Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Парфенова Е. Е.

29 февраля 2024

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Информация

Докладчик

- Парфенова Елизавета Евгеньвена
- студент
- Российский университет дружбы народов
- 1032216437@pfur.ru
- https://github.com/parfenovaee

Вводная часть

Актуальность

- Важность умения строить визуальное представление (графики решений, фазовые портреты и т.д) для различных математических моделей, представленных дифференциальными уравнениями
- Более глубокое понимание поведения физических систем, которые подобны той, что описана в лабораторной работе, в различных случаях

Цели и задачи

- Изучить понятие гармонических колебаний и гармонического осциллятора
- Изучить математичсекую модель колебаний гармонического осциллятора
- Найти решение уравнений и построить фазовый портерт для различных случаев в Julia и OpenModelica

Теоретическое введение

Теоретичсекое введение(1)

Гармонические колебания — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону.

Гармониический осциллятор (в классической механике) — система, которая при выведении её из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы F, пропорциональной смещению x:

$F = kx$, где k - постоянный коэффициент.

Теоретичсекое введение(2)

Если F — единственная сила, действующая на систему, то систему называют простым или консервативным гармоническим осциллятором.

Если имеется ещё и сила трения (затухание), пропорциональная скорости движения, то такую систему называют затухающим или диссипативным осциллятором.

Теоретичсекое введение(3)

По второму закону Ньютона дифференциальное уравнение, описывающее затухающий осциллятор выглядит так:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

где x – переменная, описывающая состояние системы, γ – параметр, характеризующий потери энергии, ω_0 – собственная частота колебаний, t – время.

Фазовый портрет - это геометрическое представление орбит динамической системы в фазовой плоскости. Каждый набор начальных условий представлен отдельной точкой или кривой.

Задание лабораторной работы

Задача

Мой вариант - вариант №8

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 1.5x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + \dot{x} + 10x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + \dot{x} + 11x = 2\cos(t)$

На интервале $t \in [0; 60]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0, y_0 = 0$

Выполнение лабораторной работы

Математчисекая модель (1)

Как уже было обозначено в теоретическом введении, уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

Математчисекая модель (2)

Уравнение, написанное выше, - это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы. При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = 0$$

Математчисекая модель (3)

анное уранение второго порядка можно представить в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Математчисекая модель (4)

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его **фазовой плоскостью**.

Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется **фазовой траекторией**.

Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют **фазовым портретом**.

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. Julia

Уравнение для этого случая представлено в таком виде: $\ddot{x} + 1.5x = 0$. Здесь $\omega^2 = 1.5$.

В результате моделирования были сгенерированы два изображения

1. Решение уравнения колебаний гармонического осциллятора для случая без затуханий и без воздествия внешей силы.

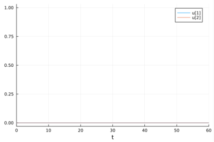

Рис. 1: График решения уравнения колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без воздествия внешей силы на Julia

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. Julia

2. Фазовый портрет колебаний гармонического осциилятора для случая без затуханий и без воздествия внешей силы.

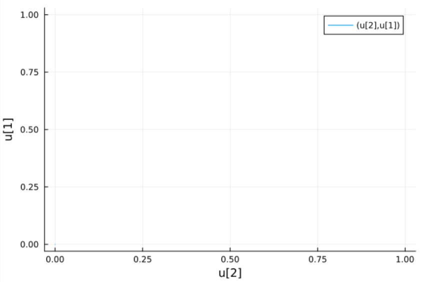

Рис. 2: Фазовый портет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без воздествия внешей силы на Julia

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica

В результате моделирования получились такие же график решения и фазовый портрет, как и для Julia:

1. Решение уравнения колебаний гармонического осциллятора для случая без затуханий и без воздествия внешей силы.

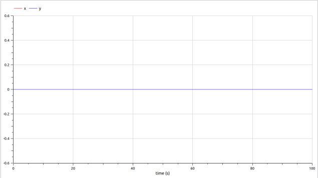

Рис. 3: График решения уравнения колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без воздествия внешей силы на OpenModelica

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica

2. Фазовый портрет колебаний гармонического осциилятора для случая без затуханий и без воздествия внешей силы.

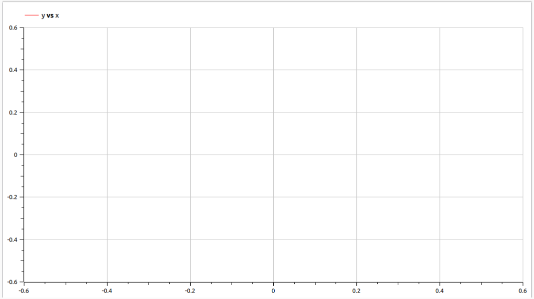

Рис. 4: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без воздествия внешей силы на OpenModelica

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica

Так как начальные условия равны нулю ($x_0 = 0, y_0 = 0$), то в итоге без затуханий и воздествия каких-либо внещних сил решением уранвения колебаний становятся две совпадающие друг с другом прямые, проходящие через центр координат. А фазовый портрет приобретает вид точки, которая находится в центре координат. Что мы, собственно, и видим на представленных графиках.

Уравнение для этого случая представлено в таком виде: $\ddot{x} + \dot{x} + 10x = 0$. Здесь $\omega^2 = 10$, а $g = 1$.

В результате работы кода сгенерировались такие изображения:

1. Решение уравнения колебаний гармонического осциллятора для случая с затуханиями и воздествия внешей силы.

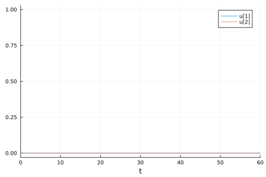

Рис. 5: График решения уравнения колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и без воздествия внешей силы на Julia

Колебания гармонического осциллятора с затуханиями и без действий внешней силы. Julia

2. Фазовый портрет колебаний гармонического осциилятора для случая с затуханиями и без воздествия внешей силы.

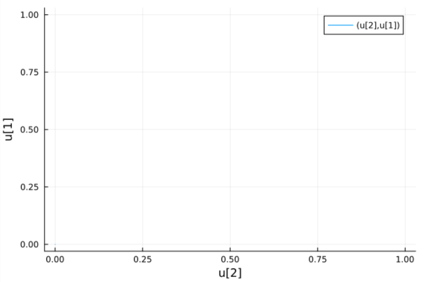

Рис. 6: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и без воздествия внешей силы на Julia

Колебания гармонического осциллятора с затуханиями и без действий внешней силы. OpenModelica

В результате моделирвоания:

1. Решение уравнения колебаний гармонического осциллятора для случая с затуханиями и без воздествия внешей силы.

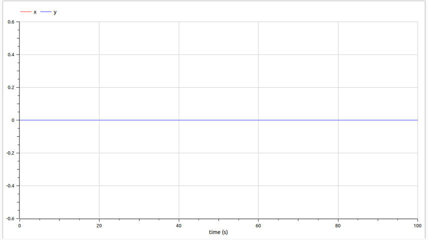

Рис. 7: График решения уравнения колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и без воздествия внешей силы на OpenModelica

Колебания гармонического осциллятора с затуханиями и без действий внешней силы. OpenModelica

2. Фазовый портрет колебаний гармонического осциилятора для случая с затуханием и без воздествия внешей силы.

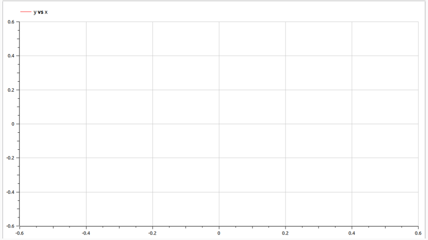

Рис. 8: Фазовый портет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без воздествия внешей силы на OpenModelica

Колебания гармонического осциллятора с затуханиями и без действий внешней силы. OpenModelica

Данные графики повторяют графики предыдущего случая, так как начальные условия остаются неизменны и превращают график решения уравнения в две совпадающие прямые, а фазовый портрет схлопывают в точку. Затухания никак не влияют на поведение графика в данном случае.

Колебания гармонического осциллятора с затуханиями и с действием внешней силы. Julia

Уравнение для этого случая представлено в таком виде:
$\ddot{x} + \dot{x} + 11x = 2cos(t)$. Здесь $\omega^2 = 11$, а $g = 1$.

В результате моделирования получились вот такие изображения:

Колебания гармонического осциллятора с затуханиями и с действием внешней силы. Julia

1. Решение уравнения колебаний гармонического осциллятора для случая с затуханиями и с воздествием внешей силы.

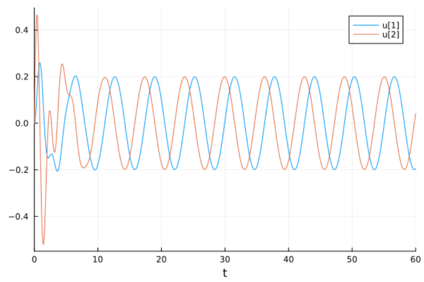

Рис. 9: График решения уравнения колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и с воздествием внешей силы на Julia

Колебания гармонического осциллятора с затуханиями и с действием внешней силы. Julia

2. Фазовый портрет колебаний гармонического осциилятора для случая с затуханиями и с воздествием внешей силы.

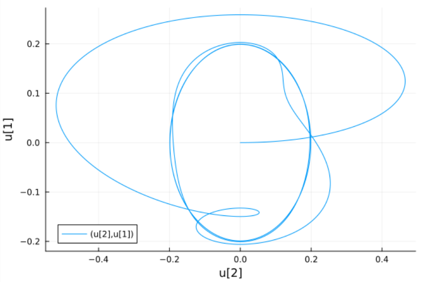

Рис. 10: Фазовый портет колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и с воздествием внешей силы на Julia

Колебания гармонического осциллятора с затуханиями и с действием внешней силы. OpenModelica

Результаты моделирования в данном случае:

1. Решение уравнения колебаний гармонического осциллятора для случая с затуханиями и с воздействием внешей силы.

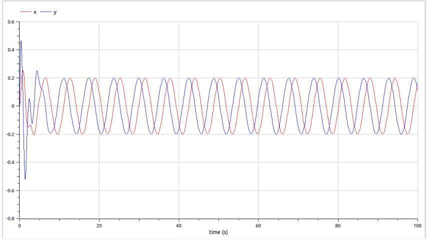

Рис. 11: График решения уравнения колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и с воздействием внешей силы на OpenModelica

Колебания гармонического осциллятора с затуханиями и с действием внешней силы. OpenModelica

2. Фазовый портрет колебаний гармонического осциилятора для случая с затуханиями и с воздествием внешей силы.

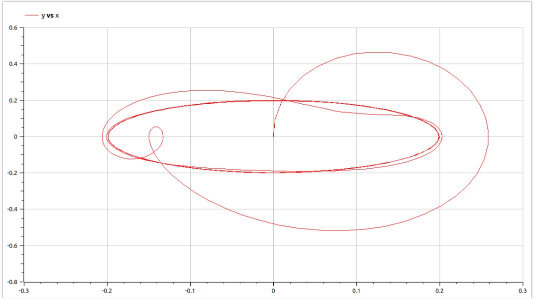

Рис. 12: Фазовый портет колебаний гармонического осциллятора с затуханиями и с воздествием внешей силы на OpenModelica

Колебания гармонического осциллятора с затуханиями и с действием внешней силы. OpenModelica

В результате вмешательства внешней силы график решения и фазовый портерт уже выглядят не так, как в предыдущих двух случаях. Графики на Julia и OpenModelica совпадают, немного отличаются лишь масштабом (фазовый портрет в OpemModelica получился более растянутым)

Вывод

Вывод

Были изучены понятия гармоничсекого осциллятора и гармонических колебаний, изучена модель колебаний гармонического осциллятора и с помощью нее построены графики решения уравнения и фазовые протреты для нескольких случаев в Julia и OpenModelica.