Helmholtz Equations

معادلات هلمهولتز

طبق معادلات ماکسول

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

برای امواج مسطح یکنواخت فرض می‌کنیم که فقط در یک راستا تغییر داریم فرض می‌کنیم

این جهت $z+$ باشد پس $\partial/\partial y = \partial/\partial x = 0$ با استفاده از معادلات ماکسول

می‌توان نوشت

$$\partial E_x/\partial z = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (1)$$

$$-\partial H_y/\partial z = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (2)$$

می‌توان این معادلات را در حالت دائمی سینوسی نوشت (فازور)

$$\frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu H_y \quad (3)$$

پس خواهیم داشت

$$-\frac{dH_y}{dz} = j\omega\epsilon E_x \quad (4)$$

از (3) مشتق گرفته و در (4) قرار می‌دهیم

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = -\omega^2 \mu \epsilon E_x$$

این معادله هم از معادله موج است که به صورت فازوری نوشته شده است این معادله را معادله هلمهولتز یک بعدی می‌نامند، جواب این معادله جمله‌های نمایی است

$$E_x = c_1 e^{-jkz} + c_2 e^{+jkz}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

برای به دست آوردن معادله فوق کافی است به حوزه زمان برگردیم برای این کار داریم

$$E_x(z,t) = Re[E_x e^{j\omega t}] = Re[c_1 e^{-jkz} + c_2 e^{jkz}] e^{j\omega t}$$

$$E_x = c_1 \cos(\omega t - kz) + c_2 \cos(\omega t + kz)$$

← در حالت کلی معادله هلمهولتز، موج صفحه‌ای زیر پاسخ معادله خواهد بود

$$U(\vec{r}) = A e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$\vec{k}$: راستای انتشار

پس با انتقال این معادله به حوزه زمان (همان طور که برای حالت یک بعدی انجام شد) می‌توان رفتار موج را توجیه کرد.

در سوال سوم تمرین کامپیوتری یک فریم در نظر گرفته شده پس $t = t_0$ و تنها رفتار موج در راستای انتشار یعنی (z) خواسته شده است.