Лаборторная работа №5

Модель “хищник-жертва”

Парфенова Е. Е.

5 марта 2024

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Информация

Докладчик

- Парфенова Елизавета Евгеньевна
- студент
- Российский университет дружбы народов
- 1032216437@pfur.ru
- https://github.com/parfenovaee

Вводная часть

Актуальность

- Важность изучения модели “хищник - жертва”, распространенной в биологии и применяющейся даже в экономике
- Необходимость умения строить различные математичсекие модели и их визуальное представление

Цели и задачи

- Изучить жесткую модель “хищник-жертва”
- Построить графики зависимости и изменения численностей хищников и жертв
- Найти стационарное состояние системы

Теоретическое введение

Модель Лотки — Вольтерры

Модель Лотки — Вольтерры (модель Лотки — Вольтерра) — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь своих авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга.

Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами.

Модель Лотки — Вольтерры. Система уравнений

В математической форме предложенная система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (\alpha - \beta y)x \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = (-\gamma - \delta x)y \end{cases}$$

где где x — количество жертв, y — количество хищников, t — время, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами.

Модель Лотки — Вольтерры. Основания

Математическая модель наиболее простой, то есть двух видовой системы «хищник – жертва» основывается на следующих предположениях:

1) численности популяций жертв N и хищников M зависят только от времени;
2) в отсутствие взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса;
3) естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными;
4) эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается;
5) скорость роста численности жертвы уменьшается пропорционально численности хищников;

Модель Лотки — Вольтерры. Стационарное состояние

Для положения равновесия $\overline{x} > 0, \overline{y} > 0$ изменение численностей популяции равно нулю. Следовательно:

$$\alpha\overline{x} - \beta\overline{yx} = 0$$
$$-\gamma\overline{y} - \delta x\overline{xy} = 0$$

Отсюда следует, что $\overline{x} = \frac{\gamma}{\delta}, \overline{y} = \frac{\alpha}{\beta}$

Задание лабораторной работы

Задача. Вариант № 8

Для модели «хищник-жертва»:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -0.19x(t) + 0.048x(t)y(t) \\[2ex]
\dfrac{dy}{dt} = 0.39y(t) - 0.036x(t)y(t)
\end{cases}
$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 13, y_0 = 19$. Найдите стационарное состояние системы.

Выполнение лабораторной работы

Математичсеская модель

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры.

Сама модель в нашем случае выглядит так:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

Математичсекая модель

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников, чему соотвествуют члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения.

Математичсеская модель

Математический анализ этой модели, которая является жесткой, показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние B приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

Математичсекая модель

Стационарное состояние системы, описанной выше, (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x = \frac{c}{d}, y = \frac{a}{b}$.

Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет.

Построение математичсекой модели. Julia

Для моделировния графиков был написан код на Julia, в результате работы которого сгенерировались изображения трех графиков:

1. График зависимости численности хищников от численности жертв.

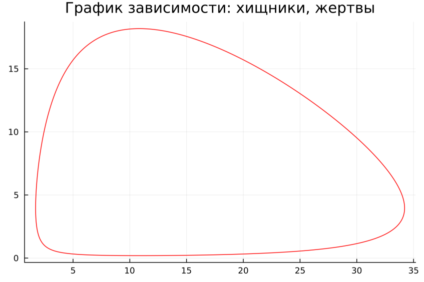

Рис. 1: График зависимости численности хищников от численности жертв на Julia

Построение математичсекой модели. Julia

2. График изменения численности хищников и численности жертв при начальных условиях $x_0 = 13, y_0 = 19$.

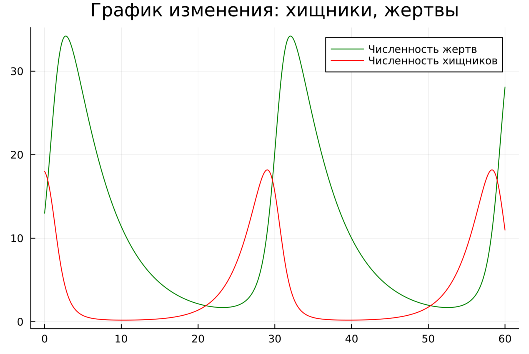

Рис. 2: График изменения численности хищников и численности жертв при начальных условиях $x_0 = 13, y_0 = 19$ на Julia

Построение математичсекой модели. Julia

3. График стационарного состояния.

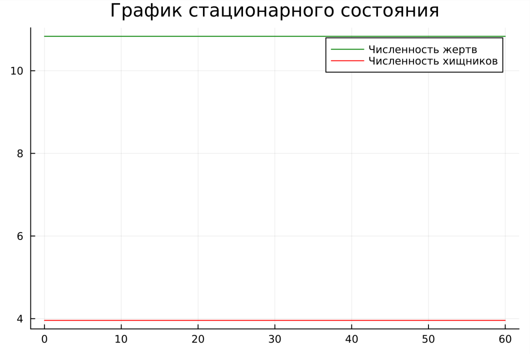

Рис. 3: Стационарное состояние на Julia

Для моделирования были написаны две модели. В результате работы первой получились такие графики:

1. График зависимости численности хищников от численности жертв.

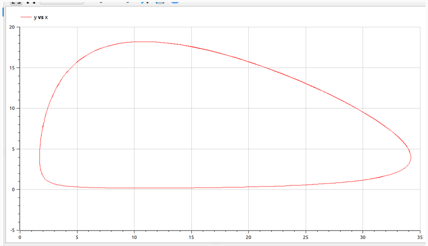

Рис. 4: График зависимости численности хищников от численности жертв на Openmodelica

Построение математичсекой модели. OpenModelica

2. График изменения численности хищников и численности жертв при начальных условиях $x_0 = 13, y_0 = 19$.

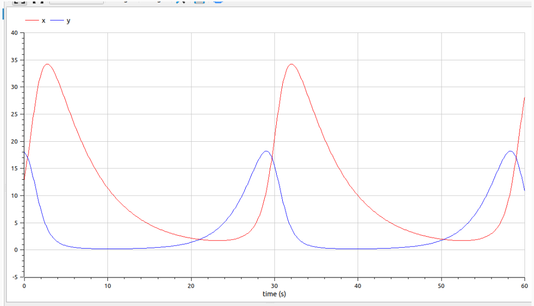

Рис. 5: График изменения численности хищников и численности жертв при начальных условиях $x_0 = 13, y_0 = 19$ на OpenModelica

Построение математичсекой модели. OpenModelica

Результатом работы второй модели стал:

График стационарного состояния.

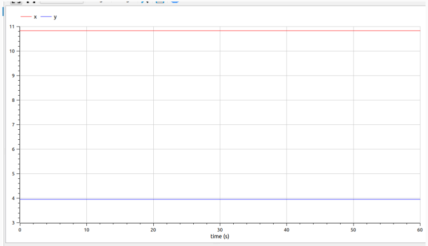

Рис. 6: Стационарное состояние на OpenModelica

Анализ результатов

Графики, построенные на Julia и OpenModelica, совпали друг с другом, однако, можно отметить, что код, получившийся на OpenModelica, значительно меньше, чем на Julia.

Вывод

Вывод

В результате выполнения лабораторной работы мы изучили жесткую модель “хищник-жертва” и построили график зависимости численности хищников от численности жертв, графики изменения численности жертв и численности хищников, а также нашли стационарное состояние, используя Julia и OpemModelica.