بسمه‌تعالی

بسته‌ی آموزشی ۲

پردازش سیگنال‌های دیجیتال با MATLAB

آزمایشگاه مخابرات دیجیتال

استاد: دکتر علی الفت

ویرایش ۲

فهرست مطالب

مقدمه ... ۳

سیگنال‌های گسسته‌زمان ... ٤

دنباله‌های سیگنالی گسسته‌زمان ... ٤

عملیات بر روی دنباله‌ها ... ٤

سیستم‌های گسسته ... ۵

تحلیل سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان گسسته ... ۵

روش‌های تحلیل سیستم‌های خطی ... ۵

تحلیل فرکانسی سیگنال‌های گسسته‌زمان ... ۷

تبدیل فوریه‌ی گسسته‌زمان ... ۷

طبیعت متناوب تبدیل فوریه‌ی گسسته ... ۸

تبدیل فوریه‌ی سریع در نرم‌افزار MATLAB ... ۹

روش دیگر محاسبه‌ی طیف سیگنال ... ۹

مراجع ... ۱۰

بسته‌ی آموزشی ۲

پردازش سیگنال دیجیتال با نرم‌افزار MATLAB

مقدمه

در جهان امروز انواع مختلف سیگنال‌ها ما را احاطه کرده است. بعضی از این سیگنال‌ها طبیعی و بیشتر آن‌ها ساخته‌ی دست بشر است. بعضی سیگنال‌ها نظیر صوت لازم، برخی مانند موسیقی گوش‌نواز و بیشتر آن‌ها در یک موقعیت مشخص نامطلوب و غیرضروری است. در علوم مهندسی، سیگنال‌ها حامل‌های اطلاعات مفید یا نامطلوب هستند. استخراج یا بهبود اطلاعات مفید در ترکیبی از اطلاعات درهم‌تنیده، ساده ترین نوع پردازش سیگنال است. به طور کلی پردازش سیگنال، عملیاتی است که برای استخراج، افزایش کیفیت، ذخیره‌سازی و ارسال اطلاعات مفید است.

بیشتر سیگنال‌هایی که در عمل با آن سر و کار است، سیگنال‌های آنالوگ است. این سیگنال‌ها که به صورت پیوسته با زمان تغییر می‌نمایند، با استفاده از شبکه‌های الکترونیکی شامل المان‌های فعال و غیرفعال پردازش می‌شوند. این رویکرد با عنوان پردازش سیگنال آنالوگ شناخته می‌شود. نمونه‌ی آن گیرنده‌های تلویزیون و رادیو آنالوگ است.

این سیگنال‌ها را می‌توان با استفاده از سخت‌افزارهای دیجیتال شامل جمع‌کننده، ضرب‌کننده و المان‌های منطقی و یا ریزپردازنده‌های خاص، پردازش کرد. اما می‌بایست سیگنال‌های آنالوگ را به صورتی مناسب برای سخت‌افزارهای دیجیتال تبدیل کرد. این نوع سیگنال با عنوان سیگنال دیجیتال شناخته می‌شود. این سیگنال‌ها، مقادیر عددی محدودی را در لحظه‌های مشخصی از زمان، اختیار می‌کنند و می‌توان آن‌ها را با استفاده از اعداد باینری بیان نمود. به این پردازش، پردازش سیگنال‌های دیجیتال گفته می‌شود. بلوک دیاگرام پردازش سیگنال دیجیتال درشکل ۱ رسم شده است.

شکل ۱: بلوک دیاگرام پردازش سیگنال دیجیتال

فیلتر پیشین[1] یا فیلترضدتاخوردگی[2] مؤلفه‌های فرکانسی که منجر به تاخوردن سیگنال آنالوگ می‌شودرا فیلتر می‌نماید. واگردان آنالوگ به دیجیتال[3] رشته‌ای از عددهای باینری را از سیگنال‌های آنالوگ تولید می‌نماید. پردازش‌گر سیگنال دیجیتال، هسته‌ی اصلی پردازش سیگنال دیجیتال است و می‌تواند یک رایانه یا پردازنده‌ ی چندمنظوره یا یک سخت‌افزار دیجیتال باشد. واگردان دیجیتال به آنالوگ[4] عکس عمل واگردان آنالوگ به دیجیتال عمل می‌نماید و یک شکل‌موج پله‌ای برای یک دنباله از اعداد باینری تولید می‌نماید و اولین گام برای ایجاد یک سیگنال آنالوگ به شمار می‌آید. فیلتر پسین نیز شکل موج پله‌ای مانند را به سیگنال آنالوگ دلخواه تبدیل می‌نماید.

بیشتر عملیات در پردازش سیگنال دیجیتال را می‌توان به دو گروه تحلیل سیگنال و فیلتر کردن سیگنال دسته‌بندی نمود. در تحلیل سیگنال هدف اندازه‌گیری ویژگی‌های سیگنال می‌باشد و معمولاً عملیات در حوزه‌ی فرکانس اتفاق می‌افتد. از جمله‌ی این موارد می‌توان به تحلیل طیف فاز یا فرکانس، تشخیص صوت، تأیید گوینده و آشکارسازی هدف اشاره نمود. عمل فیلتر کردن سیگنال را می‌توان

---

[1] Prefilter
[2] Antialiasing Filter
[3] Analog to Digital Converter (ADC)
[4] Digital to Analog Converter (DAC)

به صورت سامانه‌ای دید که سیگنالی وارد و خارج می‌شود. معمولاً این عملیات در حوزه‌ی زمان اتفاق می‌افتد. از جمله‌ی این موارد می‌توان حذف نویز ناخواسته‌ی زمینه، حذف تداخل، تفکیک باندهای فرکانسی و شکل‌دهی به طیف سیگنال را نام برد.

سیگنال‌های گسسته‌زمان

دنباله‌های سیگنالی گسسته‌زمان

سیگنال گسسته زمان $x[n]$ تابعی از یک متغیر مستقل صحیح است. لازم به خاطرنشان است که سیگنال گسسته‌زمان در لحظه‌های بین دو نمونه‌ی متوالی تعریف نشده است. این تصور که $x[n]$ برای nهای غیرصحیح برابر صفر است، اشتباه می‌باشد. به صورت ساده سیگنال $x[n]$ برای مقادیر غیرصحیح n تعریف‌نشده می‌باشد. به صورت سنتی حتی اگر سیگنال $x[n]$ ذاتاً گسسته‌زمان باشد و از نمونه‌برداری یک سیگنال آنالوگ به دست نیامده باشد، به $x[n]$ نمونه‌ی nام سیگنال گفته می‌شود. اگر واقعا $x[n]$ از نمونه‌برداری یک سیگنال آنالوگ $x_a(t)$ به دست آمده باشد، $x[n] \equiv x_a(nT)$ است که در آن T دوره تناوب نمونه‌برداری (زمان بین نمونه‌های متوالی) است. یک سیگنال گسسته‌زمان یا دنباله را می‌توان به صورت یک تابع، جدول یا به صورت یک دنباله نمایش داد. نمایش دنباله‌ای یک سیگنال گسسته‌زمان به صورت زیر است و فلش رو به بالا نشان‌گر نمونه $n = 0$ است.

$$x[n] = \{x[n]\} = \{\dots, x[-1], \underset{\uparrow}{x[0]}, x[1], \dots\}$$

در نرم‌افزار MATLAB می‌توان یک دنباله ی با طول محدود را با یک بردار با مقادیر مناسب بیان نمود. با این وجود این بردار هیچ اطلاعاتی در مورد موقعیت نمونه n در بر ندارد. بنابراین برای بیان مناسب $x[n]$ نیازمند دو بردار برای x و n می‌باشد. به عنوان مثال دنباله‌ی $x[n] = \{2, 1, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 3, 7\}$ را می‌توان به صورت زیر در نرم‌افزار MATLAB بیان نمود:

```
>> n = [-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4]; x = [2, 1, -1, 0, 1, 4, 3, 7];
```

در این آزمایش دانشجو با تولید انواع مختلف دنباله‌ها آشنا می‌شود و با توجه به آشنایی دانشجو با این دنباله‌ها از توضیح بیشتر این دنباله‌ها اجتناب می‌شود. این دنباله‌ها شامل دنباله‌ی ضربه‌ی واحد، پله‌ی واحد، شیب واحد، دنباله‌ی نمایی حقیقی و مختلط، دنباله‌های متناوب و دنباله‌های تصادفی می‌باشند. دسته‌بندی‌های مختلفی بر روی سیگنال‌های گسسته زمان صورت می‌پذیرد که از جمله آن‌ها می‌توان به دسته‌بندی بر مبنای توان و انرژی بودن سیگنال، متناوب یا غیرمتناوب بودن سیگنال، سیگنال‌های متقارن (زوج) یا پادمتقارن (فرد) اشاره نمود.

عملیات بر روی دنباله‌ها

بر روی دنباله‌های سیگنالی عملیاتی انجام می‌شود که منجر به تولید یک دنباله‌ی جدید می‌شود. این عملیات می‌تواند بر روی متغیر مستقل (n) سیگنال یا متغیر وابسته‌ی سیگنال (دامنه) صورت پذیرد. این عملیات‌ها شامل جمع سیگنال‌ها، ضرب سیگنال‌ها، مقیاس کردن، جابه‌جایی زمانی، قرینه کردن، جمع نمونه‌ها، ضرب نمونه‌ها، به دست آوردن انرژی یا توان سیگنال می‌باشد.

انرژی دنباله‌ی سیگنال $x[n]$ به صورت $\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$ و توان متوسط دنباله‌ی متناوب $\tilde{x}[n]$ به صورت $P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2$ تعریف می‌شود.

یکی دیگر از اعمالی که بر روی دنباله‌های گسسته زمان انجام می‌شود، همبستگی دنباله‌ها است. همبستگی در بسیاری از کاربردهای پردازش سیگنال های دیجیتال کاربرد دارد و معیاری از شباهت دو دنباله به شمار می‌رود. با داشتن دو دنباله ی با مقادیر حقیقی $x[n]$ و $y[n]$ با انرژی محدود، دنباله‌ی $r_{xy}(\ell)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_{xy}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n-\ell]$$

اندیس ℓ پارامتر شیفت یا تأخیر می‌باشد. حالت خاص عبارت فوق برای $y[n] = x[n]$ می‌باشد که با نام تابع خودهمبستگی شناخته می‌شود و معیاری از شباهت سیگنال با شیفت یافته‌های زمانی خود است. خودهمبستگی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x[n-\ell]$$

سیستم‌های گسسته

در بسیاری از کاربردهای پردازش سیگنال دیجیتال طراح به دنبال طراحی یک وسیله یا الگوریتم برای انجام یک عمل مشخص است. چنین وسیله یا الگوریتمی یک سیستم گسسته‌زمان نامیده می‌شود. به طور مشخص یک سیستم گسسته زمان دستگاه یا الگوریتمی است که بر روی یک سیگنال گسسته زمان (ورودی یا تحریک) عمل می‌نماید و بر اساس یک قاعده ی کاملاً مشخص یک سیگنال گسسته زمان دیگر (خروجی یا پاسخ) را تولید می‌نماید. به طور کلی می توان به یک سیستم به صورت یک عملگر یا مجموعه‌ی از عملگرها بر روی سیگنال ورودی $x[n]$ برای تولید سیگنال $y[n]$ نگاه کرد. سیستم، سیگنال $x[n]$ را به سیگنال $y[n]$ تبدیل می‌نماید. این تبدیل با استفاده از عملگر $\mathcal{T}$ بیان می‌شود:

$$y[n] = \mathcal{T}[x[n]]$$

دسته‌بندی‌های مختلفی برای سیستم‌ها وجود دارد که معیار این دسته‌بندی‌ها حافظه دار بودن، تغییرپذیری با زمان، خطی بودن، علی بودن، پایدار بودن است. از آن‌جا که بیشتر سیستم‌ها به صورت سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان پیاده‌سازی می‌شود، در ادامه چنین سیستم‌هایی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تحلیل سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان گسسته

یک گروه بسیار مهم سیستم‌ها، سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان می‌باشد. این سیستم‌ها را می‌توان در حوزه‌ی زمان با استفاده از پاسخ سیستم به دنباله‌ی مشخص تعیین نمود. می توان هر سیگنال ورودی دلخواه را به مجموع وزن‌دار دنباله‌ی ضربه‌های واحد تجزیه و بیان نمود. چون سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است، پاسخ سیستم به هر سیگنال ورودی دلخواه را می‌توان بر حسب پاسخ ضربه‌ی سیستم به دست آورد. به صورت کلی عبارتی که پاسخ ضربه‌ی سیستم و سیگنال ورودی دلخواه را به سیگنال خروجی ارتباط می دهد، جمع کانولوشن یا فرمول کانولوشن نامیده می‌شود. با استفاده از این ابزار می توان خروجی هر سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان را به هر ورودی دلخواه به دست آورد.

روش‌های تحلیل سیستم‌های خطی

دو روش پایه‌ای برای تحلیل رفتار و پاسخ یک سیستم خطی به سیگنال‌های ورودی وجود دارد. یکی از این روش‌ها برای تحلیل رفتار یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان گسسته، تجزیه‌ی سیگنال ورودی به مجموع سیگنال‌هایی پایه است. سیگنال‌های پایه به گونه‌ای انتخاب می‌شود که پاسخ سیستم به هر مولفه ی سیگنال به راحتی محاسبه شود. با استفاده از خاصیت خطی بودن سیستم، پاسخ سیتم به سیگنال‌های پایه با یکدیگر جمع می‌شود و پاسخ کلی سیستم‌به سیگنال ورودی به دست می‌آید. انتخاب سیگنال‌های پایه دلخواه به نظر می‌رسد، اما این انتخاب به نوع سیگنال ورودی موردبررسی وابسته است. اگر هیچ قیدی بر روی مشخصه‌ی سیگنال ورودی گذاشته نشود، سیگنال ورودی را می‌توان به مجموع وزن‌دار دنباله‌های ضربه‌ی واحد تجزیه نمود. در این‌جا ابتدا می‌بایست پاسخ سیستم به یک سیگنال ضربه ی واحد به دست آورد و سپس با مقیاس کردن و خاصیت شرکت‌پذیری سیستم خطی فرمولی برای رابطه‌ی ورودی و خروجی به دست آورد. سیگنال دلخواه $x[n]$ را می توان به صورت زیر و با انتخاب سیگنال ضربه‌ی واحد به عنوان سیگنال پایه تجزیه نمود:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

در رابطه‌ی فوق n اندیس زمانی و k پارامتری است که موقعیت سیگنال ضربه‌ی ورودی را تعیین می‌نماید. به عنوان مثال سیگنال $x[n] = \{2, 4, \underset{\uparrow}{0}, 3\}$ را می‌توان به صورت $x[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 3\delta[n-2]$ نوشت که همان مجموع وزن‌دار دنباله‌های ضربه‌ی واحد است. پس از تجزیه‌ی سیگنال ورودی $x[n]$ به مجموع وزن‌دار ضربه‌های واحد، می‌توان پاسخ یک سیستم خطی دلخواه به هر سیگنال ورودی را به دست آورد. ابتدا پاسخ $y[n,k]$ سیستم به ورودی ضربه‌ی واحد در $n = k$ با نماد $h[n,k]$ مشخص می‌شود:

$$y[n,k] \equiv h[n,k] = \mathcal{T}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\mathcal{T}(\delta[n-k]) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n,k]$$

پرواضح است که رابطه‌ی فوق بر اساس خاصیت برهم‌نهی سیستم‌های خطی به دست آمده است. اگر سیستم علاوه بر خطی بودن تغییرناپذیر با زمان باشد، رابطه‌ی فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \triangleq x[n] * h[n]$$

بنابراین یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان به طور کامل با یک تابع $h[n]$ مشخص می‌شود که پاسخ سیستم به دنباله‌ی ضربه‌ی $\delta[n]$ است. بر خلاف این حالت خاص، توصیف کلی خروجی یک سیستم متغیر با زمان خطی نیازمند داشتن بی‌نهایت تابع‌های پاسخ ضربه‌ی $h[n,k]$ برای هر تأخیر ممکن است. فرمول فوق که پاسخ $y[n]$ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان را به صورت تابعی از سیگنال $x[n]$ و پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ به دست می‌آورد، جمع کانولوشن نامیده می‌شود. این‌طور بیان می‌شود که خروجی $y[n]$ حاصل کانولوشن ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ است. با توجه به آموزش این روش در درس‌های گذشته‌ی دانشجو، از بیان شیوه‌ی به دست آوردن کانولوشن اجتناب می‌شود.

اگر یک دنباله‌ی دلخواه دارای طول نامحدودباشد، نرم‌افزار MATLAB نمی‌تواند به صورت مستقیم کانولوشن را محاسبه نماید. نرم‌افزار MATLAB دارای تابع داخلی **conv** برای محاسبه‌ی کانولوشن بین دو دنباله‌ی با طول محدود است. تابع **conv** فرض می‌نماید که هر دو دنباله از $n = 0$ شروع می‌شود و به صورت زیر استفاده می‌شود:

```
>> x = [3, 11, 7, 0, -1, 4, 2];   h = [2, 3, 0, -5, 2, 1];
>> y = conv(x,h)
y =
    6    13    47     6     -51    -5     41      18     -22    -3     8      2
```

تابع **conv** هیچ اطلاعات زمانی‌ای را دریافت نمی‌نماید. در طول این آزمایش یک تابع کانولوشن نوشته می‌شود که اطلاعات زمانی را نیز دریافت می‌نماید. باید توجه داشت اگر $x[n]$ و $h[n]$ دارای طول محدود باشند، به راحتی می‌توان نقاط ابتدا و انتهای حاصل کانولوشن این دو سیگنال را به دست آورد. اگر $\{x[n]; n_{\mathrm{xb}} \leq n \leq n_{xe}\}$ و $\{h[n]; n_{\mathrm{hb}} \leq n \leq n_{he}\}$ دو دنباله با طول محدودباشند، نقاط شروع و پایان حاصل کانولوشن این دو دنباله یا $y[n]$، به ترتیب به صورت $n_{\mathrm{yb}} = n_{\mathrm{xb}} + n_{\mathrm{hb}}$ و $n_{\mathrm{ye}} = n_{\mathrm{xe}} + n_{\mathrm{he}}$ می‌باشد.

اگر عمل کانولوشن با همبستگی متقابل دو دنباله مقایسه شود، می‌توان دریافت که ارتباط نزدیکی بین این دو عملیات وجود دارد. همبستگی متقابل و خودهمبستگی را می‌توان به صورت زیر به صورت یک عمل کانولوشن بیان نمود.

$$r_{\mathrm{yx}}(\ell) = y(\ell) * x(-\ell), \qquad r_{\mathrm{xx}}(\ell) = x(\ell) * x(-\ell)$$

با استفاده از دستور **xcorr** به صورت زیر نیز می‌توان همبستگی متقابل و خودهمبستگی را محاسبه نمود. دقت شود در این‌جا نیز هیچ اطلاعات زمانی‌ای را نمی‌توان برای تابع در نظر گرفت و بهتر است از تابع کانولوشنی که در این آزمایش به دست می‌آید برای این محاسبه استفاده نمود.

```
>> xcorr(x,y)
>> xcorr(x)
```

روش دوم تحلیل رفتار یک سیستم خطی مبتنی بر جواب مستقیم یک معادله‌ی ورودی-خروجی برای سیستم است که به صورت کلی دارای فرم زیر است که $F(.)$ نشان‌دهنده‌ی تابعیت مقادیر داخل پرانتز است:

$$y[n] = F(y[n-1], y[n-2], \ldots, y[n-N], x[n], x[n-1], \ \ldots, x[n-M])$$

برای یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان این رابطه‌ی ورودی و خروجی به صورت زیر می‌باشد:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_{\mathrm{k}} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_{\mathrm{k}} x[n-k]$$

در رابطه‌ی فوق $\{a_{\mathrm{k}}\}$ و $\{b_{\mathrm{k}}\}$ پارامترهای ثابتی هستند که سیستم را مشخص کرده و مستقل از $x[n]$ و $y[n]$ می‌باشند. رابطه‌ی ورودی و خروجی فوق معادله‌ی تفاضلی نامیده می‌شود و بیان‌گر یکی از راه‌های توصیف رفتار یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان گسسته است.

تابع **filter** در نرم‌افزار MATLAB برای حل عددی معادلات تفاضلی به کار می‌رود. این تابع در ساده‌ترین حالت به صورت زیر استفاده می‌شود:

```
y = filter(b,a,x)
b = [b0, b1, ..., bM];   a = [a0, a1, ..., aN];
```

در عبارت فوق **b** و **a** آرایه‌ی ضرایب معادله‌ی تفاضلی به صورت زیر و **x** بردار دنباله‌ی ورودی می‌باشد.

$$\sum_{k=0}^{N} a_{\mathrm{k}} y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_{\mathrm{k}} x[n-k]$$

خروجی **y** دارای طولی برابر با ورودی **x** است. حتما می‌بایست مطمئن شد که ضریب **a0** برابر با صفر نباشد. اگر ضرایب $\{a_k ; 1 \leq k \leq N\}$ برابر با صفر باشند، می توان با استفاده از عمل کانولوشن خروجی سیستم را به دست آورد.

در نرم‌افزار MATLAB به منظور محاسبه و رسم پاسخ ضربه از تابع **impz** و به صورت زیر استفاده می‌شود:

h = impz(b,a,n)

این تابع‌نمونه‌های پاسخ ضربه‌ی فیلتر در اندیس‌هایی که با بردار **n** نشان داده شده و با ضرایب صورت **b** و ضرایب مخرج **a** را به دست می‌آورد. وقتی هیچ آرگومان خروجی‌ای برای این تابع در نظر گرفته نشود، تابع **impz** پاسخ را درون پنجره‌ی نمودار موجود و با استفاده از تابع **stem** رسم می‌نماید.

تحلیل فرکانسی سیگنال‌های گسسته‌زمان

تبدیل فوریه‌ی گسسته‌زمان

معمولاً تحلیل سیگنال‌های گسسته زمان به راحتی به وسیله‌ی پردازنده‌های سیگنال دیجیتال صورت می‌پذیرد که می تواند یک رایانه‌ی دیجیتال چندمنظوره و یا یک سخت‌افزار دیجیتال اختصاصی‌باشد. برای تحلیل فرکانسی سیگنال گسسته زمان $\{x[n]\}$، دنباله‌ی حوزه‌ی زمان به یک بیان معادل حوزه‌ی فرکانس تبدیل می‌شود. این بیان در واقع تبدیل فوریه‌ی $X(\omega)$ دنباله‌ی $\{x[n]\}$ می‌باشد. با این وجود $X(\omega)$ یک تابع پیوسته از فرکانس است و بیان مناسبی از نقطه‌نظر محاسباتی به حساب نمی‌آید. در ادامه بیان دنباله‌ی $\{x[n]\}$ با نمونه‌های طیف $X(\omega)$ معرفی می‌شود.

دنباله‌ی با طول محدود $x[n]$ با طول L (برای $n < 0$ و $n \geq L$ مقدار $x[n] = 0$ است) دارای تبدیل فوریه به صورت زیر است:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]\, e^{-j\omega n} , \qquad 0 \leq \omega \leq 2\pi$$

در رابطه‌ی فوق حد بالا و پایین نشان‌گر آن است که در خارج بازه‌ی $0 \leq n \leq L-1$ ،$x[n] = 0$ است. از $X(\omega)$ در فاصله‌های فرکانسی مساوی $\omega_k = 2\pi k/N$ ،$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ $(N \geq L)$ نمونه‌برداری می‌شود. این نمونه‌ها به صورت زیر می‌باشند:

$$X(k) \equiv X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

برای راحتی اندیس بالای سری از $L-1$ به $N-1$ افزایش یافت و علت آن است که برای $n \geq L$ مقدار $x[n] = 0$ است. رابطه‌ی فوق فرمولی است که دنباله‌ی $\{x[n]\}$ با طول $L \leq N$ را به دنباله‌ی نمونه‌های فرکانسی $\{X[k]\}$ با طول N تبدیل می‌نماید. از آن‌جا که نمونه‌های فرکانسی با محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی $X(\omega)$ در یک مجموعه‌ی دارای N فرکانس گسسته با فاصله‌ی یکسان محاسبه شده است، به رابطه‌ی فوق تبدیل فوریه‌ی گسسته گفته می‌شود. با رابطه‌ی زیر می‌توان دنباله‌ی $x[n]$ را از روی نمونه‌های فرکانسی بازیابی نمود که به این رابطه عکس تبدیل فوریه گسسته گفته می‌شود:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

پرواضح است که وقتی $x[n]$ دارای طول $L < N$ است، عکس تبدیل فوریه‌ی گسسته N نقطه‌ای منجر به $x[n] = 0$ برای $L \leq n \leq N-1$ می‌شود. تبدیل فوریه‌ی گسسته و عکس آن در زیر آمده است:

$$\text{DFT:}\ \ X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\text{IDFT:}\ \ x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

آموزنده است که تبدیل فوریه‌ی گسسته و عکس آن را به صورت یک تبدیل خطی دنباله‌ی $\{x[n]\}$ به $\{X[k]\}$ دید. ابتدا بردار N نقطه‌ای x_N دنباله‌ی سیگنال $x[n]$، $n = 0, 1, \dots, N-1$، یک بردار N نقطه‌ای $\boldsymbol{X}_N$ از نمونه‌های فرکانسی و یک ماتریس $N \times N$ با نام $\boldsymbol{W}_N$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

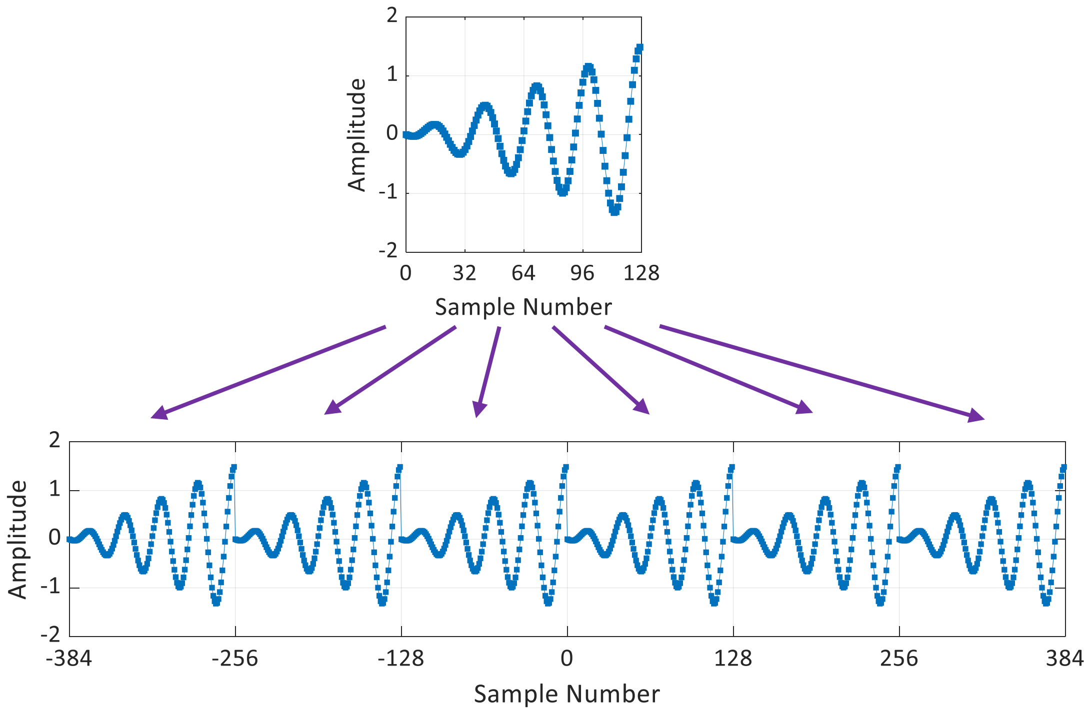
$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=\begin{bmatrix}x[0]\\x[1]\\\vdots\\x[N-1]\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{N}}=\begin{bmatrix}X[0]\\X[1]\\\vdots\\X[N-1]\end{bmatrix},\ \boldsymbol{W}_{\mathrm{N}}=\begin{bmatrix}1&1&1&\dots&1\\1&W_{\mathrm{N}}&W_{\mathrm{N}}^{2}&\dots&W_{\mathrm{N}}^{N-1}\\1&W_{\mathrm{N}}^{2}&W_{\mathrm{N}}^{4}&\dots&W_{\mathrm{N}}^{2(N-1)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&W_{\mathrm{N}}^{N-1}&W_{\mathrm{N}}^{2(N-1)}&\dots&W_{\mathrm{N}}^{(N-1)(N-1)}\end{bmatrix}\quad W_{\mathrm{N}}=e^{-j2\pi/N}$$

با استفاده از تعاریف فوق تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی N نقطه‌ای را می‌توان به صورت ماتریس $\boldsymbol{X}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{W}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ درآورد.

تبدیل فوریه ی گسسته نقش کلیدی در بسیاری از کاربردهای پردازش سیگنال دیجیتال دارد. دلیل اصلی اهمیت تبدیل فوریه‌ی گسسته وجود الگوریتم‌های بهینه برای محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی گسسته است. یک الگوریتم محاسباتی مهم تبدیل فوریه‌ی سریع[5] می‌باشد که تبدیل فوریه‌ی گسسته را برای زمانی که اندازه‌ی N توانی از ۲ است، محاسبه می‌نماید.

طبیعت متناوب تبدیل فوریه‌ی گسسته

تبدیل فوریه یک خانواده ی چهارتایی است که شامل تبدیل فوریه، سری فوریه، تبدیل فوریه‌ی گسسته و تبدیل فوریه‌ی گسسته زمان می‌شود. تبدیل فوریه‌ی گسسته بر خلاف سه نوع تبدیل فوریه‌ی دیگر، سیگنال‌های حوزه ی فرکانس و زمان را به صورت متناوب (تکرار تا بی‌نهایت) مشاهده می‌نماید. این مسأله می‌تواند گیج‌کننده باشد و اکثر سیگنال‌هایی که در بسیاری از کاربردهای پردازش سیگنال مورد استفاده قرار می گیرد، متناوب نیستند. با این وجود اگر بنا باشد از تبدیل فوریه‌ی گسسته و یا پیاده‌سازی سریع آن یعنی تبدیل فوریه‌ی سریع (FFT) استفاده شود، می‌بایست از نقطه نگاه تبدیل فوریه‌ی گسسته به سیگنال‌ها نگاه کرد.شکل ۲ دو تعبیر مختلف از سیگنال حوزه‌ی زمان را ارایه می دهد. ابتدا اگر به سیگنال بالا توجه نمایید، حوزه‌ی زمان با $N=128$ نقطه (نقاط ۰ تا ۱۲۷) نمایش داده شده است. این تصویر بیان‌گر سیگنال‌هایی است که معمولا گیرنده‌ها و یا رادیو نرم‌افزارها به کمک یک بافر N نقطه‌ای دریافت می‌نمایند. این ۱۲۸ نمونه ممکن است از نمونه‌برداری گسسته یک سیگنال آنالوگ در فواصل زمانی یکنواخت به دست آمده باشد. نمونه‌ی ۰ به علت فاصله‌ی زمانی، متمایز و جدا از نمونه‌ی زمانی ۱۲۷ است. با توجه به نحوه ی تولید این سیگنال هیچ دلیلی برای این‌که نمونه‌ی سمت چپ با نمونه‌ی سمت راست کوچک‌ترین ارتباطی با هم داشته باشند، وجود ندارد.



شکل ۲: متناوب بودن سیگنال حوزه‌ی زمان تبدیل فوریه‌ی گسسته-(بالا) حوزه زمان به صورت N نقطه‌ای (پایین) حوزه زمان به صورت متناوب

متأسفانه تبدیل فوریه‌ی گسسته چنین نگاهی به سیگنال‌ها ندارد. همان‌طور که در تصویر پایین شکل ۲ نشان داده شده است، تبدیل فوریه‌ی گسسته این ۱۲۸ نقطه را به عنوان یک تناوب از یک سیگنال متناوب طولانی در نظر می‌گیرد. این بدان معناست که سمت

[5] Fast Fourier Transfrom (FFT)

چپ این سیگنال دریافتی به سمت راست یک کپی از سیگنال متصل است. به صورت مشابه سمت راست سیگنال دریافتی به سمت چپ تکرار همان تناوب متصل است. تعبیر دیگر آن است که سمت راست سیگنال دریافتی چرخیده و به سمت چپ خودش متصل شده است. با این نگاه همان‌طور که نمونه‌ی ۴۳ در کنار نمونه ۴۴ قرار دارد، نمونه‌ی ۱۲۷ نیز در کنار نمونه‌ی ۰ قرار دارد. به این امر چرخشی بودن اتلاق شده که همان نگاه متناوب به سیگنال است. به همین دلیل لازم است تابع‌های پنجره قبل از اعمال تبدیل فوریه‌ی سریع به سیگنال اعمال شود. این امر باعث می شود با صفر کردن سیگنال در سمت راست و چپ، ناپیوستگی موجود در سیگنال حذف شود.

تبدیل فوریه‌ی سریع در نرم‌افزار MATLAB

نرم‌افزار MATLAB دارای یک تبدیل فوریه‌ی سریع داخلی با نام **fft** است که دانشجو در انتهای این آزمایش شیوه‌ی کار کردن با این تابع را می‌آموزد. خروجی تابع **fft** به نحوی است که نمونه‌ی مربوط به فرکانس صفر در ابتدای بردار تبدیل فوریه‌ی گسسته رخ می‌دهد. برای انتقال مولفه فرکانس صفر به مرکز آرایه می‌توان از دستور **fftshift** استفاده نمود. می‌بایست توجه داشت که هدف به دست آوردن چگالی طیف توان است که برابر با توان دوم قدرمطلق تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی سیگنال است.

برای پیاده‌سازی تبدیل فوریه‌ی سریع می توان از کد زیر استفاده نمود. کد زیر از نظر دامنه‌ی طیف نرمالیزه نمی‌باشد و با افزایش تعداد نقاط FFT دامنه‌ی طیف افزایش می‌یابد. در طول آزمایش از دانشجو خواسته می‌شود تا ضریب نرمالیزه کردن را به دست آورد.

```
fs = ...;
ts = 1/fs;
nFft = ...;
t = [0:nFft-1]*ts;
freq = [0:nFft-1]/nFft * fs - fs/2;
x = ...;
Xf = fftshift(fft(x, NFft));
plot(freq, abs(Xf).^2)
xlim([freq(1),freq(end)])
```

روش دیگر محاسبه‌ی طیف سیگنال

یکی دیگر از راه‌های محاسبه‌ی طیف سیگنال استفاده از تابع خودهمبستگی می‌باشد. چگالی طیف توان سیگنال $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\hat{\phi}(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}[k]e^{-j2\pi fk}$$

در رابطه‌ی فوق $\hat{r}[k]$ تخمین تابع خودهمبستگی است که از روی نمونه‌های موجود سیگنال $\{x[1],\dots,x[N]\}$ به دست آمده است. فرض می شود فرآیندی که بناست چگالی طیف توان آن محاسبه شود، ایستان است.

$$\hat{r}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=k+1}^{N} x[n]x^*[n-k], \qquad 0 \le k \le N-1$$

تابع خودهمبستگی برای تأخیرهای منفی با استفاده از ویژگی زیر به دست می‌آید.

$$\hat{r}[-k] = \hat{r}^*[k]$$

همان‌طور که در بخش قبل توضیح داده شد، از نقطه نظر پیاده‌سازی و محاسبات نمی‌توان طیف سیگنال را به صورت پیوسته به دست آورد و می‌بایست از متغیر فرکانس، نمونه‌هایی را انتخاب نمود. بنابراین پس از به دست آوردن تابع خودهمبستگی، تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی آن محاسبه می‌شود. چگالی طیف توان برابر با قدرمطلق تبدیل فوریه‌ی حاصل است.

مراجع

[1] V. K. Ingle and J. G. Proakis, *Digital Signal Processing using MATLAB*. 2010.

[2] J. G. Proakis, M. Salehi, and G. Bauch, *Contemporary Communication Systems Using MATLAB®*. 2013.

[3] S. K. Mitra, *Digital signal processing: a computer-based approach*. New Delhi: Mc Graw Hill Education, 2011.

[4] Ingle, V. K., & Proakis, J. G. (2012). *Digital signal processing using MATLAB*. Stanford: Cengage Learning.

[5] T. F. Collins, R. Getz, D. Pu, and A. M. Wyglinski, *Software-defined radio for engineers*. Norwood, MA: Artech House, 2018.