Лабораторная работа №6

Модель эпидемии ‘SIR’

Парфенова Елизавета Евгеньевна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Изучить модель эпидемии SIR и пострпоить графики изменения особей в группах в различных случаях на Julia и OpenModelica

2 Задание

Мой вариант - вариант №8.

Задача. Вариант №8

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 14000$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 114$, а число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 14$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1) $I(t) \leq I^*$
2) $I(t) > I^*$

3 Теоретическое введение

Модель SIR (модель эпидемии) является одной из простейших компартментарных моделей, и многие модели являются производными от этой базовой формы. Модель состоит из трех отсеков:

- S: количество s незаметных особей. Когда восприимчивый и заразный индивидуум вступают в “инфекционный контакт”, восприимчивый индивидуум заражается болезнью и переходит в инфекционный компартмент.
- I: количество i неинфекционных особей. Это лица, которые были инфицированы и способны заразить восприимчивых лиц.
- R для количества r инфицированных (и невосприимчивых) или умерших людей. Это люди, которые были инфицированы и либо выздоровели от болезни и попали в удаленный компартмент, либо умерли. Предполагается, что число смертей незначительно по отношению к общей численности населения. Этот компартмент также может называться “r защищенный” или “r устойчивый”.

Эта модель является достаточно прогностической для инфекционных заболеваний, которые передаются от человека к человеку и при выздоровлении которых возникает стойкая резистентность, таких как корь, свинка и краснуха.

Моделирование пространственной модели SIR. Каждая клетка может заразить своих восьми ближайших соседей. Эти переменные (S, I и R) представляют количество людей в каждом компартменте в определенный момент времени. Чтобы показать, что количество восприимчивых, инфекционных и удаленных лиц может меняться с течением времени (даже если общая численность популяции остается постоянной), мы делаем точные цифры функцией от t (времени): $S(t), I(t), R(t)$. Для конкретного заболевания в конкретной популяции эти функции могут быть разработаны для прогнозирования возможных вспышек и взятия их под контроль. [1]

Модель SIR в таком случае представляет собой нелинейную систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику распространения заболевания в популяции:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \frac{-\beta IS}{N} \\ \dfrac{dI}{dt} = -\frac{\beta IS}{N} - \gamma I \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

Здесь $S(t)$ — численность восприимчивых индивидов в момент времени t; $I(t)$ — численность инфицированных индивидов в момент времени t; $R(t)$ — численность переболевших индивидов в момент времени t; N — численность популяции; β — коэффициент интенсивности контактов индивидов с последующим инфицированием; γ — коэффициент интенсивности перехода инфицированных индивидов в группу переболевших [2].

4 Выполнение лабораторной работы

Математическая модель

Как уже было сказано, мы будем рассматривать простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы, о которых уже было сказано в теоретическом введении. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей. Таким образом, скорость изменения числа *S(t)* меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & \text{,если } I(t) > I^* \\ 0 & \text{,если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & \text{, если } I(t) > I^* \\ -\beta I & \text{, если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β, - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия.

Построение графиков при $I(t) \leq I^*$

Первым рассмотрим случай $I(t) \leq I^*$. В этом случае мы используем такую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = 0 \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = -\beta I \\ \\ \dfrac{dR}{dt} = \beta I \end{cases}$$

Так как изначально S0, которое мы используем в дальнейших вычислениях, не дано конкретно, я вычислила его по приведенной в задаче формуле $S(0) = N - I(0) - R(0)$. В итоге $S(0) = 13872$

Код на Julia:

```
using Plots
using DifferentialEquations
```

```
#Начальные значения для каждой из групп
#N = 14000
I0 = 114.0
R0 = 14.0
S0 = 13872.0

#Коэффициенты заболеваемости и выздоровления
a = 0.7
b = 0.15

#Функция, определяющая систему дифф.уравнений
function one_ep(du, u, p, t)
    du[1] = 0
    du[2] = -b*u[2]
    du[3] = b*u[2]
end

#Промежуток времени и начальные условия
time = (0.0, 200.0)
start = [S0,I0,R0]

#Постановка проблемы и решение уранвения
equat = ODEProblem(one_ep, start, time)
solv = solve(equat, dtmax=0.01)

S = [u[1] for u in solv.u]
I = [u[2] for u in solv.u]
R = [u[3] for u in solv.u]
```

```
#Построение графиков и сохранение изображения
plot1 = plot(dpi = 300, legend = :topright, bg =:white, title = "График изменения чис
plot!(plot1, solv.t, S, label="Группа S", color =:blue)
plot!(plot1, solv.t, I, label="Группа I", color =:red)
plot!(plot1, solv.t, R, label="Группа R", color =:green)

savefig(plot1, "lab06_1.png")
```

В результате работы кода, было сгенерировано такое изображение, которое отображает графики изменения числа особей трех групп в нашем случае (рис. 4.1).

Рис. 4.1: Графики изменения числа особей трех групп при $I(t) \leq I^*$ на Julia

Далее я написала модель на OpenModelica для этого же случая. Получившийся код:

```
model one_ep

parameter Real I0 = 114.0;
parameter Real R0 = 14.0;
```

```
parameter Real S0 = 13872.0;

parameter Real a = 0.7;
parameter Real b = 0.15;

Real s (start=S0);
Real i (start=I0);
Real r (start=R0);

equation

der(s) = 0;
der(i) = -b*i;
der(r) = b*i;

end one_ep;
```

В результате были смоделированы графики, отображенные на рисунке (рис. 4.2):

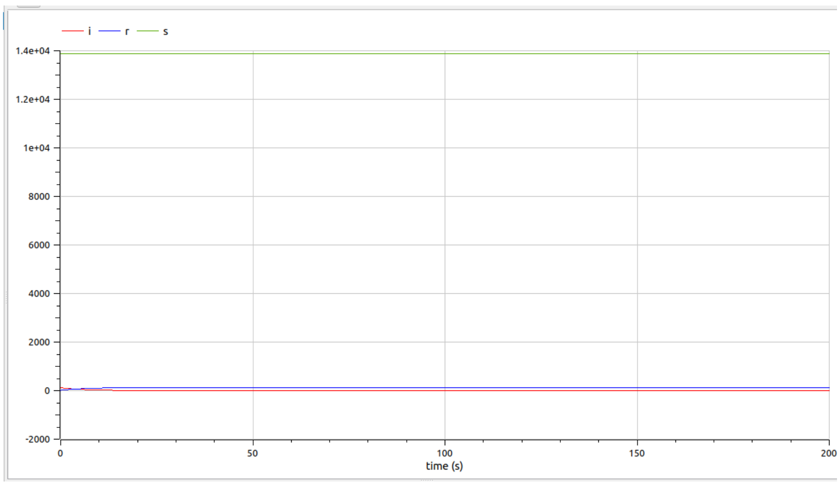

Рис. 4.2: Графики изменения числа особей трех групп при $I(t) \leq I^*$ на OpenModelica

Построение графиков при $I(t) > I^*$

Далее рассмотрим случай $I(t) > I^*$. Здесь все параметры остаются прежними, меняется только математическая модель, то есть система дифференциальных уравнений выглядит немного по-другому:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha S \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha S - \beta I \\ \\ \dfrac{dR}{dt} = \beta I \end{cases}$$

Код для данной модели на Julia:

```
using Plots
using DifferentialEquations

#Начальные значения для каждой из групп
#N = 14000
I0 = 114.0
R0 = 14.0
S0 = 13872.0

#Коэффициенты заболеваемости и выздоровления
a = 0.7
b = 0.15

#Функция, определяющая систему дифф.уравнений
function two_ep(du, u, p, t)
    du[1] = -a*u[1]
    du[2] = a*u[1]-b*u[2]
```

```
    du[3] = b*u[2]
end

#Промежуток времени и начальные условия
time = (0.0, 200.0)
start = [S0,I0,R0]

#Постановка проблемы и решение уранвения
equat = ODEProblem(two_ep, start, time)
solv = solve(equat, dtmax=0.01)

S = [u[1] for u in solv.u]
I = [u[2] for u in solv.u]
R = [u[3] for u in solv.u]

#Построение графиков и сохранение изображения
plot1 = plot(dpi = 300, legend = :topright, bg =:white, title = "График изменения чис
plot!(plot1, solv.t, S, label="Группа S", color =:blue)
plot!(plot1, solv.t, I, label="Группа I", color =:red)
plot!(plot1, solv.t, R, label="Группа R", color =:green)

savefig(plot1, "lab06_2.png")
```

В результате работы кода было сгененрировано такое изображение (рис. 4.3)

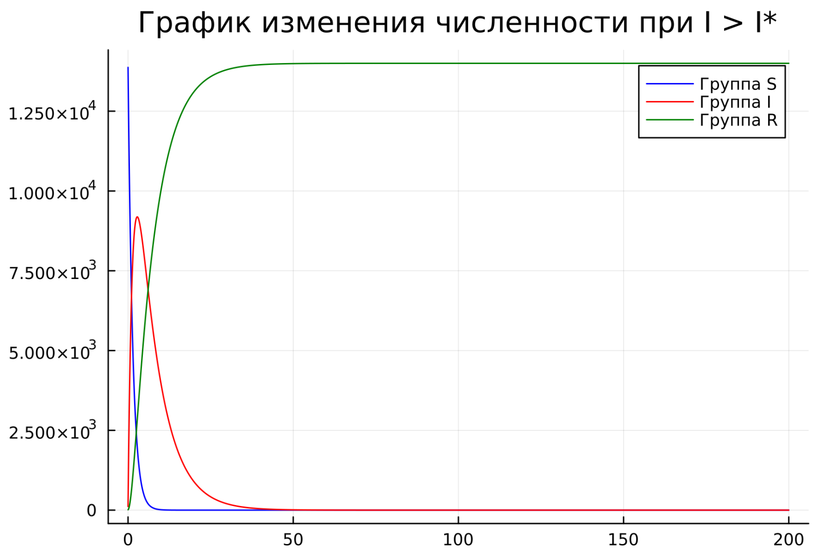

Рис. 4.3: Графики изменения числа особей трех групп при $I(t) > I^*$ на Julia

Модель для этого же случая на OpenModelica:

```
model two_ep

parameter Real I0 = 114.0;
parameter Real R0 = 14.0;
parameter Real S0 = 13872.0;

parameter Real a = 0.7;
parameter Real b = 0.15;

Real s (start=S0);
Real i (start=I0);
Real r (start=R0);

equation

der(s) = -a*s;
```

```
der(i) = a*s-b*i;
der(r) = b*i;

end two_ep;
```

в результате моделирования получились такие графики (рис. 4.4):

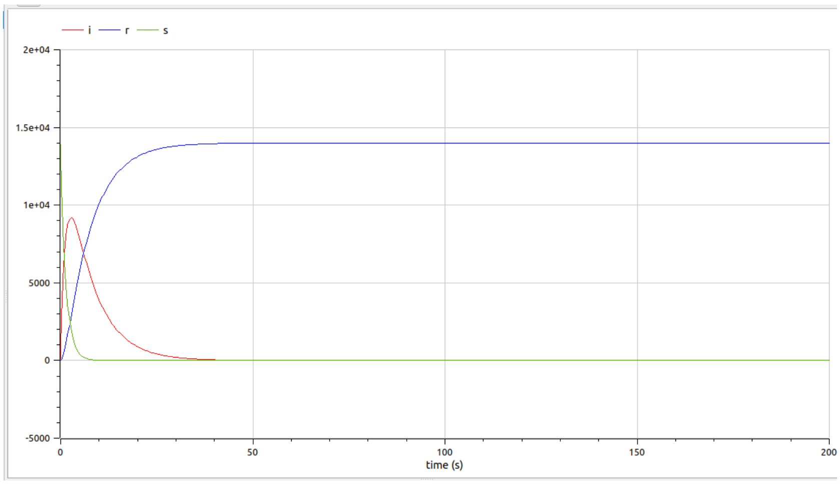

Рис. 4.4: Графики изменения числа особей трех групп при $I(t) > I^*$ на OpenModelica

5 Выводы

Мы изучили модель эпидемии SIR и построили графики изменения числа особей в трех группах в двух разных случаях на Julia и OpenModelica. При этом графики при моедлировании на обоих языках совпали.

Список литературы

1. Compartmental models in epidemiology [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology.
2. Минимально полезная модель [Электронный ресурс]. truEngineer, 2020. URL: https://truengineer.github.io/2020-04-25-sir-model/.