

Лабораторная работа №6

Модель эпидемии “SIR”

Парфенова Е. Е.

6 марта 2024

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Информация

- Парфенова Елизавета Евгеньевна
- студент
- Российский университет дружбы народов
- 1032216437@pfur.ru
- <https://github.com/parfenovae>



Вводная часть

- Важность изучения достаточно распространенной и используемой модели эпидемии
- Необходимость умения строить различные математические модели и их визуальное представление

- Изучить модель эпидемии SIR
- Построить графики изменения особей в группах в различных случаях на Julia и OpenModelica

Теоретическое введение

Модель эпидемии SIR

Модель *SIR* (модель эпидемии) является одной из простейших компартментарных моделей, и многие модели являются производными от этой базовой формы. Модель состоит из трех отсеков:

- S : количество s незаметных особей. Когда восприимчивый и заразный индивидуум вступают в “инфекционный контакт”, восприимчивый индивидуум заражается болезнью и переходит в инфекционный компартмент.
- I : количество i неинфекционных особей. Это лица, которые были инфицированы и способны заразить восприимчивых лиц.
- R для количества r инфицированных (и невосприимчивых) или умерших людей. Это люди, которые были инфицированы и либо выздоровели от болезни и попали в удаленный компартмент, либо умерли.

Эта модель является достаточно прогностической для инфекционных заболеваний, которые передаются от человека к человеку и при выздоровлении которых возникает стойкая резистентность, таких как корь, свинка и краснуха.

Чтобы показать, что количество восприимчивых, инфекционных и удаленных лиц может меняться с течением времени, мы делаем точные цифры функцией от t (времени): $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$. Для конкретного заболевания в конкретной популяции эти функции могут быть разработаны для прогнозирования возможных вспышек и взятия их под контроль.

Модель эпидемии SIR

Модель SIR в таком случае представляет собой нелинейную систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику распространения заболевания в популяции:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N} \\ \frac{dI}{dt} = -\frac{\beta IS}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{array} \right.$$

Задание

Задача. Вариант №8

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 14000$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 114$, а число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 14$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

- 1) $I(t) \leq I^*$
- 2) $I(t) > I^*$

Выполнение работы

Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы, о которых уже было сказано в теоретическом введении. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначаемая через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^* , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & , \text{если } I(t) > I^* \\ 0 & , \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & , \text{ если } I(t) > I^* \\ -\beta I & , \text{ если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α , β , - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия.

Построение графиков при $I(t) \leq I^*$

В первом случае мы используем такую систему дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = 0 \\ \frac{dI}{dt} = -\beta I \\ \frac{dR}{dt} = \beta I \end{array} \right.$$

Построение графиков при $I(t) \leq I^*$

Так как изначально S_0 , которое мы используем в дальнейших вычислениях, не дано конкретно, я вычислила его по приведенной в задаче формуле $S(0) = N - I(0) - R(0)$. В итоге $S(0) = 13872$

Построение графиков при $I(t) \leq I^*$

В результате работы кода было сгенерировано такое изображение.

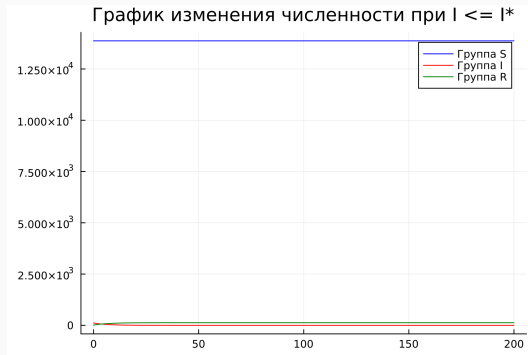


Рис. 1: Графики изменения числа особей трех групп при $I(t) \leq I^*$ на Julia

Построение графиков при $I(t) \leq I^*$

При построении графиков в том же случае на OpenModelica получилось такое изображение:

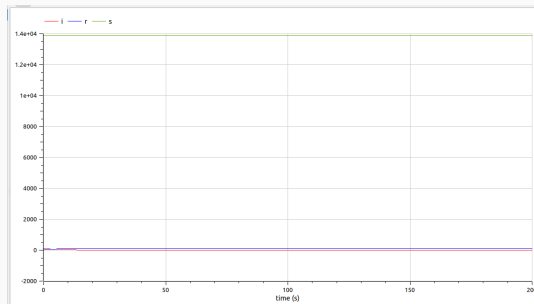


Рис. 2: Графики изменения числа особей трех групп при $I(t) \leq I^*$ на OpenModelica

Построение графиков при $I(t) > I^*$

Далее рассмотрим второй случай. Здесь немного меняется система дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\alpha S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha S - \beta I \\ \frac{dR}{dt} = \beta I \end{array} \right.$$

Построение графиков при $I(t) > I^*$

В результате работы кода на Julia получились такие графики:

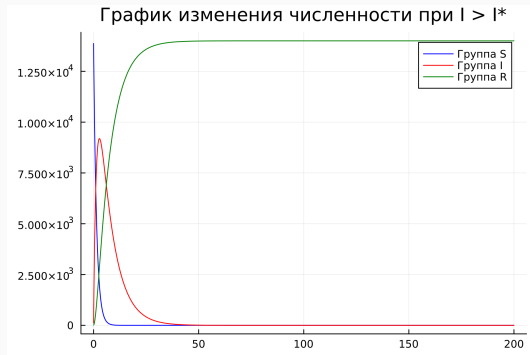


Рис. 3: Графики изменения числа особей трех групп при $I(t) > I^*$ на Julia

Построение графиков при $I(t) > I^*$

При моделировании этого случая в OpenModelica вышел вот такой результат:

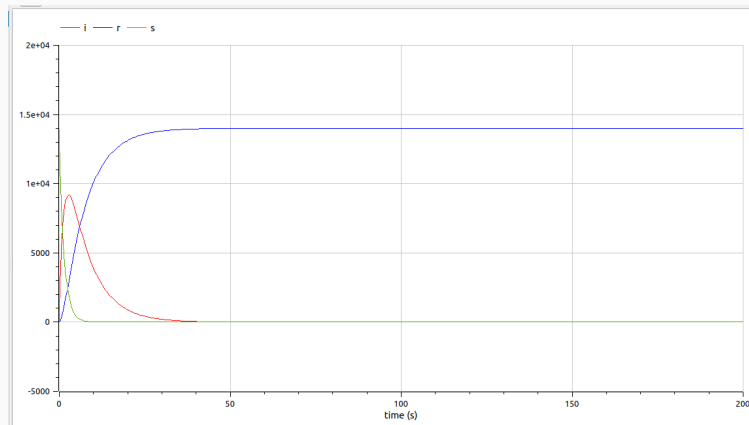


Рис. 4: Графики изменения числа особей трех групп при $I(t) > I^*$ на OpenModelica 20/21

Вывод

Мы изучили модель эпидемии SIR и построили графики изменения числа особей в трех группах в двух разных случаях на Julia и OpenModelica. При этом графики при моделировании на обоих языках совпали.