第 2 章　质点动力学

2.1 设半径为 r，密度为 $\rho_水$ 的雨滴在空气中竖直落下，空气对雨滴的阻力 f 与雨滴下降速度 v 的平方成正比，并可表示为 $f = csv^2$，这里 $s = \pi r^2$ 为雨滴的横截面积，c 为一个比例常数，试求雨滴下落的终极速度 v_T，并说明小雨滴和大雨滴在空气中哪个降落得比较快？

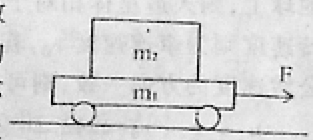
解：由空气阻力 $f = csv^2$ 可知：随着雨滴下降速度的增大，f 由 0 加大，直到与雨滴的重力 mg 相等，即

$$csv^2 = mg \tag{1}$$

此后，雨滴以终极速度 V_T 作匀速直线下落。把 $s = \pi r^2$、$m = 4\pi r^3 \rho_水 /3$ 代入(1) 式，可得终极速度

$V_T = \sqrt{4\rho_水 gr/3c}$，可见 v_T 与 $\sqrt{r}$ 成正比，因此大雨滴比小雨滴落得快。

2.2 用质量为 $m_1 = 50.0\text{kg}$ 的大板车，运送一质量为 $m_2 = 100\text{kg}$ 的木箱，如图题 2.2 所示，已知车板是水平的，木箱与车板之间的摩擦系数 $\mu = 0.500$，大板车与路面的滚动摩擦阻力可以忽略不计，问拉(或推) 大板车的水平分力 F 最大不能超过多少，才能保证木箱不致往后溜下？



图题 2.2　车送水箱

解：设木箱和车板之间的摩擦力为 $f \leqslant f_0 = \mu m_2 g$(最大静摩擦力)，$m_1$ 的加速度为 a_1，m_2 的加速度为 a_2，如图所示。

用隔离体法，写出牛顿第二定律的具体形式：

对 m_1：　$F - f = m_1 a_1$　(1)

对 m_2：　$f = m_2 a_2$　(2)

即有
$$a_1 = \frac{F - f}{m_1} \tag{1'}$$
$$a_2 = \frac{f}{m_2} \tag{2'}$$

要使 m_2 不往后溜，必须满足

$$a_1 \leqslant a_2 \tag{3}$$

以(1′)、(2′) 代入，得

$$\frac{F - f}{m_1} \leqslant \frac{f}{m_2} \text{ 即 } F \leqslant \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) f,$$

其中

$$f \leqslant \mu m_2 g\text{(最大静摩擦力)} \tag{4}$$

故

$$F \leqslant \mu(m_1 + m_2) g \tag{5}$$

代入数据得

$F \leqslant 0.5 \times (50 + 100) \times 9.8 = 735(N)$。

结论：要使木箱不往后溜，拉车或推车的水平分力小于等于 735N。

2.3 如图所示，以一力 F 阻止一质量为 m 物体从斜面上下滑(斜面的倾角 θ 大于临界角 $\theta_s = arctan\mu_s$。物体与斜面间的摩擦系数为 μ_s)。问阻止物体下滑的力 F 与斜面成多大角度时，所需的力 F 为最少?最小值 F 为多少？

解：设阻力与斜面之间的交角为 α，物体的受力图及坐标的选取如图所示。

根据 $F = ma$，则有：

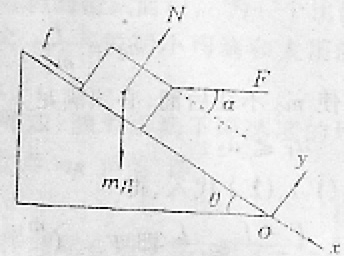
x 方向：$mg\sin\theta - F\cos\alpha - \mu_s N = ma_x = 0$ (1)

y 方向：$N - mg\cos\theta - F\sin\alpha = 0$ (2)

由(2)式求得 N，再代入(1)式得到

$$F = \frac{mg(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)}{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha} \qquad (3)$$

因为 mg，θ 和 μ_s 都已确定，所以(3)式中分子值不会改变，因此，当分母最大时，F 值即为最小。



图题 2.2

令 $\frac{d}{d\alpha}(\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha) = 0$，求得当

$\mathrm{tg}\alpha = \mu_s$, (4)

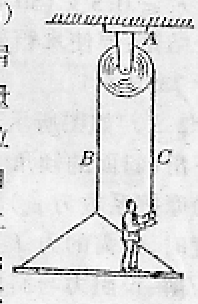
时，F 为最小，将(4)式代入(3)式，化简后得最小值 F 为

$$F_{min} = \frac{mg(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)}{\sqrt{1+\mu_s^2}} \qquad (5)$$

如果用临界角 $\theta_s = \arctan\mu_s$，代入(5)，则可得到

$F_{min} = mg\sin(\theta - \theta_s)$ (6)

2.4 如图题 2.4 所示，用绳 A 挂一滑轮，在轮上跨一绳，绳的 B 端挂一质量 40.0kg 的平台，C 端被站在平台上的人拉住，人的质量 80.0kg，当人用力拉绳，使自己和平台一起一加速度 $a = 5.00\mathrm{m/s^2}$ 上升时，试求：(1)A、B、C 各段绳上的张力；(2)人对平台的压力。(滑轮和绳的质量不计)



图题 2.4

解：$T_C + N - m_人 g = m_人 a$ (1)

$T_B - N - m_台 g = m_台 a$ (2)

$T_B = T_C$ (3)

由上述三式可得

(1) $T_B = T_C = (m_人 + m_台)(g + a)/2$

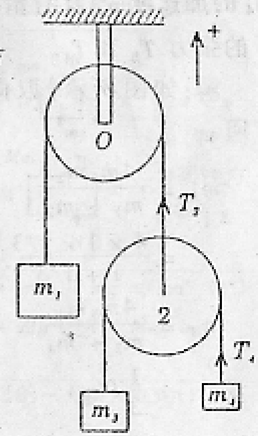
$= 888(\mathrm{N})$

$T_A = 2T_B = (m_人 + m_台)(g + a)$

$= 1.78 \times 10^3(\mathrm{N})$

(2) $N = m_人(g + a) - T_C = 296(\mathrm{N})$

*2.5 图题 2.5 为最简单的复合阿特伍德机，其中 O 为定滑轮，2 为动滑轮，滑轮和绳的质量均可忽略。当 $m_1 = 2.00\mathrm{kg}$，$m_3 = 1.00\mathrm{kg}$，$m_4 = 0.500\mathrm{kg}$ 时，试求：(1) 物体 m_1，m_3 和 m_4 的加速度 a_{1i}，a_{3i} 和 a_{4i}；(2) 每条绳上的张力，即 T_3，T_4 各为多少？



图题 2.5

解：(1) 如图，取向上为坐标正方向。则有

$$m_2 = \frac{4m_3m_4}{m_3 + m_4} = \frac{4\times1\times0.5}{1+0.5}$$

$$= \frac{4}{3}(\mathrm{kg})$$

$$a_{20} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a_{0i})$$

$$= \frac{2 - 4/3}{2 + 4/3}(9.8 + 0)$$

$$= 1.96(\mathrm{m/s^2})。$$

$a_{2i} = a_{20} + a_{0i} = 1.96(\mathrm{m/s^2})$。

$a_{1i} = -a_{2i} = -1.96(\mathrm{m/s^2})$。

$$a_{42} = \frac{m_3 - m_4}{m_3 + m_4}(g + a_{2i})$$

$$= \frac{1 - 0.5}{1 + 0.5}(9.8 + 1.96) = 3.92(\mathrm{m/s})。$$

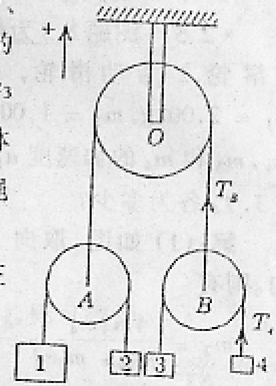
$$a_{4i} = a_{42} + a_{2i} = 3.92 + 1.96 = 5.88(\mathrm{m/s^2})。$$

$$a_{3i} = a_{32} + a_{2i} = -3.92 + 1.96 = -1.96(\mathrm{m/s^2})。$$

(2) $T_2 = m_2 g + m_2 a_{2i} = \frac{4}{3} \times 9.8 + \frac{4}{3} \times 1.96 = 15.7(\mathrm{N})$

$$T_4 = m_4(g + a_{4i}) = 0.5 \times (9.8 + 5.88) = 7.84(\mathrm{N})$$

*2.6　图题 2.6 为含滑轮 O、A、B 的复合阿特伍德机，滑轮和绳的质量均可忽略，当 $m_1 = 1\mathrm{kg}$，$m_2 = m_3 = \frac{1}{3}\mathrm{kg}$，$m_4 = \frac{1}{9}\mathrm{kg}$ 时，试求：(1) 物体 m_4 的加速度 a_{4i}；(2) 滑轮 O 和 B 上绳子的张力 T_B 和 T_4。



图题 2.6

解：如图所示，取向上为坐标正方向。

$$m_A = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{4 \times 1 \times 1/3}{1 + 1/3} = 1(\mathrm{kg})$$

$$m_B = \frac{4m_3 m_4}{m_3 + m_4} = \frac{4 \times 1/3 \times 1/9}{1/3 + 1/9}$$

$$= \frac{1}{3}(\mathrm{kg})$$

$$a_{B0} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}(g + a_{0i}) = \frac{1 - 1/3}{1 + 1/3}g = \frac{1}{2}g$$

$$= 4.9(\mathrm{m/s^2}) = a_{Bi} = -a_{A0}$$

$$a_{4B} = \frac{m_3 - m_4}{m_3 + m_4}(g + a_{Bi})$$

$$= \frac{1/3 - 1/9}{1/3 + 1/9}(g + \frac{1}{2}g) = \frac{3}{4}(g)$$

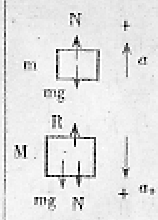
$$a_{4i} = a_{4B} + a_{B0} = \frac{3}{4}g + \frac{1}{2}g = \frac{5}{4}g = 12.25(\mathrm{m/s^2})$$

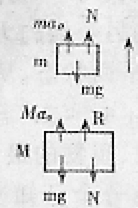
$$T_4 = m_4(g + a_{4i}) = \frac{1}{9} \times (g + \frac{5}{4}g) = \frac{1}{4}g = 2.45(\mathrm{N})$$

$$T_B = m_B(g + a_{Bi}) = \frac{1}{3} \times (g + \frac{1}{2}g) = \frac{1}{2}g = 4.9(\mathrm{N})$$

*2.7　当升降机以 $g/3$ 的加速度下降时，电梯中质量为 M 的人开始以相对于电梯为 $2g/3$ 的加速度向上举一质量为 m 的重物。试分别以地面和升降机为参照系，求人对升降机地板的压力 R。

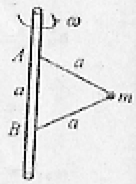
解：

<table>
<tr><th>步骤</th><th>以地面为参照系</th><th>以升降机为参照系</th></tr>
<tr><td>受力图</td><td>

R 为地板对人的作用力。N 为人和物体间相互作用力</td><td>

$a_0 = \frac{1}{3}g$
ma_0 和 Ma_0 为惯性力
$a' = \frac{2}{3}g$</td></tr>
<tr><td>列方程</td><td>$N - mg = ma$　(1)
$N + Mg - R = Ma_0$　(2)
$a = a' - a_0$　(3)</td><td>$N + ma_0 - mg = ma'$　(1')
$N + Mg - R - Ma_0 = 0$　(2')</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">把式(3)代入(1)就可看出两边方程的一致性，由式(1')减去式(2')，并代入
$a_0 = \frac{1}{3}g$，$a' = \frac{2}{3}g$ 后，可得 $R = (2M + 4m)g/3$</td></tr>
</table>

*2.8　两根长为 a 的绳子连住一质量 m 的小球。两绳的另一端分别固定在相距为 a 的棒的两点上，今使小球在水平面内绕棒作匀速圆周运动。求：(1) 转速多大时，下面一根绳子刚伸直？(2) 在(1)的情况下，上面一根绳子张力为多大？



图题2.8

解：解法一：以地球为参照系，列分量式：

$$F_n = ma_n \qquad 得：T\sin60^\circ = ma\sin60^\circ\omega^2 \tag{1}$$

$$F_y = ma_y \qquad 得：T\cos60^\circ = mg \tag{2}$$

由式(2)得 $T = 2mg$，代入式(1)得 $2mg = ma\omega^2$

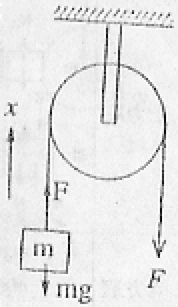
$$\omega = \sqrt{2g/a} \qquad 且 \qquad T = 2mg$$

解法二：以作匀角速转动的小球作参照系，用非惯性系中的运动定律求解此题。最后其列式和结果与解法一相同。请自试之。

*2.9　如图题2.9所示，一根不可伸长的无摩擦的轻绳跨过定滑轮，绳子一端挂一质量 $m = 1.0\text{kg}$ 的重物，绳的另一端施力 F，当 $F = 9.8\text{N}$ 时，此系统处于平衡状态。从某一时刻开始，拉力按 $F = 9.8 + 4t - 2t^2$ 规律作用。问当拉力 F 变为 9.8N 时，重物的最大速度是多少？

解：这是一个已知变力和质量求运动的问题。

如图选 ox 轴，并作受力图。由牛顿第二定律：



图题2.9

$$\Sigma F = m\frac{dv}{dt} \text{ 得：}$$

$$(9.8 + 4t - 2t^2) - mg = m\frac{dv}{dt}$$

即 $[(9.8 + 4t - 2t^2) - mg]dt = mdv$

两边积分，并代入上，下限(当 $t = 0$ 时，$v_0 = 0$)，得

$$\int_0^t (9.8 + 4t - 2t^2 - mg)\,dt = m\int_0^v dv \tag{1}$$

当拉力变为 $9.8N$ 时，即

$$F = 9.8 + 4t - 2t^2 = 9.8$$

求得积分上限 $t = 2s$，并代入(1)式积分上限

$$\int_0^2 (9.8 + 4t - 2t^2 - mg)\,dt = m\int_0^v dv$$

即 $mv = (9.8t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3 - mgt)\big|_0^{t=2}$　　(2)

因 $F = 9.8\text{N}$ 时，系统处于平衡，则有 $mg = 9.8\text{N}$，

将 $m = 1\text{kg}$，$mg = 9.8\text{N}$，$t = 2\text{s}$ 代入(2)式得

$$v = (9.8\times2 + 2\times2^2 - \frac{2}{3}\times2^3 - 9.8\times2 = 2.67(\text{m/s})$$