



دانشکده فنی دانشگاه تهران  
دانشکده برق و کامپیوتر

---

## تمرین کامپیوتری دوم

### ریاضیات مهندسی

دکتر طالع ماسوله

حل معادلات PDE

---

ایمیل

[alisaei90@gmail.com](mailto:alisaei90@gmail.com)

طراح

علی ساعی زاده

نیمسال اول 99-1400

دانشجویان عزیز، قبل از پاسخگویی به سوالات به نکات زیر توجه کنید:

- شما باید کدها و گزارش خود را با الگو EM\_CA2\_StudentNumber.zip در محل تعیین شده آپلود کنید.
- پیاده سازی های خود را در محیط MATLAB انجام دهید و کد های خود را همراه با گزارش ارسال کنید.
- در نمودارها حتماً xlabel(), ylabel() و title() برای نامگذاری استفاده کنید.
- پیشنهاد می شود از live script matlab (mlx) برای کد زدن و تهیه گزارش کار استفاده شود و گزارش خروجی آن ( pdf یا HTML) قابل قبول است.
- گزارشکار معیار اصلی ارزیابی خواهد بود، در نتیجه زمان کافی برای تکمیل آن اختصاص دهید.
- در زمانی که بعداً به شما اعلام خواهد، این تمرین کامپیوتری به صورت آنلاین از شما تحویل گرفته خواهد شد.
- در صورت کشف هر گونه تقلب، نمره طرفین صفر منظور خواهد شد.
- شما می توانید هر گونه ابهام و سوال از طریق ایمیل [من](#) و همچنین گروه درسی در تلگرام بپرسید.

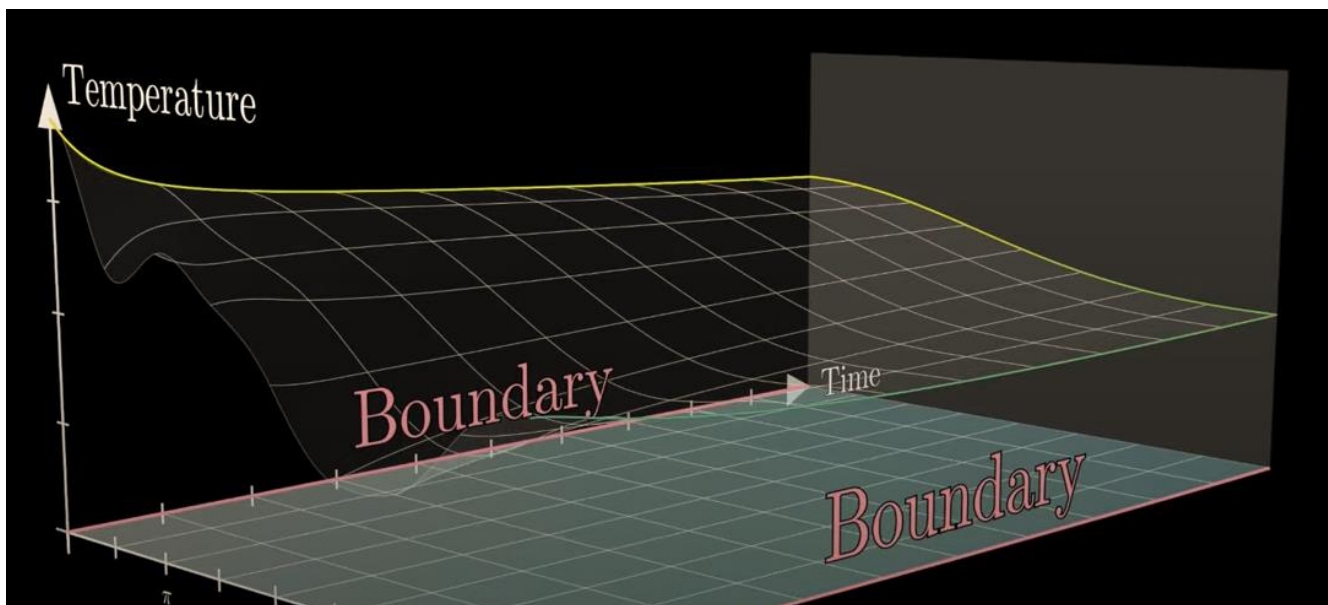
در این درس با معادلات PDE آشنا شدید، معادلات دیفرانسیل در علوم پایه نظیر ریاضی، علوم کامپیوتر، فیزیک، شیمی، زیست شناسی و ستاره شناسی و همچنین علوم مهندسی نظیر مکانیک، برق، مواد و مهندسی شیمی کاربردی گسترده و حضوری چشمگیر دارند. در این [لینک](#) می توانید بخش کوچکی از کاربرد های معادلات PDE را ببینید. این معادلات با توجه به نوع معادله و شرایط مرزی تنوع زیادی دارند. در این تمرین کامپیوتری سعی داریم بخشی از این معادلات که درس بررسی شده است را به کمک نرم افزار MATLAB حل و تحلیل کنیم.

## بخش اول: حل معادله حرارت<sup>1</sup>

بطور کلی معادله حرارت، نشان دهنده توزیع حرارت در یک دامنه است. با دیدن این [لینک](#) می توانید دید کلی نسبت به این بخش پیدا کنید.

بطور کلی برای حل این معادله  $T(x, t)$  سه شرایط باید مشخص شوند؛

- نوع معادله
- شرایط مرزی
- شرایط اولیه



شکل 1 نمونه شکل سه بعدی حل معادله حرارت

<sup>1</sup> Heat Equation

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad t > 0 \\
 u_x(0, t) &= 0 \\
 u_x(2\pi, t) &= 0 \\
 u(x, 0) &= x = f(x)
 \end{aligned}$$

(\*) معادله فوق را بصورت دستی حل کنید و راه حل را در گزارش خود ارائه دهید.

(\*) از نظر فیزیکی جواب بدست آمده و راه حل خود را به طور مختصر تحلیل کنید.

همانطور که گفته شد برای حل معادله PDE نیاز به بررسی سه شرط داریم، حال میخواهیم به کمک متلب و تابع pdepe این معادله را حل، رسم و تصویرسازی کنیم تا دید بهتری نسبت به این معادله پیدا کنیم. چراخ راه ما در این پیاده سازی این [لینک](#)، مربوط به help نرم افزار متلب خواهد بود و در سه مرحله بطور خلاصه در دستور تمرین کامپیوتری ذکر خواهد شد. برای پیاده سازی دقیق به [لینک](#) داده شده رجوع کنید.

## 1. نوع معادله

در این مرحله باید معادله را به فرمی که تابع pdepe از ما انتظار دارد درآوریم این معادله به شکل زیر خواهد بود؛

$$c\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^m f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right) + s\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

برای مشخص کردن فرم کلی معادله در متلب یک تابع به شکل زیر تعریف کنید و ضرایب را مقداردهی کنید

```
function [c, f, s] = pdefun(x, t, u, DuDx)
c = ...;
f = ...;
s = ...;
end
```

(\*) تابع pdefun را پیاده سازی کنید.

## 2. شرایط اولیه

مشخص کردن شرایط اولیه بسیار ساده است. به دلیل اینکه که شرایط اولیه توصیف در لحظه  $t=0$  است، بنابراین نیازی به متغیر  $t$  نداریم. فقط کافی است تا مقدار خروجی را برحسب  $x$  مشخص کنید.

$$u(x, 0) = f(x)$$

```
function u = icfun(x)
u = ...; %f(x)
end
```

(\*) تابع icfun را پیاده سازی کنید.

## 3. شرایط مرزی

```
function [p1,q1,pr,qr] = bcfun(xl,ul,xr,ur,t)
    p1 = ...;
    q1 = ...;
    pr = ...;
    qr = ...;
end
```

• ضرایب مربوط به شرایط مرزی در  $x_l = x$

•  $qr, pr$  ضرایب مربوط به شرایط مرزی در  $x_r = x$

•  $ul$  ضریب مربوط به دما در  $x_l = x$

•  $ur$  ضریب مربوط به دما در  $x_r = x$

(\*) تابع `bcfun` را پیاده سازی کنید.

حال می خواهیم معادله را به کمک سه شرایط فوق حل کنیم؛

از دستور زیر استفاده می کنیم.

```
sol = pdepe(m, @pdefun, @pdeicfun, @bcfun, x, t);
```

(\*) نمودار دما برحسب زمان را در مرکز میله رسم کنید و آن را تحلیل کنید.

(\*) نمودار سه بعدی دما برحسب زمان و مکان را رسم کنید و آن را تحلیل کنید.

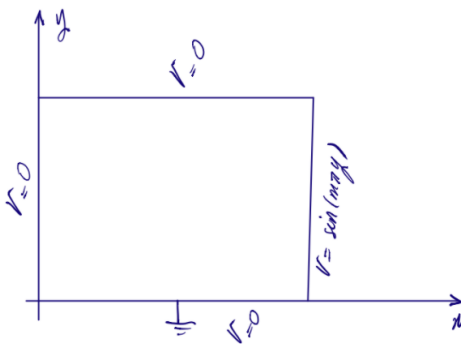
(\*) نمودارهای بدست آمده را با حل دستی خود مقایسه و تحلیل کنید.

## بخش دوم: حل معادله لاپلاس<sup>۲</sup>

معادله لاپلاس کاربرد گسترده‌ای در حل مسائل مهندسی و فیزیک دارد و برای مثال یکی از کاربردهای آن در بررسی رفتار امواج در کابل‌های کوآکسیال است. در این [لینک](#) می‌توانید رفتار این معادله مشاهده کنید.

در این بخش می‌خواهیم به حل این معادله در محیط متلب بپردازیم.

یک ناحیه مربعی به اضلاع ۱ متر داریم. اضلاع فلزی هستند و ضلع سمت راست دارای ولتاژ  $\sin(m\pi y)$  است و بقیه ی اضلاع به ولتاژ صفر ولت متصل شده‌اند. قصد داریم مقادیر ولتاژ را در نقاط مختلف به کمک متلب به دست بیاوریم.



شکل ۲ شرایط مرزی معادله لاپلاس

A = student number

M = a%3 +1

ابتدا به صورت دستی به حل این مسئله می‌پردازیم.

(\*) معادله را با استفاده از شرایط مرزی حل کنید.

(\*) با استفاده از دستور meshgrid ماتریسهای  $m$  در  $m$ ، با نام‌های  $X$  و  $Y$  را بسازید.

(\*) مقدار پتانسیل در نقاط مختلف را به صورت رنگی نمایش دهید.

(\*) مقدار میدان الکتریکی در نقاط مختلف را نمایش دهید.

(\*) خطوط هم پتانسیل را در نمودار نمایش دهید.

نکته: می‌توانید از دستورهای gradient, quiver, contour کمک بگیرید.

حال قصد داریم این معادله در محیط pdeModeler حل کنیم. بهتر است به آموزش ارائه شده در این تمرین اکتفا نکرده و به help مراجعه کنید.

### آموزش حل لاپلاس در متلب

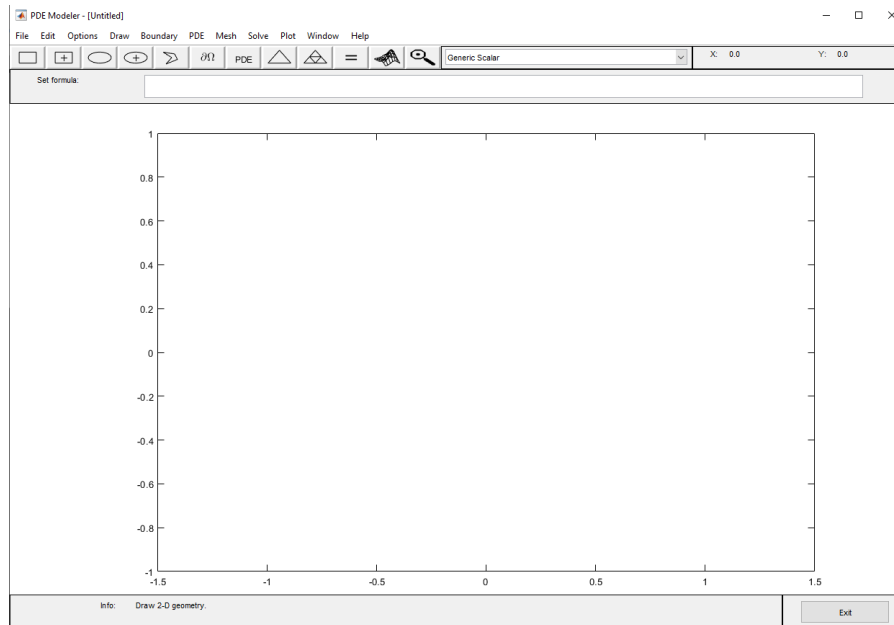
ابتدا فرض کنید که ناحیه به صورت یک مربع یک در یک است. که از مبدأ مختصات شروع می‌شود و رأس بالا سمت راست، در نقطه (1,1) قرار

<sup>2</sup> Laplace Equation

دارد. ضلع سمت چپ را به منبع ولتاژ 5 ولت وصل می کنیم. سایر اضلاع به ولتاژ صفر ولت متصل هستند. حالا می خواهیم مقادیر ولتاژ را در نواحی مختلف به دست آوریم.

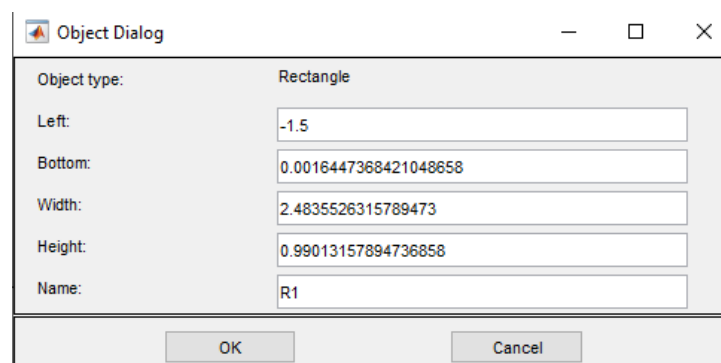
## مشخص کردن ناحیه

ابتدا دستور pdeModeler را در CommandWindow وارد کنید. پنجره جدیدی مانند تصویر زیر باز می شود.



از گوشه بالا سمت چپ گزینه رسم مستطیل (گزینه اول) را انتخاب کنید. سپس مستطیلی را رسم کنید.

نشانگر ماوس را روی شکل قرار دهید و سپس دو بار کلیک راست را فشار دهید. پنجره Object Dialog باز خواهد شد.



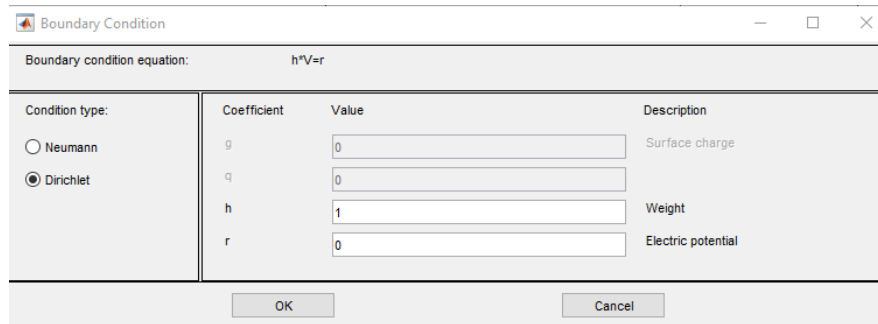
قصد داریم نقطه شروع مربع را مشخص کنیم. مقادیر Left و Bottom را برابر صفر قرار دهید.

برای مشخص کردن اندازه مربع مقادیر Width و Height را برابر یک قرار دهید. ناحیه موردنظر را مشخص کردیم.

ابتدا لازم است تا برای نرم افزار متلب مشخص کنیم که حل چه نوع مسئله ای مدنظر است. در اینجا قصد داریم تا مسئله الکترواستاتیک را حل کنیم. از نوار ابزار گزینه Electrostatics را انتخاب کنید.

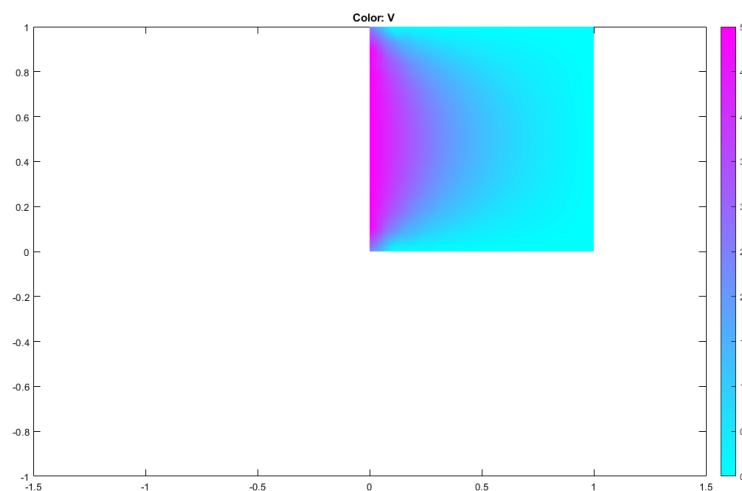


حال از نوار ابزار گزینه  $\partial\Omega$  Boundary Mode را انتخاب کنید. سپس روی ضلع سمت چپ دو بار کلیک کنید. پنجره ی Boundary Condition باز خواهد شد.



فرم کلی به صورت  $h \cdot V = r$  است. بنابراین ضریب  $h$  را برابر یک قرار دهید. ضریب  $r$  را برابر 5 قرار دهید. سپس دکمه تأیید را کلیک کنید.

شرایط مرزی تعیین شد. از نوار بالا گزینه  $=$  را انتخاب کنید تا متلب شروع به حل معادله کند. بعد از چند لحظه نتیجه نهایی نمایش داده می شود. شکل به دست آمده باید مشابه تصویر زیر باشد.



شکل 3 شکل خروجی نمونه

(\*) تمامی مراحل فوق رو انجام دهید، و سپس شکل بدست آمده را تحلیل کنید.

(\*) شرایط مرزی که بررسی شد از نوع دیریکله بود، به طور خلاصه این شرط مرزی و تفاوت آن با شرط نیومان و کاربرد های آنها را توضیح دهید.



## بخش سوم: حل معادله هلم هولتز<sup>3</sup>

در این قسمت می خواهیم به معادله هلم هولتز بپردازیم که در تحلیل میدان ها و امواج کاربرد بسیار مهمی دارد. بطور کلی معادله هلم هولتز به شکل زیر است.

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\mathbf{r}, t) = 0.$$

که در معادله فوق  $c$  سرعت نور و  $U$  مجموع موج تابیده و بازتابیده است.

(\*) در مورد روش حل این معادله و شرایط مرزی آن تحقیق کنید و فرم نهایی موج یعنی  $U$  را مشخص کنید.

حال می خواهیم شکل موج آن را در محیط متلب پیاده سازی کنیم. چراغ راهنمای ما این [لینک](#) خواهد بود.

1. ابتدا pdeModeler را باز کنید

2. محدوده محور  $x$  را به  $[0.1 \ 1.5]$  و محدوده محور  $y$  را به  $[0 \ 1]$  محدود کنید برای این کار به `options>Axes Limits` مراجعه کنید.

3. مربعی به ضلع  $0.1$  و مرکز  $[0.8 \ 0.5]$  رسم کنید و آنرا به اندازه  $45$  درجه بچرخانید برای اینکار می توانید به `Draw>Rotate` مراجعه کنید.

4. یک دایره به شعاع  $0.45$  و مرکز  $[0.8 \ 0.5]$  رسم کنید.

5. مربع را از دایره کم کنید. `Set formula > C1-SQ1`

6. `Application mode > Generic Scalar`

7. شرایط مرزی را مشخص کنید.

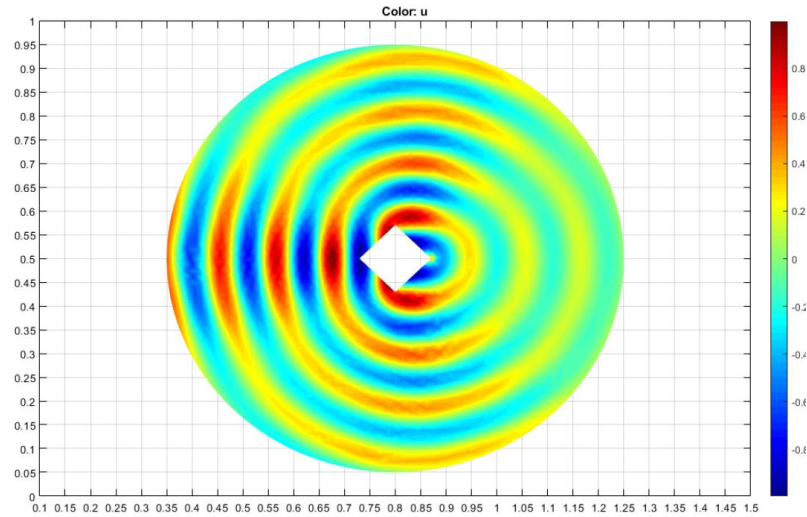
برای دایره از شرط مرزی نیومان با  $q = -60*i$  و  $g = 0$  و برای مربع از شرط دیریکله با شرط مرزی  $h = 1$  و  $r = -\exp(-i*60*x)$  استفاده کنید.

8. شرایط اولیه مش را تعیین کنید برای این کار به `Mesh > initialize mesh` مراجعه کنید برای دقت بیشتر می توانید چندین بار

`mesh > refine mesh` را انتخاب کنید.

9. حال PDE را حل کنید

<sup>3</sup> Helmholtz Equation



شکل 4 شکل خروجی نمونه معادله هلم هولتز

(\*) مراحل بالا را طی کنید و شکل موج بدست آمده را گزارش کنید.

(\*) رفتار موج را توجیه کنید.