Σημειώσεις (Feynman, Vol. I, Κεφ. 28--33): Από τις εξισώσεις Maxwell σε κύματα, υλικά, και «γέφυρα» προς FDTD

Στόχος. Να κρατήσω μόνο τα *pivotal* βήματα/εξισώσεις που χρησιμοποιώ σαν νοητικό «σκελετό»: (α) πώς προκύπτει η εικόνα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (Maxwell), (β) πώς ο Feynman στο Κεφ. 28--29 περνάει σε *ακτινοβολία* με καθυστέρηση (retardation), (γ) πώς η *συμβολή/περίθλαση* είναι απλώς άθροισμα φάσεων, (δ) πώς το *υλικό* δίνει δείκτη διάθλασης μέσω *ταλαντωτών* (Lorentz model), (ε) πώς μετράμε *ενέργεια/ισχύ* (Poynting/Larmor), (στ) γιατί η *πόλωση* είναι αναγκαστικά διανυσματικό παιχνίδι. Στο τέλος γράφω 1 σελίδα «μετάφραση» προς FDTD.

1 Το minimum από Maxwell που θέλω για FDTD (και το σχόλιο του Feynman)

Ο Feynman στο Κεφ. 28 υπενθυμίζει ότι ο Maxwell είδε ασυνέπειες στους τότε νόμους και *έπρεπε να προσθέσει έναν όρο* (η «διόρθωση» που σήμερα λέμε *displacement current*). Αυτό είναι το κομμάτι που κάνει τα κύματα/το φως να πέφτουν σαν $1/r$ και όχι σαν $1/r^2$.

Για το FDTD παίρνω τις εξισώσεις Maxwell σε διαφορική μορφή (SI):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{2}$$

Η κρίσιμη «Maxwell-προσθήκη» είναι ο όρος $\mu_0\varepsilon_0\,\partial\mathbf{E}/\partial t$.

Το pivot derivation: κύμα στο κενό. Στο κενό ($\rho = 0, \mathbf{J} = 0$):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Με $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ και $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E}, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}.$$

(Το ίδιο και για $\mathbf{B}$.) *Αυτό* είναι το PDE που εγώ «βλέπω» πίσω από κάθε FDTD update.

2 Κεφ. 28--29: Ακτινοβολία και καθυστέρηση (retarded time)

2.1 Η βασική ιδέα: ό,τι βλέπεις τώρα προέρχεται από το παρελθόν

Ο Feynman το λέει με μια απλή εικόνα: *«Σαν το φορτίο να κουβαλάει ένα φως»* --- άρα δεν «βλέπεις» πού είναι τώρα, αλλά πού *ήταν* όταν έφυγε το σήμα, με καθυστέρηση r/c.

2.2 Το pivot αποτέλεσμα: το $1/r$ κομμάτι (radiation term)

Στο Κεφ. 28 γράφει μια (συμπυκνωμένη) έκφραση για **E** από κινούμενο φορτίο που έχει 3 κομμάτια: *Coulomb* ($\sim 1/r^2$), μια *διόρθωση καθυστέρησης* ($\sim 1/r^2$), και το *ακτινοβολούμενο* μέρος ($\sim 1/r$). Το κρίσιμο είναι ότι, μακριά, κρατάμε μόνο το τρίτο:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} \;\propto\; \frac{1}{c^2}\frac{d^2\hat{\mathbf{r}}'}{dt^2} \quad\Longrightarrow\quad E_x(t) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c^2\, r}\, a_x\Big(t - \frac{r}{c}\Big). \tag{3}$$

(Αυτό είναι η «καθαρή» μορφή που ο Feynman παίρνει ως νόμο για μη-σχετικιστική κίνηση, σε μεγάλη απόσταση.)

Στο Κεφ. 29 το γράφει και με γωνιακή εξάρτηση (dipole pattern):

$$E(t) = \frac{-q\, a(t - r/c)\, \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2\, r}. \tag{4}$$

2.3 Αναλογία-κλειδί που χρησιμοποιεί: «snapshot = αντεστραμμένο» $a(t)$

Στο Κεφ. 29 δείχνει ότι $a(t - r/c)$ σημαίνει:

- σε κάθε σημείο, το πεδίο «γράφει» την επιτάχυνση σε *προηγούμενο* χρόνο,
- αν κοιτάξεις σε μια *στιγμή* το E ως συνάρτηση του r, παίρνεις ουσιαστικά ένα «αντεστραμμένο» γράφημα του $a(t)$,
- το μοτίβο μετακινείται προς τα έξω με ταχύτητα c.

Μαθηματικά: για φάση $\phi = \omega(t - r/c)$, ο κυματάριθμος είναι

$$k = \left|\frac{\partial\phi}{\partial r}\right| = \frac{\omega}{c}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \tag{5}$$

Για FDTD αυτό μεταφράζεται απλά ως: *η πληροφορία ταξιδεύει με c και η φάση «μετριέται» στον χώρο.*

3 Κεφ. 29--30: Συμβολή/Περίθλαση = άθροισμα (πολλών) φάσεων

3.1 Το pivot: προσθέτεις πλάτη, μετράς ένταση

Ο Feynman τονίζει επανειλημμένα ότι αυτό που «φαίνεται» (ισχύς/ένταση) είναι ανάλογο του τετραγώνου:

$$I \propto \langle E^2\rangle.$$

Όταν αθροίζεις δύο συνεισφορές (σύνθετα πλάτη) παίρνεις:

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2). \tag{6}$$

(Το *cross term* είναι όλη η συμβολή.)

3.2 Κεφ. 30: n ίσοι ταλαντωτές (grating) και το γεωμετρικό «πολύγωνο»

Το βασικό άθροισμα που γράφει είναι:

$$R = A\sum_{s=0}^{n-1}\cos(\omega t + s\phi), \qquad \phi = \alpha + \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}. \tag{7}$$

Η ωραία ιδέα είναι ότι αυτό είναι *πολύγωνο* στο μιγαδικό επίπεδο (ίσα διανύσματα με σταθερή γωνία μεταξύ τους).

Ένα απλό, χρήσιμο αποτέλεσμα για «ικανότητα διαχωρισμού» (resolving power) φράγματος:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mn}. \tag{8}$$

3.3 Η «παράξενη» αλλά πρακτική αρχή οπών

Στην περίθλαση από οπές/σκιά, ο Feynman λέει ότι παίρνεις πολύ καλή προσέγγιση αν:

> θεωρήσεις τις **οπές** σαν να είναι οι «πηγές» με φάσεις όπως θα ήταν *αν δεν υπήρχε* το αδιαφανές.

Αυτό είναι χρήσιμο ως mental model: *η γεωμετρία του ανοίγματος μπαίνει σαν χωρική κατανομή πηγών.*

4 Κεφ. 31: Δείκτης διάθλασης από «άτομα-ταλαντωτές» (Lorentz)

4.1 Το pivot: διάθλαση = καθυστέρηση φάσης

Για μια λεπτή πλάκα πάχους Δz ο Feynman γράφει το «όλο αποτέλεσμα» ως καθυστέρηση:

$$E_{\text{after}} = e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c}\, E_s \approx \left(1 - i\omega\frac{(n-1)\Delta z}{c}\right) E_s = E_s + E_a. \tag{9}$$

Δηλαδή: **το υλικό προσθέτει ένα μικρό πεδίο** E_a σχεδόν κάθετο (σε φάση) στο E_s.

4.2 Το pivot μοντέλο: ο ηλεκτρόνιος σαν ελατήριο

Το άτομο μοντελοποιείται σαν γραμμικός ταλαντωτής:

$$m\left(\ddot{x} + \omega_0^2 x\right) = q_e E_0 e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}. \tag{10}$$

4.3 Το κύριο αποτέλεσμα: $n(\omega)$

Στο τέλος παίρνει:

$$n = 1 + \frac{N q_e^2}{2\varepsilon_0\, m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{11}$$

Για FDTD: αυτό είναι πρακτικά το ίδιο με *Lorentz dispersive medium*. Αν θες να το βάλεις στον χρόνο, κρατάς μια δυναμική για την πόλωση P (Auxiliary Differential Equation) της μορφής $\ddot{P} + \omega_0^2 P \propto E$.

5 Κεφ. 32: Ενέργεια, Poynting, Larmor, damping, σκέδαση

5.1 Ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας: «η αντίσταση του κενού»

Ο Feynman γράφει ότι το ενεργειακό flux είναι $\varepsilon_0 c E^2$ και ότι

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c} = 377\ \Omega,$$

άρα (για κυματομορφές) η ισχύς/εμβαδόν είναι *μέσο* E^2 διαιρεμένο με 377.

5.2 Larmor (ολική ακτινοβολούμενη ισχύς)

Για επιταχυνόμενο φορτίο, η ροή ισχύος ανά m^2 στη διεύθυνση θ:

$$S(\theta) = \frac{q^2 a'^2 \sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 r^2 c^3}. \tag{12}$$

Ολοκληρώνοντας σε όλες τις γωνίες:

$$P = \frac{q^2 a'^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}. \tag{13}$$

Για FDTD: η αντίστοιχη «μετρήσιμη» ποσότητα είναι $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ και ολοκλήρωση σε κλειστή επιφάνεια.

5.3 Radiation damping (η απώλεια κάνει το ταλαντωτή να σβήνει)

Ο Feynman ορίζει Q ως

$$Q = -\frac{\omega W}{dW/dt},$$

και δείχνει πως ακόμη και χωρίς «τριβή», ένα φορτισμένο ελατήριο σβήνει επειδή *ακτινοβολεί*.

5.4 Σκέδαση: γιατί συχνά δεν βλέπεις συμβολή

Με πολλούς τυχαίους σκεδαστές, οι φάσεις αλλάζουν «άναρχα» και τα cross terms κατά μέσο όρο μηδενίζονται, άρα μένει περίπου άθροισμα εντάσεων.

6 Κεφ. 33: Πόλωση = το E είναι *διάνυσμα*

6.1 Το pivot: δύο κάθετες ταλαντώσεις $\Rightarrow$ έλλειψη

Ο Feynman ξεκινάει από υπέρθεση δύο κάθετων συνιστωσών ίδιας συχνότητας:

$$E_x = A\cos(\omega t), \qquad E_y = B\cos(\omega t + \delta).$$

- $\delta = 0$ (ή π): γραμμική πόλωση.
- $\delta = \pm\pi/2$ και $A = B$: κυκλική πόλωση.
- γενικά: ελλειπτική πόλωση.

Η αναλογία που χρησιμοποιεί για την έλλειψη είναι **ένα εκκρεμές/μπάλα σε νήμα** που μπορεί να ταλαντώνεται σε x και y με ίδια συχνότητα --- αν οι φάσεις δεν ταιριάζουν, η τροχιά γίνεται έλλειψη.

6.2 Unpolarized light (πρακτικά) = γρήγορα μεταβαλλόμενη πόλωση

Αν η πόλωση αλλάζει ταχύτερα απ' όσο μπορείς να τη «δειγματοληπτήσεις», τότε οι πολωτικοί όροι κατά μέσο όρο σβήνουν και το φως λέγεται μη-πολωμένο.

6.3 Διπλοθλαστικότητα/πλάκες $\lambda/2$: διαφορετικές ταχύτητες για διαφορετικούς άξονες

Στο παράδειγμα με cellophane/polaroids, το υλικό συμπεριφέρεται σαν να έχει δύο ταχύτητες (δύο δείκτες) για δύο κάθετες διευθύνσεις πόλωσης. Μια *half-wave* πλάκα μπορεί να περιστρέψει γραμμική πόλωση κατά $90°$ όταν η είσοδος είναι στα $45°$ ως προς τον οπτικό άξονα.

7 Μίνι «μετάφραση» προς FDTD (πώς θα το έστηνα σαν πρόβλημα)

1) Ποιο PDE λύνω;

Λύνω τα curl-Maxwell στον χρόνο:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \qquad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J},$$

με $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ και $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ (ή διασπορά με $P(t)$).

2) Το update mental model (leapfrog)

Σκέφτομαι ότι **η μεταβολή του E «γεννά» H και αντίστροφα**. Άρα χρονικά τα ενημερώνω εναλλάξ (leapfrog).

3) Courant stability (ένα αριθμητικό παράδειγμα)

Για 3D ο περιορισμός είναι περίπου:

$$\Delta t \le \frac{1}{c\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}.$$

Παράδειγμα: αν $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$ mm, τότε $\Delta t_{\text{max}} \approx \frac{10^{-3}}{(3\times 10^8)\sqrt{3}} \approx 1.9 \times 10^{-12}$ s.

4) Πηγές και παρατηρήσιμα

- **Πηγή dipole:** ρεύμα $\mathbf{J}(t)$ σε ένα κελί $\Rightarrow$ εκπέμπει, σαν το Κεφ. 28--29.
- **Μετρήσεις:** $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, ολοκλήρωση σε επιφάνεια $\Rightarrow$ ισχύς (Κεφ. 32).
- **Συμβολή/περίθλαση:** παίρνω πεδία σε πολλαπλά σημεία και φτιάχνω pattern από $|E|^2$ (Κεφ. 29--30).
- **Υλικά:** σταθερό $n \Rightarrow \varepsilon_r = n^2 \cdot$ διασπορά $\Rightarrow$ Lorentz ADE από το Κεφ. 31.
- **Πόλωση/ανισοτροπία:** κρατάω τα 3 components και (αν χρειαστεί) tensor ε (Κεφ. 33).

Κλείσιμο: Αν κάποιος καταλάβει αυτά τα pivots, τότε το FDTD γίνεται απλώς *μηχανική*: διακριτοποίηση των curl-Maxwell + σωστά Δt + σωστά υλικά + σωστή μέτρηση ισχύος/μοτίβων.