

Игра полковника Блотто

Colonel Blotto game

Парфенова Елизаевта Евгеньевна

Содержание

1	Цель работы	5
2	Задачи	6
3	Введение	7
4	Описание игры полковника Блотто	8
5	Стратегия в игре полковника Блотто и равновесие Неша	11
5.1	Стратегия в игре полковника Блотто	11
5.2	Равновесие Неша в игре полковника Блотто	13
6	Игра полковника Блотто: приложения	15
6.1	Выборы президента	15
6.2	Борьба с терроризмом	16
6.3	Найм персонала	16
7	Вывод	18
	Список литературы	19

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Цели доклада включают описание игры полковника Блотто и представление ее условий, обсуждение различных стратегий и равновесия Неша в контексте данной игры, а также рассмотрение примеров практических применений модели данной игры в различных сферах жизни

2 Задачи

- Изучить понятие игры полковника Блотто и ее описание
- Исследовать различные стратегии, используемые в этой игре
- Рассмотреть равновесие Неша в контексте данной игры
- Рассмотреть примеры применения игры полковника Блотто в различных областях

3 Введение

Игра полковника Блотто - это увлекательный аспект теории игр, который исследует стратегическое принятие решений в условиях конкуренции и ограниченных ресурсов. Название игры происходит от предполагаемого имени вымышленного генерала или полковника, который должен распределить свои солдаты между несколькими фронтами военных действий.

Исследование модели игры полковника Блотто остается актуальным в современном мире. Представление данной модели имеет прямое отношение к многим областям жизни, включая бизнес, экономику и политику. Изучение стратегий и равновесия в этой модели помогает понять, какие факторы влияют на принятие решений и как можно оптимизировать результаты. Игра полковника Блотто предоставляет уникальную возможность исследования и анализа стратегий в условиях неопределенности и неполной информации. Это актуально в современном мире, где быстро меняющиеся условия и неопределенность требуют гибкости и способности адаптироваться к новым ситуациям.

4 Описание игры полковника Блотто

Игра полковника Блотто (Colonel Blotto game) - это разновидность игры для двух человек с нулевой суммой, в которой игрокам поручено одновременно распределять ограниченные ресурсы по нескольким объектам (полям сражений). Эта игра была впервые предложена французским математиком Эмилем Борелем в 1921 году. [1]

Игра полковника Блотто предполагает, что два лица (например, полковник Блотто и его враг) однократно, одновременно и не зная стратегии оппонента распределяют свои ограниченные ресурсы между некоторым количеством полей (фронтов). Один из оппонентов выигрывает поле сражения, если выставил большее количество ресурсов (солдат или орудий) на определенное поле. Соответственно, выигрывает тот, кто одержал победу на большем количестве полей. [2]

Предположим, что полковник Блотто и его враг выделяют для поля сражения a ресурсы в количестве x и y соответственно, тогда выигрыш полковника Блотто V на поля сражения a будет определяться так:

$$V = \begin{cases} 1 & , \text{если } x > y \\ 0 & , \text{если } x = y \\ -1 & , \text{если } x < y \end{cases}$$

Для большего понимания рассмотрим **пример** простой игры полковника Блотто.

Допустим, что мы выступаем в роли полковника Блотто и в нашем распоряже-

нии есть 100 солдат, которых мы должны распределить по 3 фронтам. При этом известно, что противник имеет такое же количество ресурсов. Для начала расположим наших солдат поровну между тремя фронтами. Однако если противник располагает свои ресурсы так, как показано в таблице ниже, то он выигрывает по двум из трех фронтов и, как следствие, одерживает победу в игре. Здесь полковник Блотто обозначен B , его противник K , а поля сражения соответствующими цифрами.

	1	2	3
B	33	34	33
K	40	40	20

То есть даже из этого простого примера можно сделать вывод, что равновесное распределение войск между фронтами при данных условиях не имеет смысла, так как его очень легко переиграть. Но и приведенную противником стратегию так же легко переиграть, просто расставив солдат способом, показанном на следующей таблице.

	1	2	3
B	50	0	50
K	40	40	20

Полковнику Блотто достаточно распределить своих солдат только на 2 фронта, чтобы одержать безоговорочную победу на них и умышленно проиграть на третьем фронте. [3]

Конечную форму игры удобнее всего представлять в виде матрицы выигрышей.

Матрица выигрышей - это таблица, в которой представлены возможные результаты игры для каждого игрока в зависимости от выбранных ими стратегий.

Одно из представлений матрицы выигрыша для примера, описанного выше, может выглядеть так:

	K_1
B_1	$(-1, 1)$
B_2	$(1, -1)$

Здесь:

- B_1 - стратегия полковника Блотто $(33, 34, 33)$
- B_2 - стратегия полковника Блотто $(50, 0, 50)$
- K_1 - стратегия врага $(40, 40, 20)$

Из всего вышеописанного можно сделать вывод: в игре полковника Блотто при одинаковом количестве ресурсов всегда можно распределить свои ресурсы так, чтобы выиграть в некоторых битвах. То есть в данной игре нет единой выигрышной стратегии.

5 Стратегия в игре полковника Блотто и равновесие Неша

5.1 Стратегия в игре полковника Блотто

Стратегия игрока (в теории игр) — это полный план действий при всевозможных ситуациях, способных возникнуть. Стратегия определяет действие игрока в любой момент игры и для каждого возможного течения игры, способного привести к каждой ситуации. **Набор стратегий** — стратегии для каждого из игроков, которые полностью описывают все действия в игре. Набор стратегий обязан включать одну и только одну стратегию для каждого игрока. [4]

Исторически с момента формулировки задачи предлагались различные оптимальные стратегии. Впервые решение этой игры для случая, когда количество полей равно трем, было описано Э.Борелем и Вилле в 1938 году. В 1950 году Гросс и Вагнер опубликовали оптимальную стратегию для количества полей, равного двум и для симметричного случая для произвольного конечного количества полей. Интересно, что именно в этой статье игра впервые приобрела своего главного персонажа - полковника Блотто. В 2006 году Робертсон описал равновесную цену классической игры для любого числа полей и любого уровня ресурсов, а также характеристические множества равновесия для большинства вариаций классической игры. [5]

В теории игр различают два вида стратегий:

- **Чистая стратегия** - это стратегия, при которой игрок выбирает одну

конкретную действенную линию поведения без использования случайных элементов. В частности, она определяет результат для каждого возможного выбора, который игроку придётся сделать.

- **Смешанная стратегия** - это стратегия, включающая в себя вероятности для каждой чистой стратегии. Игрок выбирает чистую стратегию в соответствии с заданными вероятностями. Смешанная стратегия позволяет игрокам принимать решения на основе вероятностей и изменять свои действия в зависимости от этих вероятностей. Выбор вероятностей осуществляется перед началом каждой игры и не меняется до её конца.

Чистую стратегию можно рассматривать как вырожденный случай смешанной стратегии, в которой эта конкретная чистая стратегия выбирается с вероятностью 1, а любая другая стратегия - с вероятностью 0. [4]

В контексте нашей игры мы выбираем *чистую стратегию*, если перед началом сражения определяем конкретное количество солдат, которое расположится по фронтам, как мы уже делали в описанном примере. Такая стратегия может быть предпочтительнее в случае, если игрок, проанализировав ситуацию, уверен, что определенное распределение ресурсов будет оптимальным в большинстве случаев.

Смешанная стратегия проявляется в распределении войск по фронтам с определенной вероятностью. Предположим, первый игрок может расположить 60 солдат на первом поле сражения и 40 солдат на втором с вероятностью p , и 55 солдат на первом поле сражения и 45 на втором с вероятностью $1 - p$. Тогда смешанная стратегия этого игрока для двух полей сражений и ста солдат будет представлена парой $(p, 1 - p)$. Если, например, вероятности будут равняться 0.7 и 0.3 соответственно, то это будет означать, что в среднем 7 из 10 сражений игрок будет выбирать первую чистую стратегию.

Существуют тривиальные случаи, в которых определяется единственная оптимальная стратегия для каждого игрока. Это случаи при $n = 1$ и $n = 2$, где n - количество полей сражений.

- При $n = 1$ побеждает игрок, обладающий бóльшим количеством ресурса (в случае равенства ресурсов победа каждого равновероятна)
- При $n = 2$ оптимальной стратегией каждого игрока является приоритетное выделение ресурса на наиболее ценный для него объект. [2]

5.2 Равновесие Неша в игре полковника Блотто

Равновесие Неша - набор стратегий в игре для двух и более игроков, названный в честь математика Джона Неша, в котором ни один участник не может увеличить выигрыш, изменив свою стратегию, если другие участники своих стратегий не меняют. [6]

Для понимания равновесия Неша в игре полковника Блотто рассмотрим простой **пример**:

Предположим, что полковник Блотто и его противник имеют по 100 солдат и сражаются за контроль над двумя стратегически важными позициями. Полковник Блотто может распределить свои полки между этими позициями различными способами, и его противник также делает свой выбор.

Стратегии, которые мы рассматриваем:

- B_1 - полковник Блотто выставит всех солдат на первый фронт
- B_2 - полковник Блотто выставит всех солдат на второй фронт
- K_1 - противник выставит всех солдат на первый фронт
- K_2 - противник выставит всех солдат на второй фронт

Для будущей демонстрации равновесия Неша в нашем примере введём правило: если на обоих полях сражения силы противников равны, то за такую игру и полковник Блотто, и его противник получают по -1 очку.

Тогда матрица выигрышей для полковника Блотто может выглядеть следующим образом:

	K_1	K_2
B_1	$(-1, -1)$	$(0, 0)$
B_2	$(0, 0)$	$(-1, -1)$

В данном случае, если полковник Блотто выбирает стратегию B_1 с вероятностью 0.5, а его противник выбирает стратегию K_2 с вероятностью 0.5, то полковник Блотто получает ожидаемый выигрыш в 0, а его противник получает ожидаемый проигрыш в 0. Если полковник Блотто выбирает стратегию B_2 с вероятностью 0.5, а его противник выбирает стратегию K_1 с вероятностью 0.5, то полковник Блотто получает ожидаемый проигрыш в 0, а его противник получает ожидаемый выигрыш в 0. То есть в этих ситуациях достигается равновесие Неша, так как ни один из игроков не может увеличить свою выгоду.

В различных вариациях игры полковника Блотто равновесие Неша можно найти разными методами: анализ чистых и смешанных стратегий в простых случаях, методы линейного программирования, различных итеративных методов или с помощью компьютерного моделирования

6 Игра полковника Блотто: приложения

На самом деле, игра полковника Блотто имеет более широкое применение, не смотря на ее военное происхождение. Она может быть применена в исследовании конкурентной среды в бизнесе, политических выборах, экономике, сетевой защите, стратегических решений о найме персонала и в управлении различными операциями (борьба с терроризмом).

6.1 Выборы президента

Один из наиболее известных способов ее применения являются выборы президента в США. [1] Чтобы стать президентом США, нужно собрать большее количество голосов, то есть выиграть в большинстве штатов. Модель исследуемой игры в контексте применения к выборам имеет следующие элементы:

- игроки(противники) - два президента, сражающихся в выборной гонке
- фронты (поля сражений) - штаты США, в которых будет проводиться голосование
- ресурсы (войска) - деньги, личное время, знания, популярность в тех или иных штатах или у определенных категорий людей

Выигрышем здесь является победа на выборах. Только грамотная стратегия с оптимальным распределением всех ресурсов может помочь достичь победы. Живым примером такого приложения являются выборы в США в 2000 году, где сражались Дж.Буш и А. Гор, которые завершились победой Буша с очень незначительным перевесом. Некоторые исследования говорят о том, что Гор имел

выигрышную стратегию, но не нашел ее. [5] Например, он совсем не выделил ресурсы на штат Теннесси, который был его родиной, полагая свою безоговорочную победу там, но Буш переиграл его и собрал больше голосов там, и даже это могло стоить Гору победы в выборах. [7]

6.2 Борьба с терроризмом

Рассмотрим использование игры полковника Блотто в борьбе с терроризмом. Оппонентами здесь выступают государство, которое пытается предотвратить террористические акты и террористы. Фронтами являются разные общественные места - автовокзалы, аэропорты площади и так далее. Особенностью такой модели являются две вещи:

- Террористам достаточно выиграть на одном фронте - их задача будет выполнена
- Государство в противовес имеет намного больше ресурсы, чем террористические организации

Зная, какими ресурсами управляет террористическая группировка, государство должно правильно распределить свои ресурсы, исключая любую возможность террористического акта. Исследования отмечают, что, к сожалению, в применении модели игры к данной ситуации не учитывается очевидный факт, что противник способен вести наблюдение за системой охраны и использовать эту информацию в своей стратегии. [7]

6.3 Найм персонала

Игру Блотто также можно приложить и к найму персонала. На вакансии, которые размещают компании, отзываются множество претендентов с различными признаками: образованием, опытом работы, навыками. Предположим мы,

как менеджеры по подбору персонала, выделили двоих и расставили им “очки” по их признакам. Затем провели собеседование и, добавив признаки, выделили, кто выиграл и кто проиграл и там. Таким образом, выбор кандидата превращается в игру полковника Блотто, где каждый кандидат старается выбрать правильную стратегию общения с работодателем.

Так же в приложении к найму персонала игру полковника Блотто можно рассмотреть и со стороны, когда две компании размещают одинаковую вакансию и, стараясь правильно распределять свои ресурсы(зар.плату, условия работы, стратегии поведения), привлекают более успешных кандидатов[1]

7 Вывод

В ходе нашего доклада мы рассмотрели игру полковника Блотто и ее ключевые аспекты, включая описание условий игры и принципы формирования стратегий. Мы изучили различные стратегии, которые могут быть использованы игроками, и обсудили концепцию равновесия Неша в контексте данной игры. Также были представлены примеры практического применения игры полковника Блотто в различных сферах жизни и некоторые из них подробно рассмотрены.

Список литературы

1. Blotto game [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology.
2. В. О. Корепанов Д.А.Н. РЕФЛЕКСИВНАЯ ИГРА ПОЛКОВНИКА БЛОТТО. Москва, 2012. 15 с.
3. Модельное мышление. Blotto: нет лучшей стратегии [Электронный ресурс]. Coursera Inc., University of Michigan, 2024. URL: <https://www.coursera.org/learn/model-thinking/lecture/0fjj4/blotto-no-best-strategy>.
4. Strategy (game theory) [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2024. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Strategy_\(game_theory\)#Mixed_strategy](https://en.wikipedia.org/wiki/Strategy_(game_theory)#Mixed_strategy).
5. Игры Блотто [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2024. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Игры_Блотто.
6. Равновесие Нэша [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2023. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Равновесие_Нэша.
7. Модельное мышление. Blotto: приложения полковника Блотто [Электронный ресурс]. Coursera Inc., University of Michigan, 2024. URL: <https://www.coursera.org/learn/model-thinking/lecture/eaLiK/applications-of-colonel-blotto>.