Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Парфенова Елизавета Евгеньевна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

- Изучить понятие гармонических колебаний и гармонического осциллятора
- Изучить математичсекую модель колебаний гармонического осциллятора
- Найти решение уравнений и построить фазовый портерт для различных случаев в Julia и OpenModelica

2 Задание

Мой вариант - вариант №8

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + 1.5x = 0$$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + \dot{x} + 10x = 0$$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

$$\ddot{x} + \dot{x} + 11x = 2\cos(t)$$

На интервале $t \in [0; 60]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0, y_0 = 0$

3 Теоретическое введение

Гармонические колебания — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону. [1]

Гармониический осциллятор (в классической механике) — система, которая при выведении её из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы F, пропорциональной смещению x:

$F = kx$, где k - постоянный коэффициент.

Если F — единственная сила, действующая на систему, то систему называют простым или консервативным гармоническим осциллятором.

Если имеется ещё и сила трения (затухание), пропорциональная скорости движения, то такую систему называют затухающим или диссипативным осциллятором[2].

По второму закону Ньютона дифференциальное уравнение, описывающее затухающий осциллятор выглядит так [2]:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 – собственная частота колебаний, t – время.

Фазовый портрет - это геометрическое представление орбит динамической системы в фазовой плоскости. Каждый набор начальных условий представлен отдельной точкой или кривой [3].

4 Выполнение лабораторной работы

Математичсекая модель

Как уже было обозначено в теоретическом введении, уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 – собственная частота колебаний, t – время.

Уравнение, написанное выше, - это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы. При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = 0$$

Данное уранение второго порядка можно представить в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его *фазовой плоскостью*.

Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется *фазовой траекторией*.

Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют *фазовым портретом*.

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

Julia

Уравнение для этого случая представлено в таком виде: $\ddot{x} + 1.5x = 0$. Здесь $\omega^2 = 1.5$.

Код программы на Julia для этого случая выглядит так:

```
# 1 случай
# Eq: x'' + 1.5x = 0

using DifferentialEquations
using Plots

w = 1.5

function without_intervention(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -w*u[1]
```

```
end

#Начальные условия и временной промежуток
u0 = [0.0, 0.0]
timee = (0.0, 60.0)

prob = ODEProblem(without_intervention, u0, timee)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)

# Построение решения уранвения
plot(sol)
savefig("lab4_1_jl.png")

# Построение фазового потрета
plot(sol, vars=(2,1))
savefig("lab4_1_jl_pp.png")
```

В результате работы кода получились вот такие изображения:

1. Решение уравнения колебаний гармонического осциллятора для случая без затуханий и без воздествия внешей силы (рис. 4.1).

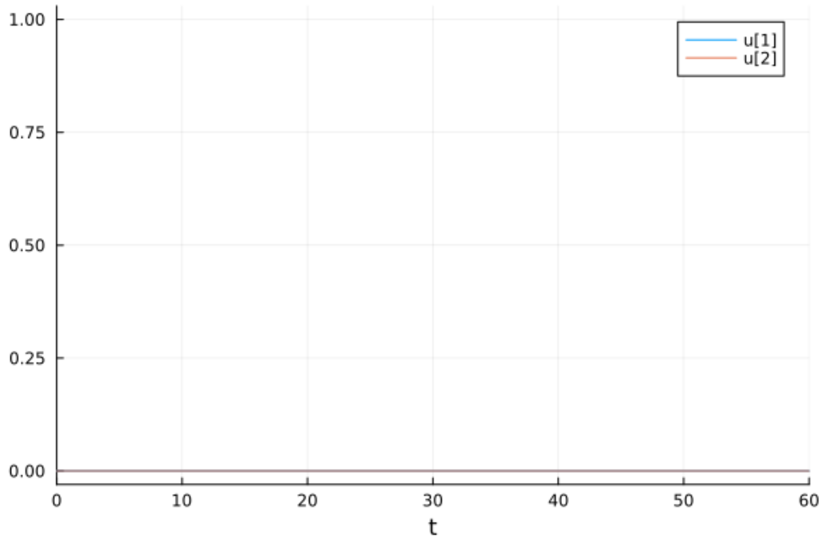

Рис. 4.1: График решения уравнения колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без воздествия внешей силы на Julia

2. Фазовый портрет колебаний гармонического осциилятора для случая без затуханий и без воздествия внешей силы (рис. 4.2).

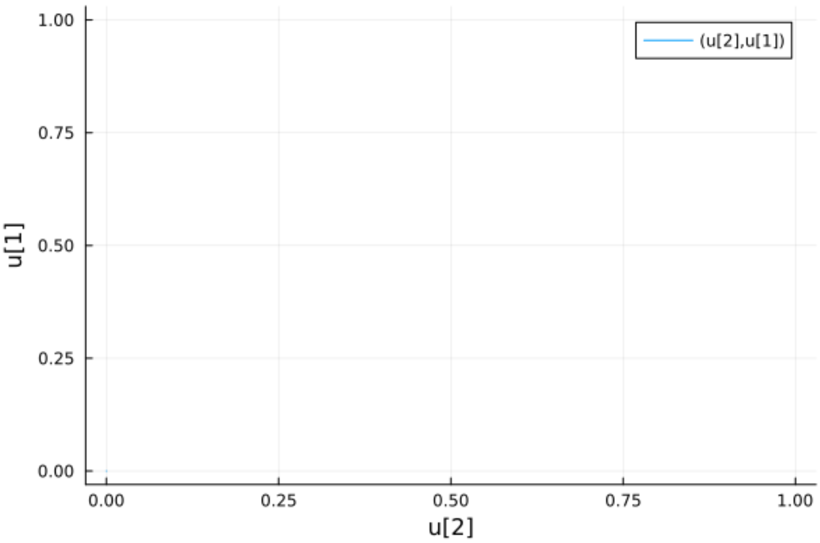

Рис. 4.2: Фазовый портет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без воздествия внешей силы на Julia

OpenModelica

Модель, написанная для этого случая, выглядит так:

```
model without_intervention

parameter Real w = 1.5;

parameter Real x0 = 0.0;
parameter Real y0 = 0.0;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

equation
der(x) = y;
der(y) = -w*x;

end without_intervention;
```

В результате моделирования получились такие же график решения и фазовый портрет, как и для Julia:

1. Решение уравнения колебаний гармонического осциллятора для случая без затуханий и без воздествия внешей силы (рис. 4.3).

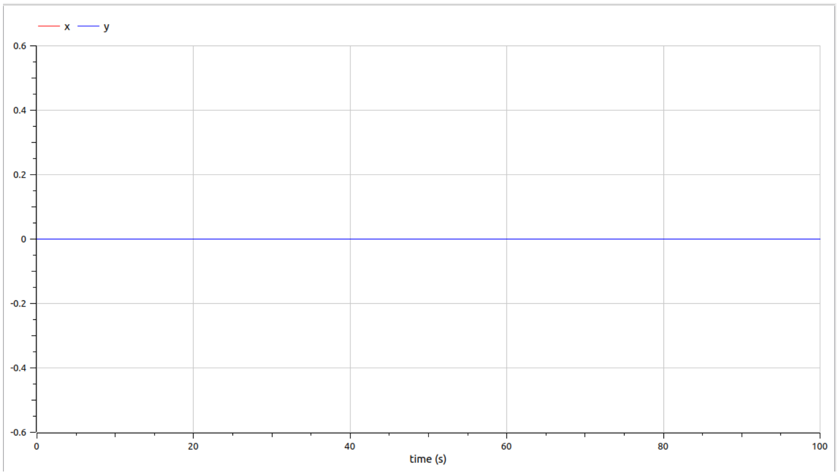

Рис. 4.3: График решения уравнения колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без воздествия внешей силы на OpenModelica

2. Фазовый портрет колебаний гармонического осциилятора для случая без затуханий и без воздествия внешей силы (рис. 4.4).

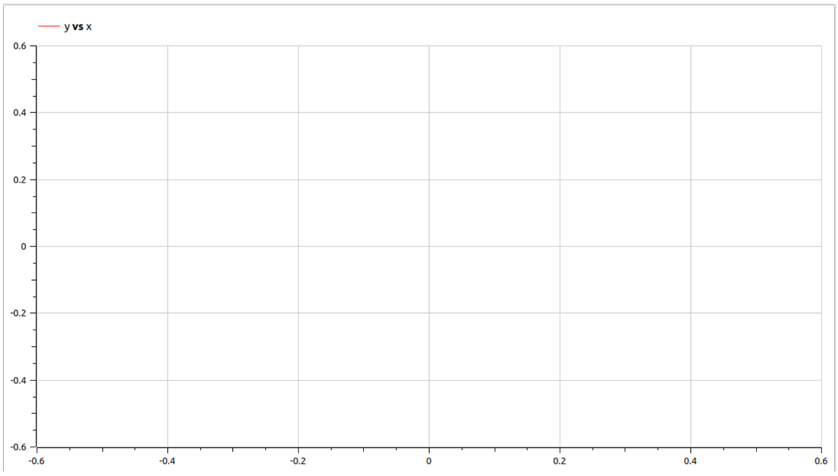

Рис. 4.4: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без воздествия внешей силы на OpenModelica

Так как начальные условия равны нулю ($x_0 = 0, y_0 = 0$), то в итоге без затуханий и воздествия каких-либо внещних сил решением уравнения колебаний становятся две совпадающие друг с другом прямые, проходящие через центр координат. А фазовый портрет приобретает вид точки, которая находится в центре координат. Что мы, собственно, и видим на представленных графиках.

Колебания гармонического осциллятора с затуханиями и без действий внешней силы

Julia

Уравнение для этого случая представлено в таком виде: $\ddot{x} + \dot{x} + 10x = 0$. Здесь $\omega^2 = 10$, а $g = 1$.

Код программы на Julia для этого случая выглядит так:

```
# 2 случай
# Eq: x'' + x' + 10x = 0

using DifferentialEquations
using Plots

w = 10
g = 1

function with_one_intervention(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -g*du[1]- w*u[1]
end

#Начальные условия и временной промежуток
u0 = [0.0, 0.0]
timee = (0.0, 60.0)

prob = ODEProblem(with_one_intervention, u0, timee)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)

# Построение решения уравнения
plot(sol)
```

```
savefig("lab4_2_jl.png")

# Построение фазового потрета
plot(sol, vars=(2,1))
savefig("lab4_2_jl_pp.png")
```

В результате работы кода сгенерировались такие изображения:

1. Решение уравнения колебаний гармонического осциллятора для случая с затуханиями и воздествия внешей силы (рис. 4.5).

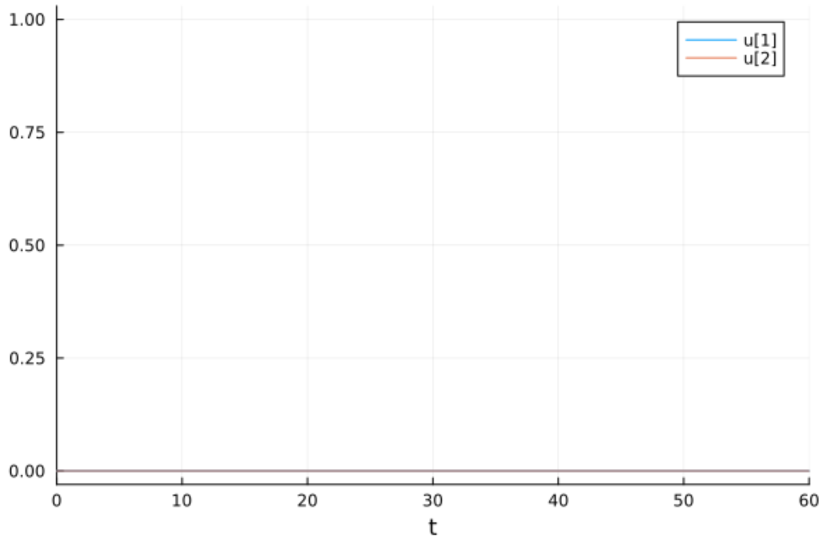

Рис. 4.5: График решения уравнения колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и без воздествия внешей силы на Julia

2. Фазовый портрет колебаний гармонического осциилятора для случая с затуханиями и без воздествия внешей силы (рис. 4.6).

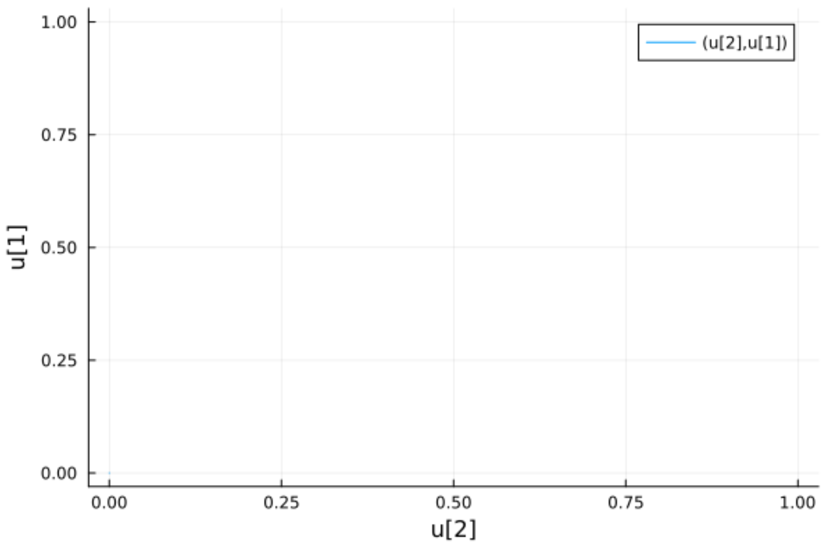

Рис. 4.6: Фазовый портет колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и без воздествия внешей силы на Julia

OpenModelica

Модель для построения необходимых графика решений и фазового портрета:

```
model with_one_intervention


parameter Real w = 10;

parameter Real g = 1;


parameter Real x0 = 0.0;

parameter Real y0 = 0.0;


Real x(start=x0);

Real y(start=y0);


equation

der(x) = y;

der(y) = -g*der(x) - w*x;
```

```
end with_one_intervention;
```

Результаты работы кода:

1. Решение уравнения колебаний гармонического осциллятора для случая с затуханиями и без воздествия внешей силы (рис. 4.7).

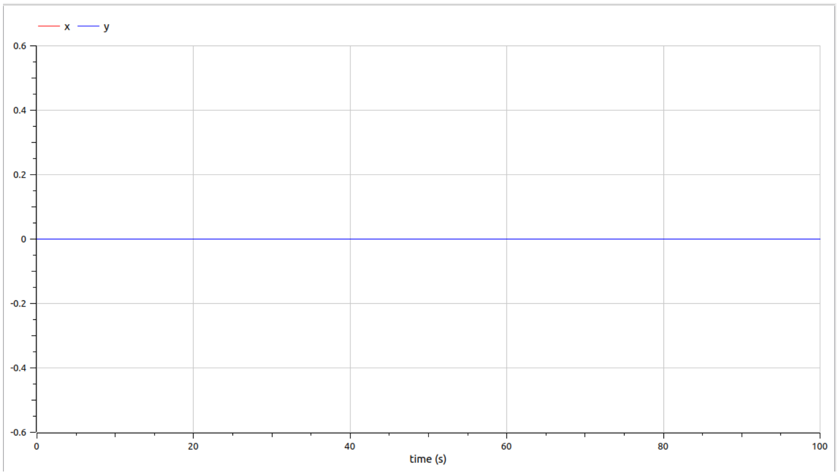

Рис. 4.7: График решения уравнения колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и без воздествия внешей силы на OpenModelica

2. Фазовый портрет колебаний гармонического осциилятора для случая с затуханием и без воздествия внешей силы (рис. 4.8).

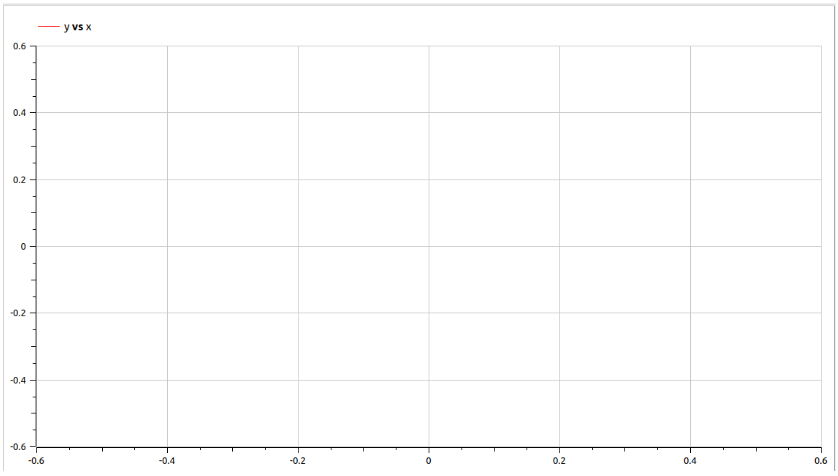

Рис. 4.8: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без воздествия внешей силы на OpenModelica

Данные графики повторяют графики предыдущего случая, так как начальные условия остаются неизменны и превращают график решения уранвения в две совпадающие прямые, а фазовый портрет схлопывают в точку. Затухания никак не влияют на поведение графика и фазового портерата, однако внещняя сила все изменит.

Колебания гармонического осциллятора с затуханиями и с действием внешней силы

Julia

Уравнение для этого случая представлено в таком виде: $\ddot{x}+\dot{x}+11x = 2cos(t)$. Здесь $\omega^2 = 11$, а $g = 1$.

Код программы на Julia для этого случая выглядит так:

```
# 3 случай
# Eq: x'' + x' + 11x = 2cos(t)

using DifferentialEquations
using Plots

w = 11
g = 1

function with_intervention(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -g*du[1]- w*u[1] + 2*cos(t)
end

#Начальные условия и временной промежуток
u0 = [0.0, 0.0]
timee = (0.0, 60.0)
```

```
prob = ODEProblem(with_intervention, u0, timee)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)

# Построение решения уравнения
plot(sol)
savefig("lab4_3_jl.png")
 # Построение фазового потрета
plot(sol, vars=(2,1))
savefig("lab4_3_jl_pp.png")
```

Вот какие результаты получились:

1. Решение уравнения колебаний гармонического осциллятора для случая с затуханиями и с воздествием внешей силы (рис. 4.9).

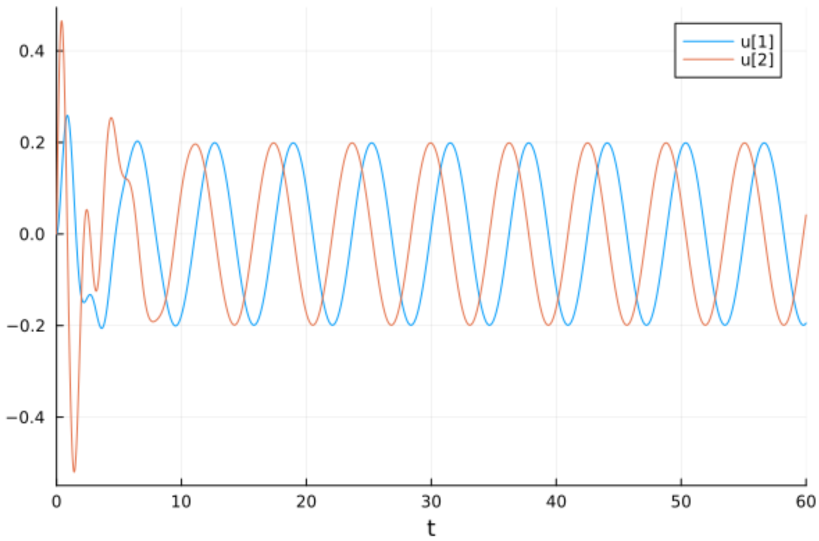

Рис. 4.9: График решения уравнения колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и с воздествием внешей силы на Julia

2. Фазовый портрет колебаний гармонического осциилятора для случая с затуханиями и с воздествием внешей силы (рис. 4.10).

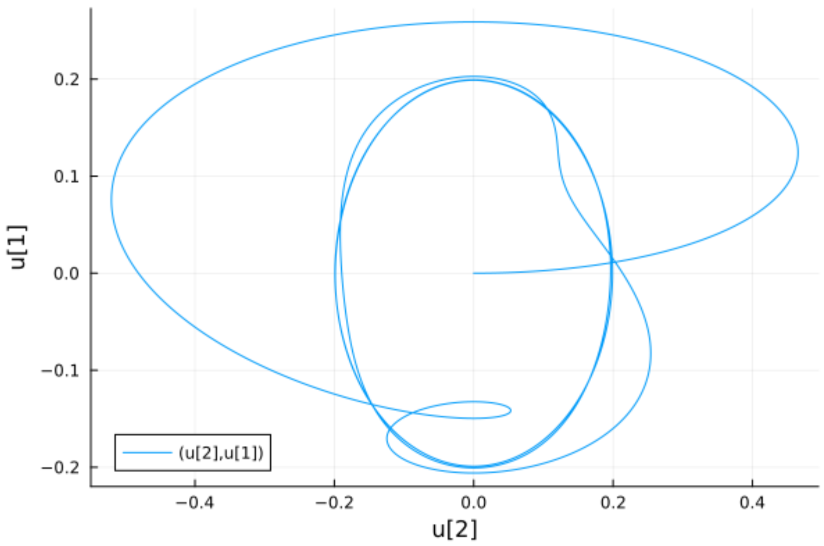

Рис. 4.10: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и с воздествием внешей силы на Julia

OpenModelica

Модель для построения грфаика решений и фазового портрета для случая с затуханиями и воздейтсивем внешних сил:

```
model with_interventiion

parameter Real w = 11.0;
parameter Real g = 1.0;

parameter Real x0 = 0.0;
parameter Real y0 = 0.0;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
Real t = time;

equation
der(x) = y;
```

```
der(y) = -w*x - g*der(x) + 2*cos(t);

end with_interventiion;
```

Результаты моделирования:

1. Решение уравнения колебаний гармонического осциллятора для случая с затуханиями и с воздействием внешей силы (рис. 4.11).

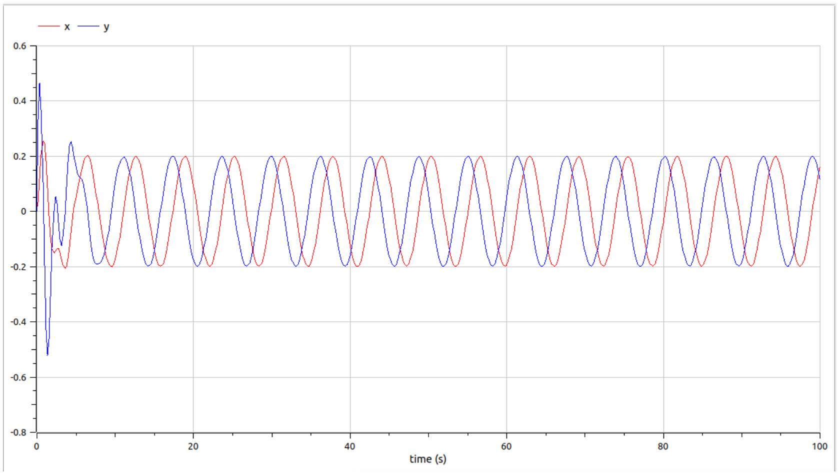

Рис. 4.11: График решения уравнения колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и с воздействием внешей силы на OpenModelica

2. Фазовый портрет колебаний гармонического осциилятора для случая с затуханиями и с воздействием внешей силы (рис. 4.12).

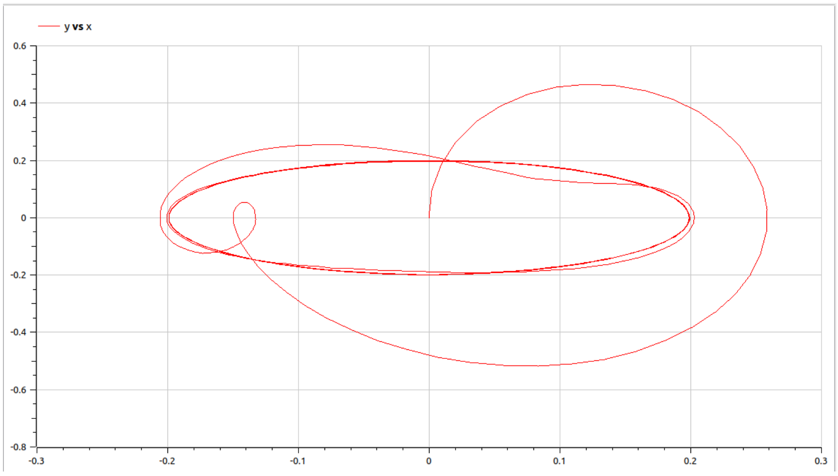

Рис. 4.12: Фазовый портет колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и с воздествием внешей силы на OpenModelica

В результате вмешательства внешней силы график решения и фазовый портерт уже выглядят не так, как в предыдущих двух случаях. Графики на Julia и OpenModelica совпадают, немного отличаются лишь масштабом (фазовый портрет в OpemModelica получился более растянутым)

5 Выводы

Были изучены понятия гармоничсекого осциллятора и гармонических колебаний, изучена модель колебаний гармонического осциллятора и с помощью нее построены график решения уравнения и фазовый протрет для нескольких случаев в Julia и OpenModelica.

Список литературы

1. Гармонические колебания [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2024. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гармонические_колебания.
2. Гармонический осциллятор [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2024. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гармонический_осциллятор.
3. Phase_portrait [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2023. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Phase_portrait.