caso, $xABCDE = 107363$. A correspondência entre os dígitos do número de inscrição e os parâmetros das fórmulas é a seguinte:

- $x = 1$
- $A = 0$
- $B = 7$
- $C = 3$
- $D = 6$
- $E = 3$

As capacidades dos vértices intermediários foram calculados com base nas informações especificadas no enunciado. Estas foram:

- Vértice 2: $10 \times (B + D + 1) = 10 \times (7 + 6 + 1) = 140$
- Vértice 3: $10 \times (C + 1) = 10 \times (3 + 1) = 40$
- Vértice 5: $10 \times (E + 1) = 10 \times (3 + 1) = 40$
- Vértice 6: $10 \times (D + E + 1) = 10 \times (6 + 3 + 1) = 100$

Já os vértices 0 (1) e D (4) foram definidos como tendo capacidade infinita, pois representam os extremos da rede.

1.6 Explicação dos valores dos consumos

Apesar de o enunciado não referir diretamente consumos em termos clássicos (como perdas ou custos por vértice), podemos interpretar este tópico em dois sentidos complementares:

1. Consumo da capacidade dos vértices: Cada vértice com capacidade limitada "consome" parte do fluxo à medida que este o atravessa. Assim, o consumo corresponde ao fluxo que efetivamente passa por esse vértice, o qual nunca pode ultrapassar o limite máximo atribuído. Por exemplo:
 - Se o vértice 2 tem capacidade 140, e o fluxo que o atravessa for 120, então o consumo é de 120, e ainda há margem para mais 20 unidades de fluxo.
 - Caso o fluxo seja superior a 140, então esse vértice torna-se um "gargalo", limitando a passagem.
2. Interpretação do fluxo como consumo de recursos: Em problemas reais (logística, comunicações, etc.), o fluxo pode representar bens, energia ou dados. O seu trajeto pela rede representa o consumo de recursos - por exemplo, tempo de processamento, largura de banda, ou energia. Assim, as capacidades funcionam como restrições ao consumo máximo que cada vértice pode suportar.

Portanto, neste modelo, o termo "consumo" pode ser entendido como a utilização da capacidade disponível em cada vértice. O modelo assume que não há perdas de fluxo (rede conservativa), ou seja, o que entra num vértice (menos o que sai) corresponde exatamente ao fluxo que ali passa, excetuando-se origem e destino.

1.7 Apresentação da coerência global do modelo

O modelo proposto apresenta uma estrutura coerente e logicamente bem fundamentada, com os seguintes pontos fortes:

- Personalização e variabilidade: O uso de um número de inscrição como base para determinar parâmetros garante que cada grupo trabalhe com um caso único, reduzindo a probabilidade de duplicações.
- Consistência matemática: As fórmulas utilizadas para calcular as capacidades são simples, mas eficazes, garantindo valores realistas que não são nem demasiado elevados (o que tornaria o problema trivial), nem demasiado baixos (o que poderia torná-lo insolúvel ou desproporcional).
- Topologia da rede bem definida: A estrutura do grafo permite múltiplos caminhos do vértice de origem para o de destino, o que possibilita o estudo de como o fluxo se redistribui na presença de restrições. A inclusão de ciclos ou ligações cruzadas (como de $3 \rightarrow 5$ e $D \rightarrow 5$) torna o problema mais interessante do ponto de vista algorítmico.

Em resumo, o modelo é coerente, aplicável, suficientemente desafiante e adequado para ilustrar técnicas avançadas de otimização de redes.

2. Formulação do modelo

Neste trabalho, será efetuada a construção de dois modelos distintos para o problema de fluxo máximo apresentado: um utilizando o Relax4, e outro recorrendo ao LP Solver. A escolha de desenvolver ambos os modelos prende-se com razões de validação e complementaridade: o modelo implementado no Relax4 é o principal, dado que este solver é otimizado especificamente para problemas de fluxo em redes e oferece elevada eficiência computacional.

No entanto, o LP Solver será utilizado como ferramenta auxiliar para validar a correção estrutural e lógica do modelo, já que permite uma formulação explícita do problema em termos de programação linear, facilitando a leitura e análise detalhada das restrições e variáveis. Esta abordagem dual garante maior robustez à solução final, promovendo simultaneamente a compreensão teórica e prática da modelação do problema.

2.1 Modelo no solver Relax4

Para utilizar o Relax-4 num problema de fluxo máximo com capacidade nos vértices, aplica-se a seguinte conversão clássica:

- Divisão de vértices: Cada vértice original v é dividido em dois nós, v_{in} e v_{out} , ligados por um arco com capacidade:

$$u_{v_{in},v_{out}} = \text{capacidade}(v)$$

- Arestas originais: Se existia uma aresta original $u \rightarrow v$, cria-se o arco $u_{out} \rightarrow v_{in}$ com capacidade infinita (por exemplo, 10^6) e custo zero.

- Ofertas/procuras: Todos os nós têm balanço 0 (fluxo circula em ciclos fechados).

$$(\text{arco -1}) \quad F^*, \quad \text{OPTIMAL COST} = -F^*$$

E, assim, o grafo transformado seria assim:

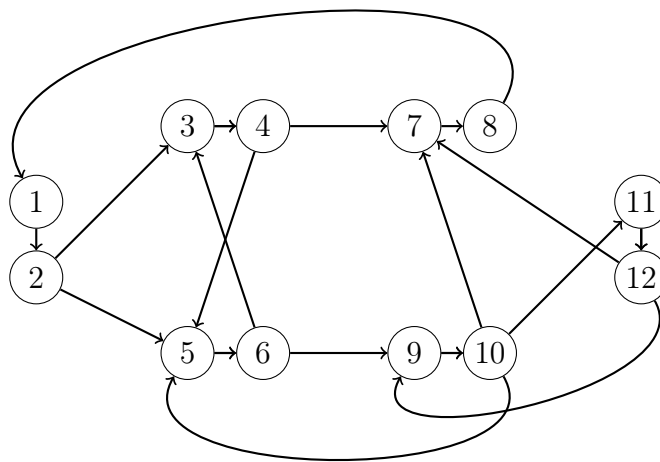


Figura 2: Grafo transformado

2.2 Modelo no LPSolver

Para a implementação no LP Solver, o problema é formulado como um modelo de programação linear (PL), com o objetivo de maximizar o fluxo total de origem para destino, sujeito às restrições de capacidade e de conservação de fluxo.

Neste caso, não é necessário dividir os vértices, uma vez que a linguagem do LP Solver permite introduzir explicitamente restrições internas em vértices, o que facilita a modelação direta com base na estrutura original do grafo.

Como o foco do trabalho não recai sobre a justificacão deste modelo, a formulaco deste não será explicada em grande detalhe, mas inclui:

2.2.1 Variáveis de decisão e parâmetros

- x_{ij} : representam o fluxo que passa pelo arco (i, j)

2.2.2 Restrições

- Restrição de conservação do fluxo: Para todos os vértices intermédios $v \in \{2, 3, 5, 6\}$, impõe-se a igualdade entre o total de fluxo que entra e o total de fluxo que sai:

$$\sum_{j \in V} x_{jv} = \sum_{j \in V} x_{vj} \quad \forall v \in V \setminus \{O, D\}$$

De forma expandida, para os vértices do grafo:

$$\begin{aligned} x_{O2} + x_{32} - x_{23} - x_{2D} &= 0 && \text{(vértice 2)} \\ x_{O3} + x_{23} + x_{53} - x_{32} - x_{35} &= 0 && \text{(vértice 3)} \\ x_{35} + x_{65} - x_{53} - x_{56} - x_{5D} &= 0 && \text{(vértice 5)} \\ x_{56} - x_{6D} &= 0 && \text{(vértice 6)} \\ x_{O2} + x_{O3} - x_{2D} - x_{5D} - x_{6D} &= 0; && \text{(fluxo geral)} \end{aligned}$$

- Restrição da capacidade dos vértices:

$$\sum_{i:(i,v) \in A} x_{iv} \leq c_v$$

em que c_v representa a capacidade do vértice v .

Para os vértices do grafo:

$$\begin{aligned} x_{02} + x_{32} &\leq 140 \\ x_{03} + x_{23} + x_{53} &\leq 40 \\ x_{56} &\leq 100 \end{aligned}$$

2.2.3 Função objetivo

Maximizar o somatório dos fluxos que saem do vértice de origem (O), ou que chegam ao destino (D).

- max: $\sum_{j:(j,D) \in A} x_{jD}$, com $A = \{2, 5, 6\}$

3. Ficheiro de *input*

Como foram elaborados dois modelos, a testar em plataformas diferentes, foram naturalmente criados dois ficheiros de *input* diferentes, os quais se apresentam a seguir.

3.1 Relax4

```
12
18
1  2    0 1000000
3  4    0    140
5  6    0    40
7  8    0 1000000
9 10    0    40
11 12   0    100
2  3    0 1000000
2  5    0 1000000
4  7    0 1000000
4  5    0 1000000
6  3    0 1000000
6  9    0 1000000
10 5    0 1000000
10 7    0 1000000
12 7    0 1000000
10 11   0 1000000
12 9    0 1000000
8  1   -1 1000000
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
```


3.2 LPSolver

```
max : x5D + x2D + x6D;

x02 + x32 - x23 - x2D = 0;
x03 + x23 + x53 - x32 - x35 = 0;
x35 + x65 - x53 - x56 - x5D = 0;
x56 - x6D = 0;
x02 + x03 - x2D - x5D - x6D = 0;

x02 >= 0; x2D >= 0;
x03 >= 0; x42 >= 0;
x23 >= 0; x5D >= 0;
x32 >= 0; x56 >= 0;
x35 >= 0; x65 >= 0;
x53 >= 0; x6D >= 0;

x02 + x32 <= 140;
x03 + x23 + x53 <=40;
x56 <= 100;
```

4. Ficheiro de *output*

4.1 Relax4

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 12, NUMBER OF ARCS = 18
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
  1 2 180.
  3 4 140.
  5 6 40.
  7 8 180.
  9 10 40.
  2 3 140.
  2 5 40.
  4 7 140.
  6 9 40.
 10 7 40.
  8 1 180.
OPTIMAL COST = -180.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 11
NUMBER OF ITERATIONS = 8
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 2
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 1
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 2
*****
```

4.2 LPSolver

```
Value of objective function: 180.00000000
```

```
Actual values of the variables:
```

x5D	40
x2D	140
x6D	0
x02	140
x32	0
x23	0
x03	40
x53	0
x35	40
x65	0
x56	0
x42	0

5. Interpretação dos resultados obtidos

O resultado obtido pelos dois modelos implementados (Relax4 e LP Solver) indica que o fluxo máximo possível entre o vértice de origem $O = 1$ e o vértice de destino $D = 4$ é de 180 unidades. Esta conclusão é suportada tanto pelo custo ótimo devolvido pelo Relax4 (com valor -180 , indicando fluxo de 180 unidades), como pelo valor da função objetivo do LP Solver (180).

Ao analisar os fluxos individuais pelas arestas (conforme apresentado no output, na secção 4.), podemos decompor o fluxo ótimo da seguinte forma:

- Caminho $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$: Neste caminho passam 140 unidades de fluxo, que correspondem exatamente à capacidade do vértice 2. Este fluxo segue diretamente da origem para o destino, com um único vértice intermédio.
- Caminho $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4$: Este caminho transporta as restantes 40 unidades de fluxo, explorando o outro ramo da rede. O vértice 3 está limitado a 40 unidades, que são todas utilizadas. O fluxo passa depois por 5 (também com capacidade de 40), e segue para o destino final.

Deste modo, o fluxo total de 180 unidades é obtido pela soma dos dois caminhos anteriores:

$$140 \text{ (via 2)} + 40 \text{ (via 3 e 5)} = 180$$

Este resultado confirma que:

- Os vértices 2, 3 e 5 estão a operar no seu limite de capacidade (que segue de acordo com as restrições de capacidade dos vértices, estabelecidas anteriormente);
- O vértice 6 não é utilizado na solução ótima, uma vez que os caminhos que o incluem não são vantajosos sob as restrições das capacidades disponíveis;
- A rede original permite redundância de caminhos, o que é essencial para atingir o fluxo máximo respeitando todas as limitações.

Graficamente, se anotarmos o fluxo sobre o grafo G , temos:

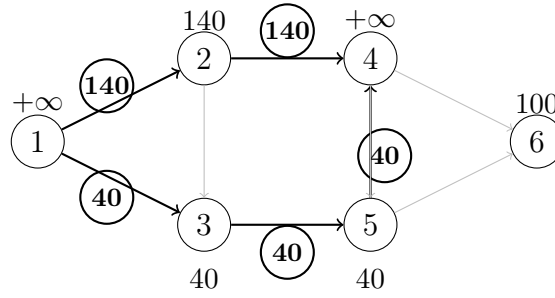


Figura 3: Grafo original com fluxo ótimo anotado

Esta representação gráfica e quantitativa confirma a consistência do modelo implementado e a coerência dos resultados fornecidos pelos dois métodos computacionais utilizados. O grafo original é respeitado na sua estrutura e restrições, e a solução obtida é admissível, exata e ótima para o problema proposto.

6. Identificação do corte mínimo

O conjunto de vértices $\{2, 3\}$ (na notação original, antes do *node-splitting*) separa completamente a origem O do destino D e tem capacidade total

$$c(2) + c(3) = 140 + 40 = 180$$

- Se cortar o vértice 2 (cap 140) toda a rota direta $O \rightarrow 2 \rightarrow D$ fica bloqueada.
- Se cortar o vértice 3 (cap 40) toda a rota alternativa $O \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow D$ fica igualmente bloqueada.
- Qualquer outro corte que isole O de D exige pelo menos esses dois vértices ou soma uma capacidade maior (ex.: incluir 5 ou 6 acrescentaria mais 40 ou 100).

No grafo transformado, o corte mínimo corresponde aos dois arcos internos:

$$3 \rightarrow 4 \text{ (cap 140)}$$

$$5 \rightarrow 6 \text{ (cap 40)}$$

A soma $140 + 40 = 180$ coincide com:

- o valor do fluxo máximo devolvido pelo Relax4, e
- o custo ótimo -180 (valor absoluto) no modelo com o arco de custo -1.

Portanto, $\{2, 3\}$ é a identificação do corte mínimo da rede.

7. Validação do modelo

Validar o modelo foi uma parte essencial do trabalho, para garantir que tudo estava bem estruturado e que os resultados obtidos faziam realmente sentido. Ao longo do processo, foram aplicadas várias formas de verificação que nos deram confiança na correção do que foi desenvolvido.

Começamos por rever manualmente os valores das capacidades dos vértices, para ter a certeza de que estavam de acordo com o número de inscrição escolhido. Confirmámos que todos os cálculos estavam corretos e que os valores obtidos foram bem aplicados nas restrições do modelo.

Depois, verificamos a transformação do grafo original para o formato necessário ao Relax4, seguindo a abordagem necessária para acomodar as características da plataforma. Tivemos o cuidado de rever cada ligação para garantir que a estrutura da rede original era mantida e que só os arcos internos é que impunham limites ao fluxo.

Para garantir ainda mais robustez, tal como foi explicado, implementámos o modelo também no LP Solver, formulando o problema como um modelo de programação linear. Esta abordagem alternativa permitiu-nos comparar os dois resultados e confirmar que ambos os modelos — apesar de estarem escritos de formas diferentes — deram exatamente o mesmo valor de fluxo máximo: 180 unidades. Esta coincidência não só validou a lógica da modelação como também confirmou que os ficheiros de input estavam bem construídos.

No final, ao representar o fluxo ótimo sobre o grafo original, pudemos verificar visualmente que o modelo respeita as capacidades dos vértices e conserva corretamente o fluxo. Com isto, ficámos confiantes de que a solução obtida é válida, eficiente e está de acordo com o problema proposto. Torna-se óbvio que a solução respeita todas as regras do modelo de fluxos em redes com restrições nos vértices, mantendo a coerência com a topologia da rede original e maximizando o fluxo de forma eficiente. Este processo iterativo de validação confere confiança à robustez da solução apresentada.