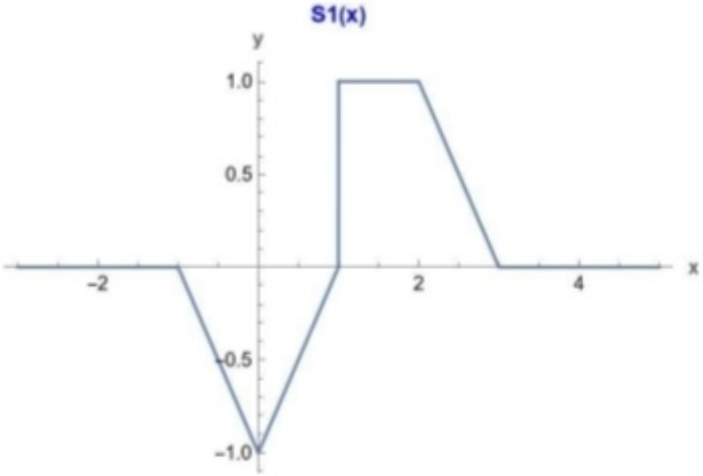
۱) به کمک سیگنال‌های پایه (پله و شیب)، دو سیگنال $S_1(x)$ و $S_2(x)$ را رسم کنید.

❋ توجه: برای تمامی رسم های خود، بازه مناسب تغییرات ورودی و خروجی و عنوان نمودار را مشخص کنید.



تصویر۱- نمودار سیگنال $S_1(x)$

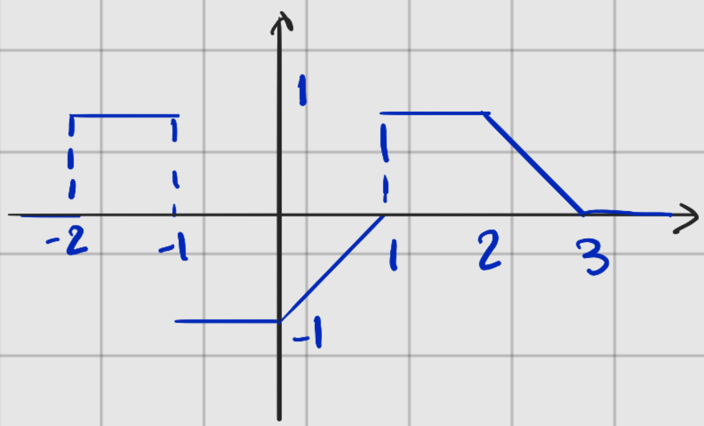
$$S_2(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<-2\,, x\geq 3 \\ 1 & , \quad 1\leq |x| \leq 2 \\ -1 & , \quad -1<x<0 \\ x-1 & , \quad 0\leq x<1 \\ -x+3 & , \quad 2\leq x<3 \end{cases}$$

تصویر۲- رابطه سیگنال $S_2(x)$

۲) اکنون با استفاده از دستور Piecewise و سیگنال‌های دلخواه، دو سیگنال $S_1(x)$ و $S_2(x)$ را رسم کنید.

پرسش) به نظر شما کدام یک از دو روش بالا آسان‌تر است؟ به کمک مفهوم پاسخ ضربه و خواص آن، توضیح دهید که چرا علاقه‌مندیم سیگنال‌ها را بر اساس سیگنال‌های پایه پله و شیب توصیف کنیم.

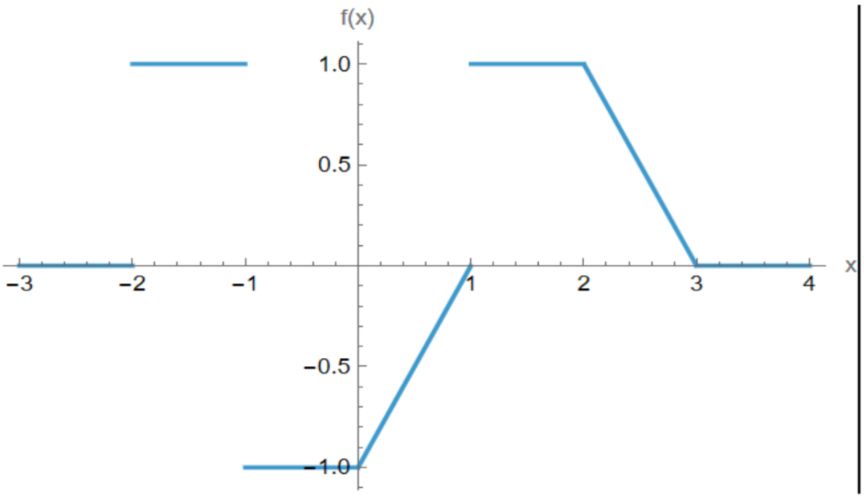
$S_2 =$



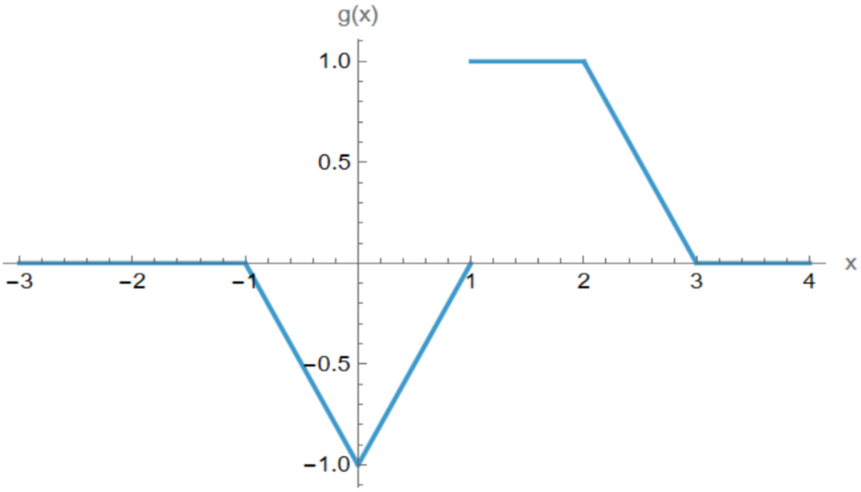
$$S_1 = g(x) = -r(x+1) + 2r(x) - r(x-1) + u(x-1) - r(x-2) + r(x-3)$$

$$S_2 = f(x) = u(x+2) - 2u(x+1) + r(x) - r(x-1) + u(x-1) - r(x-2) + r(x-3)$$

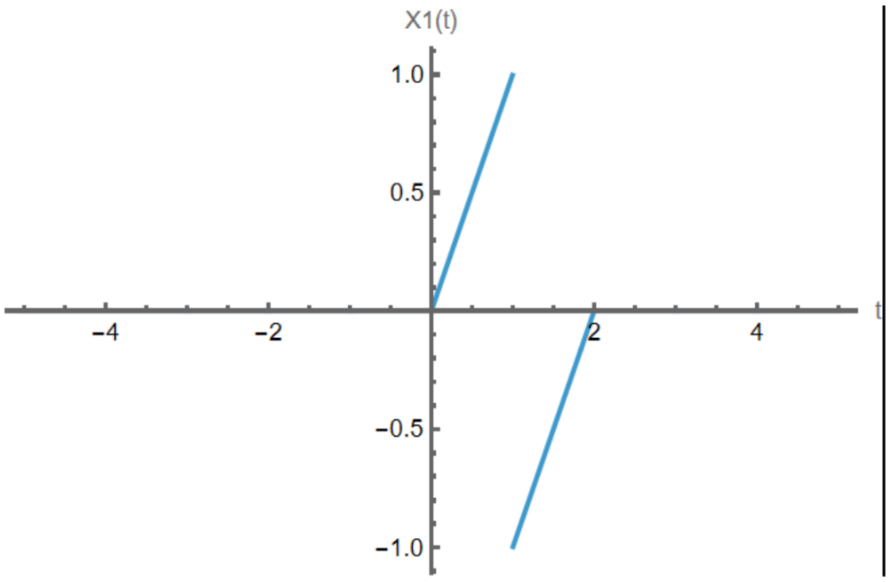
Out[∘]=



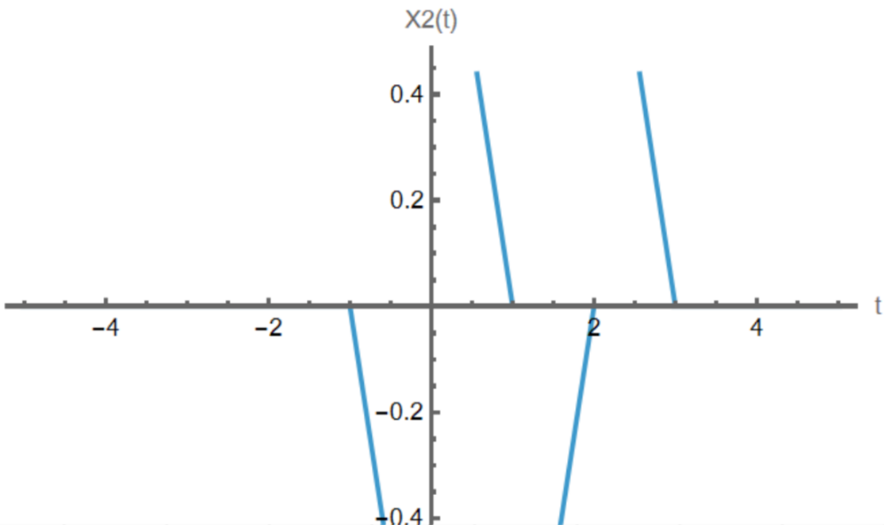
Out[∘]=



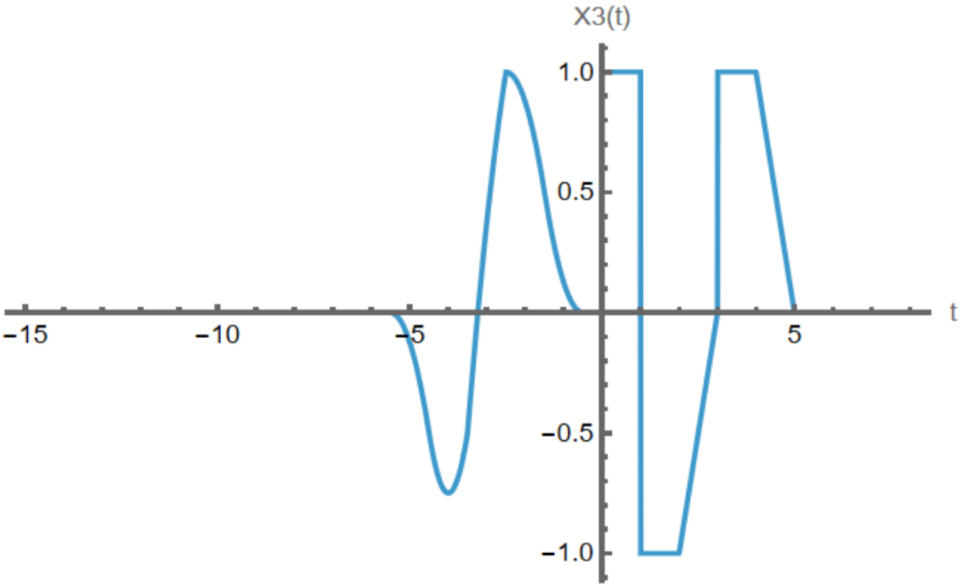
Out[∘]=



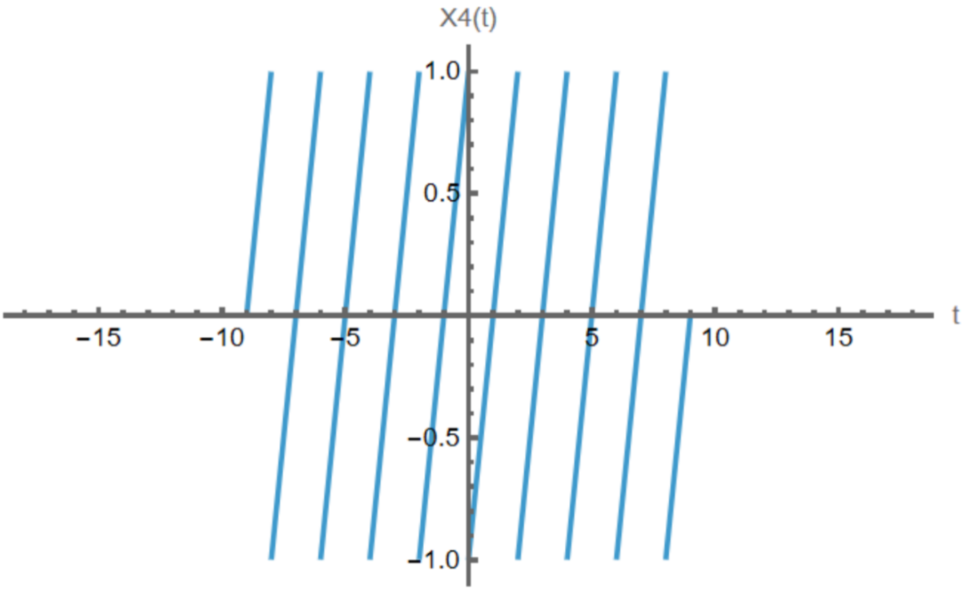
Out[∘]=



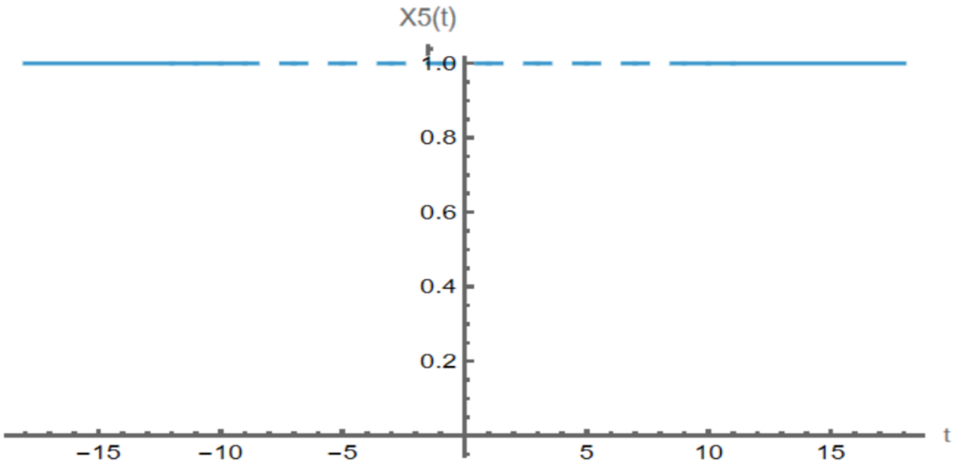
Out[•]=



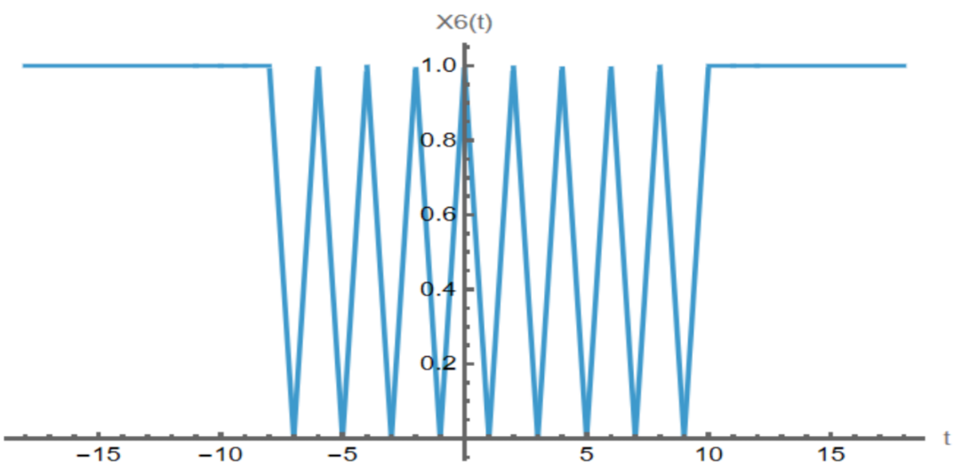
Out[•]=



Out[•]=



Out[•]=



رسم توابع با دستور Piecewise ساده‌تر می‌باشد.

در سیستم‌های خطی با داشتن پاسخ $\delta(t-\tau)$ می‌توان پاسخ سیگنال‌های $u(t-\tau)$ و $r(t-\tau)$ را یافت و پس از آن پاسخ سیگنال‌هایی که از ترکیب خطی این دو موج حاصل می‌شوند را با ترکیب خطی پاسخ‌هایشان یافت.

بخش دوم

۱) توان و انرژی هر یک از سیگنال های زیر را به صورت شبیه‌سازی محاسبه کنید و نوع انرژی و توان بودن آن‌ها را اعلام کنید.

سیگنال های x_1 و x_3 و x_5 سیگنال انرژی می‌باشد

سیگنال های x_2 و x_6 سیگنال توانی می‌باشد و سیگنال $x4$ نه سیگنال انرژی می‌باشد نه سیگنال توان می‌باشد.

فرمول های سوال دو:

نکته (۱) =

$$\text{Energy} \Rightarrow \int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{1+|t|^3}\right)^2 dt+\int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+|t|^3}\right)^2 dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1+|t|^3}\right)^2 dt$$

$$\text{Power} \Rightarrow \frac{4x^2+7x-2}{x^2+1} \qquad ,\quad)^2 dx \quad +$$

$$x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{4x^2+7x-2}{x^2+1}\right)^2 dx$$

☆ نکته (۱) در رابطه با توان متوسط به صورت کلی برقرار نمی باشد و باید میانگین وزن دار گرفته شود

(2) نکته $\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\frac{8x^3-2x^2+4x-1}{4x^3-x^2+20x-5}\right)^2 dx$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\frac{10x^4+8x^3+5x-3)}{5x^4+7x^2+4}\right)^2 dx$$

(3) نکته $\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\frac{2x^2+1}{x^2+5}\right)^2 dx$

$$= \frac{\left(\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+5}\right)^2 + \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+5}\right)^2}{2}$$

```
X1_energy = Integrate[X1[t]^2, {t, 0, Infinity}, Assumptions → a > 0]
```

Out[∘]= $\frac{A^2}{2\,a}$

```
In[∘]:= X1_power = Limit[Integrate[X1[t]^2, {t, 0, T}] / (2 T), T → Infinity, Assumptions → a > 0]
```

Out[∘]= 0

```
In[∘]:= X2_energy = Limit[Integrate[X2[t]^2, {t, 0, T0}] * k, k → Infinity]
```

∞

```
In[∘]:= X2_power = Integrate[X2[t]^2, {t, 0, T0}] / T0
```

Out[∘]= $\frac{A^2}{2}$

```
In[∘]:= X3_energy = Integrate[X3[t]^2, {t, -Infinity, Infinity}]
```

Out[∘]= $\frac{8\,\pi}{9\,\sqrt{3}}$

```
In[∘]:= X3_power = Limit[X3_energy / (2 T), T → Infinity]
```

Out[∘]= 0

```
In[∘]:= X4_energy = Integrate[1 / Sqrt[t], {t, 4, Infinity}]
```

··· Integrate: Integral of $\frac{1}{\sqrt{t}}$ does not converge on {4, ∞}.

$\int_4^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \infty$

```
In[∘]:= X4_power = Limit[Integrate[1 / Sqrt[t], {t, 4, T}] / (2 T), T → Infinity]
```

Out[∘]= 0

```
In[∘]:= X5_energy = Integrate[X5[t]^2, {t, 0, Infinity}]
```

Out[∘]= $\frac{1}{12} + \frac{3}{36 + \pi^2}$

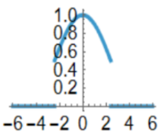
```
In[∘]:= X5_power = Limit[X5_energy / (2 T), T → Infinity]
```

Out[∘]= 0

```
X_energy = N[Integrate[X[t]^2, {t, -Infinity, Infinity}]]
```

3.363799590045463 * ∞ → X6 has Infinite energy

```
In[∘]:= Plot[X[t], {t, -6, 6}]
```



→ X6 is priodic Function

```
In[∘]:= X6_power = N[Integrate[X[t]^2, {t, -3, 3}]] / 6
```

Out[∘]= 0.560633

قسمت دوم
نکته اول

```
In[•]:= X3_energy = Integrate[X3[t]^2, {t, -Infinity, Infinity}]
```

Out[•]= $\frac{8\pi}{9\sqrt{3}}$

```
In[•]:= Integrate[X3[t]^2, {t, -Infinity, 0}] + Integrate[X3[t]^2, {t, 0, Infinity}]
```

Out[•]= $\frac{8\pi}{9\sqrt{3}}$

```
In[•]:= Limit[Integrate[((4x^2 + 7x - 2) / (x^2 + 1))^2 , {x, -T, T}] / (2T), T → Infinity ]
```

Out[•]= 16

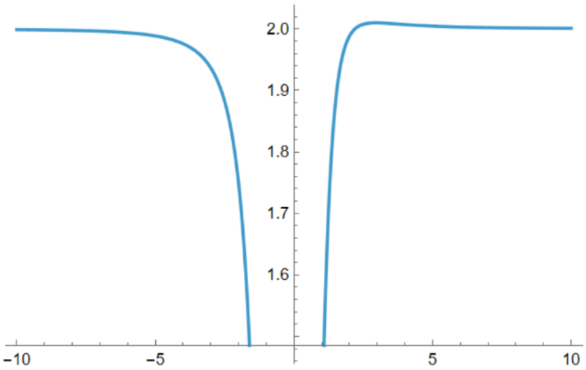
```
In[•]:= N[Limit[Integrate[((4x^2 + 7x - 2) / (x^2 + 1))^2 , {x, -T, -10}] / (T - 10), T → Infinity ] + Integrate[((4x^2 + 7x - 2) / (x^2 + 1))^2 , {x, -10, 10}] / 20 +
  Limit[Integrate[((4x^2 + 7x - 2) / (x^2 + 1))^2 , {x, 10, T}] / (T - 10), T → Infinity ]]
```

Out[•]= 47.1265

نکته دوم

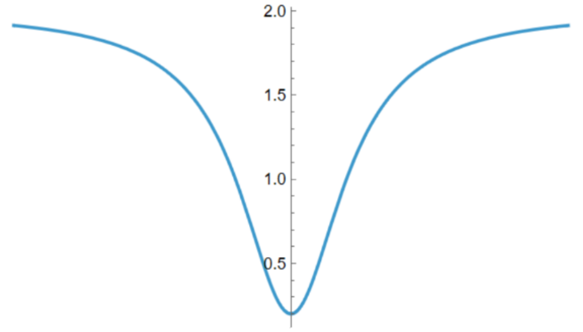
```
In[43]:= g[x_] := (10 x^4 + 5 x - 3) / (5 x^4 + 4)
         Plot[g[x], {x, -10, 10}]
```

Out[44]=




```
In[36]:= f[x_] := (2 x^2 + 1) / (x^2 + 5)
         Plot[f[x], {x, -10, 10}]
```

Out[37]=



نکته سوم

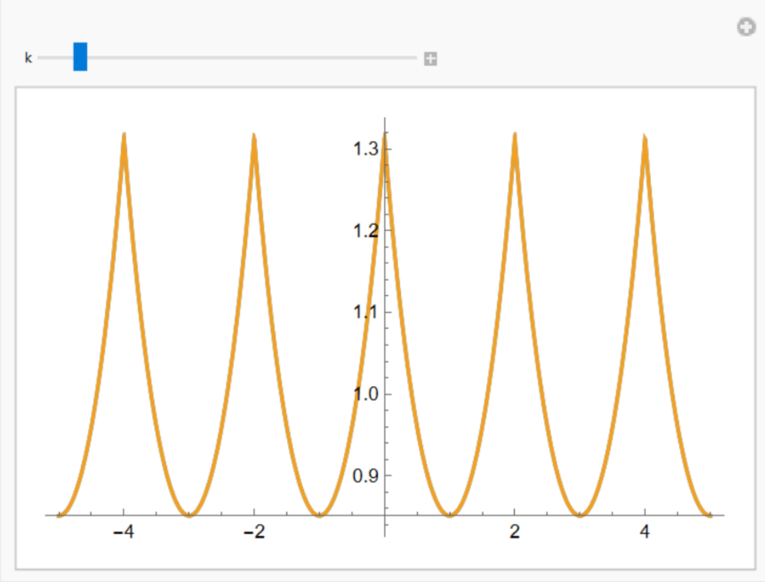
```
In[38]:= Limit[Integrate[(f[x])^2 , {x, -T, T}] / (2T), T → Infinity ]
```

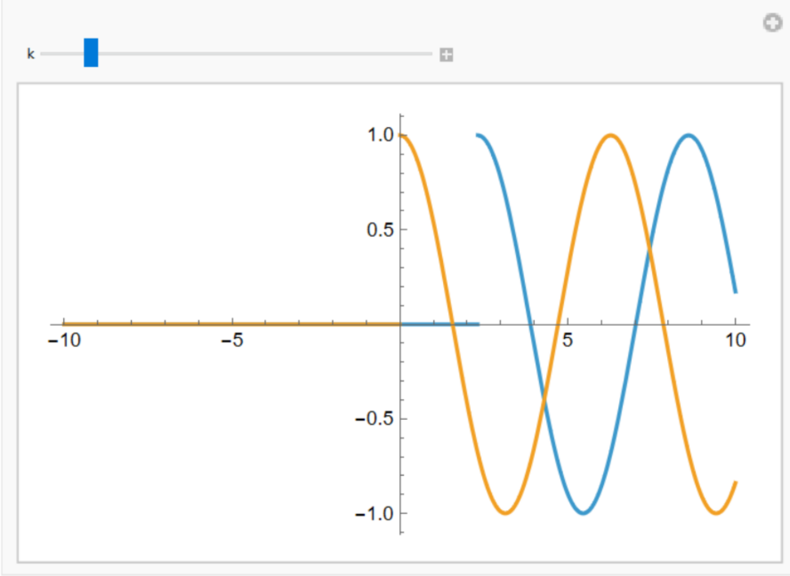
Out[38]= 4

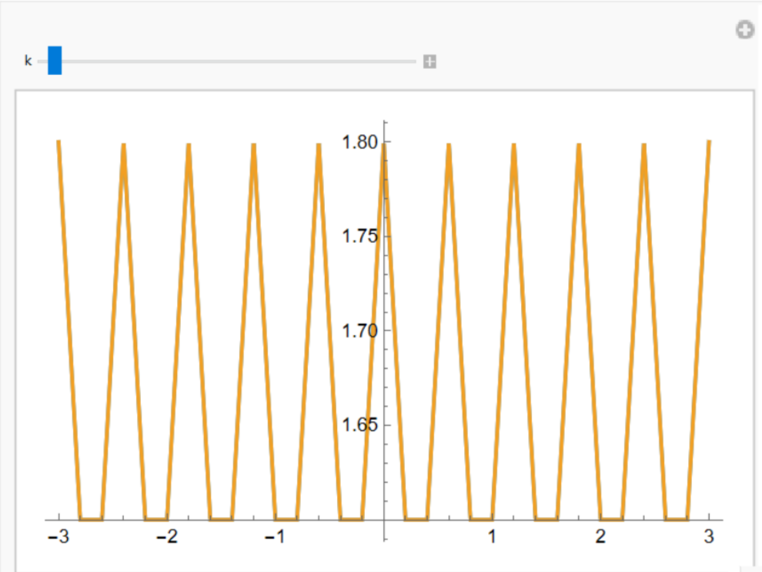
```
In[39]:= ((Limit[f[x], x → Infinity])^2 + (Limit[f[x], x → -Infinity])^2) / 2
```

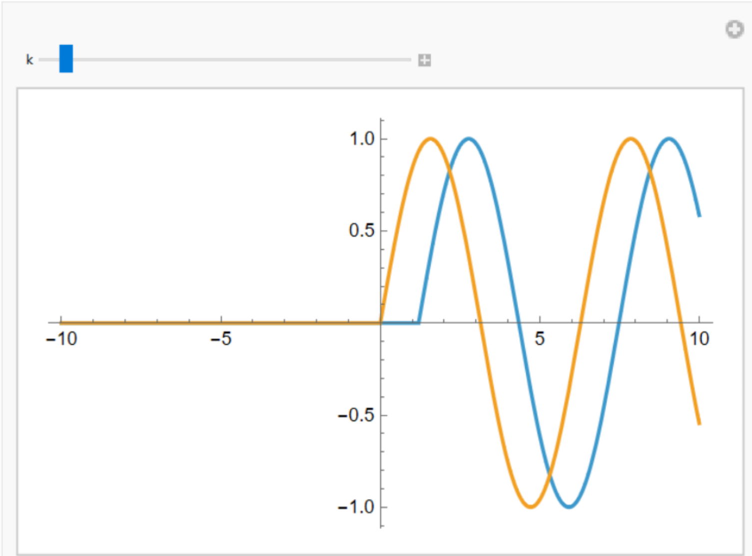
Out[39]= 4

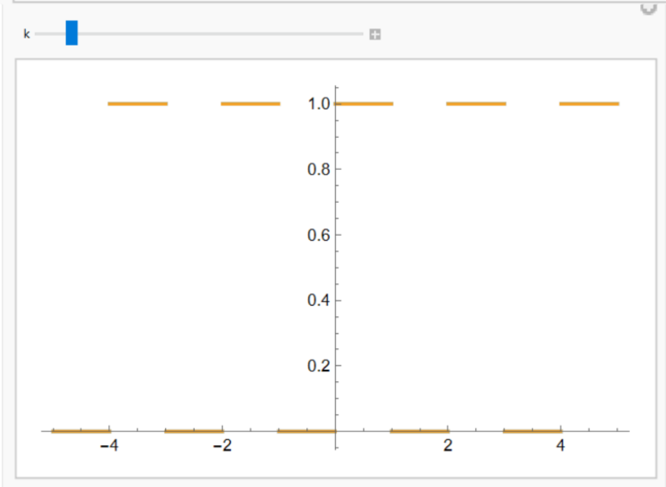
بخش سوم

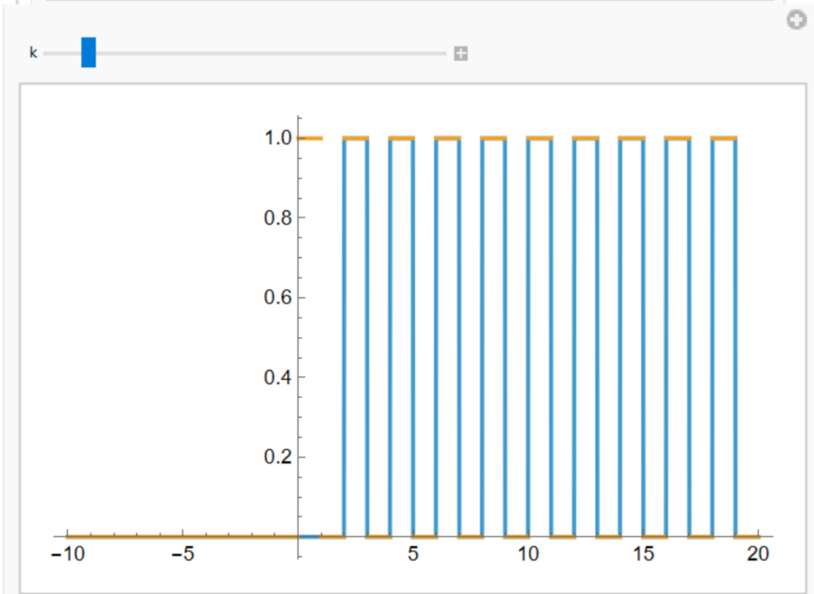

k
1.3
1.2
1.1
1.0
0.9
−4
−2
2
4

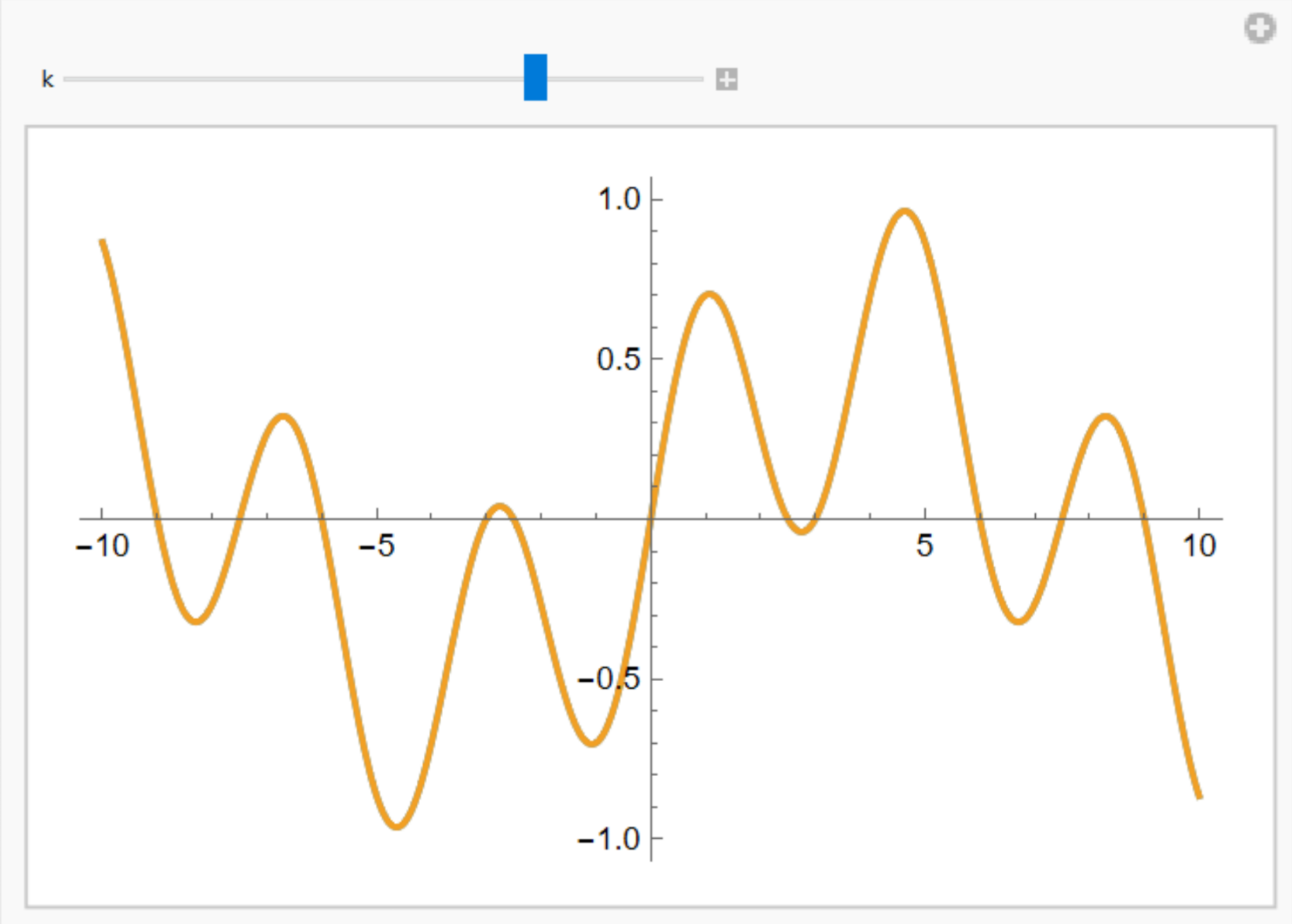

k
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−10
−5
5
10

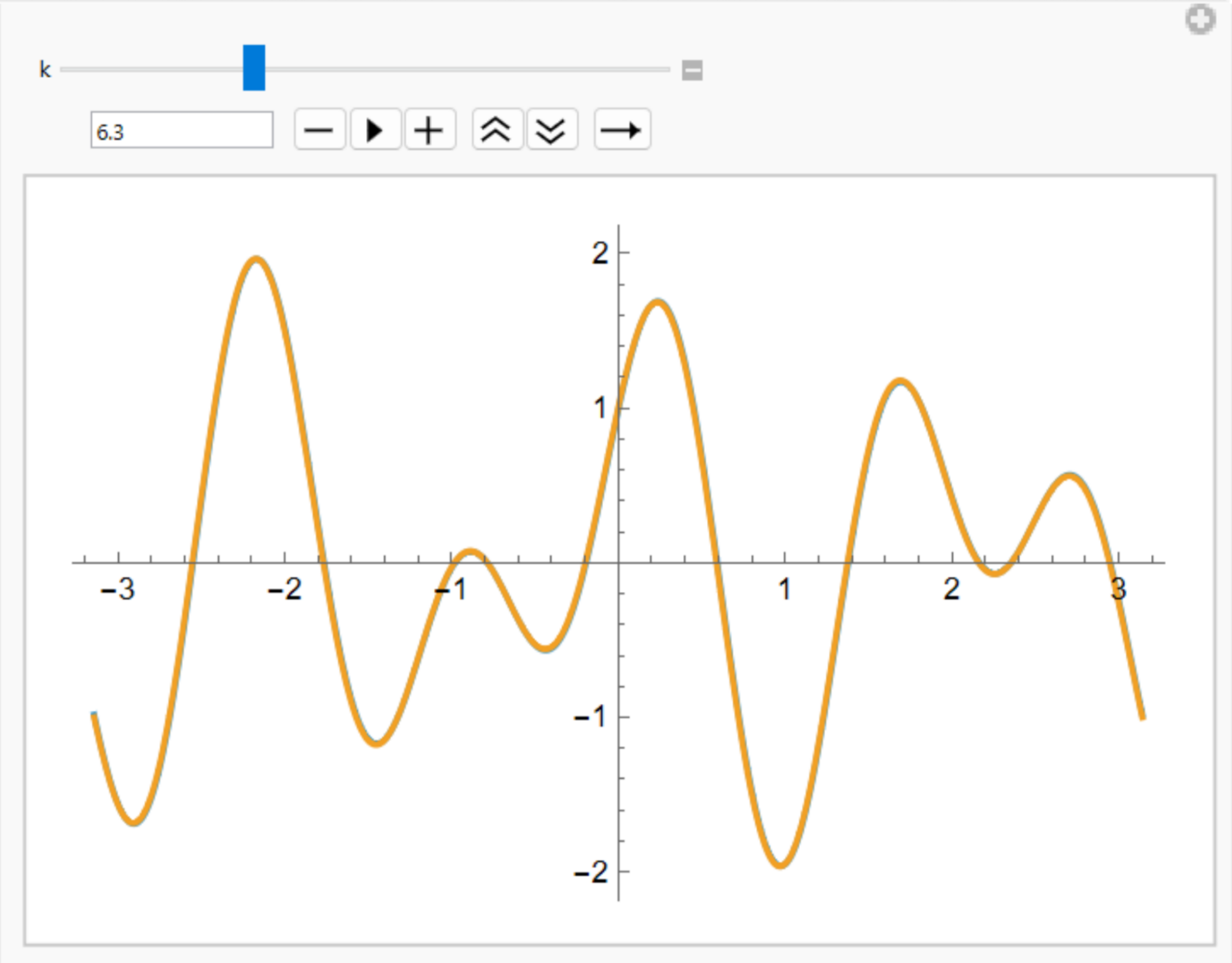

k
1.80
1.75
1.70
1.65
−3
−2
−1
1
2
3


k
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−10
−5
5
10


k
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−4
−2
2
4


k
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−10
−5
5
10
15
20


k
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−10
−5
5
10


k
6.3
2
1
−1
−2
−3
−2
−1
1
2
3

۲) برای سیگنال‌هایی که متناوب بدست آمدند، دوره تناوب اصلی را به صورت دستی نیز محاسبه کنید.

$k, h \in N$

1- $\cos(3t)+\sin(5t) = \cos(3(t-T_0)) + \sin(5(t-T_0))$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_0 = \frac{2\pi}{3}k \Rightarrow \\ T_0 = \frac{2\pi}{5}h \Rightarrow \end{cases} \frac{k}{h} = \frac{3}{5} \Rightarrow T_{0\,min} = 2\pi$$

2- $\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi(t-T_0)}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi(t-T_0)}{3}\right)$

$$\Rightarrow \begin{rcases} T_0 = 5k \Rightarrow \\ T_0 = 3h \Rightarrow \end{rcases} \frac{k}{h} = \frac{3}{5} \Rightarrow T_{0\,min} = 15$$

4 و 7 و 8 - تمامی توابع در تابع $rep_a[x(t)]$ متناوب با تناوب a هستند:

$$\text{Proof} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-ak-T_0) \Rightarrow T_0 = a$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-a(k+1)) \xrightarrow{n=k+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-an)$$

۳) اکنون بررسی کنید که آیا سیگنال زیر متناوب است یا خیر، در صورت متناوب بودن، پریود اصلی آن را بیان کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$Y(t) = X_1(t) + X_2(t)$$

پرسش) بررسی نمائید در چه صورت مجموع دو سیگنال متناوب، همچنان متناوب خواهد بود؟ (به بیان دیگر چه رابطه‌ای باید بین دوره تناوب سیگنال‌ها برقرار باشد.) در صورت برقراری شرط لازم، دوره تناوب چقدر است؟

$$x_1(t)+x_2(t) = x_1(t-T_0)+x_2(t-T_0)$$

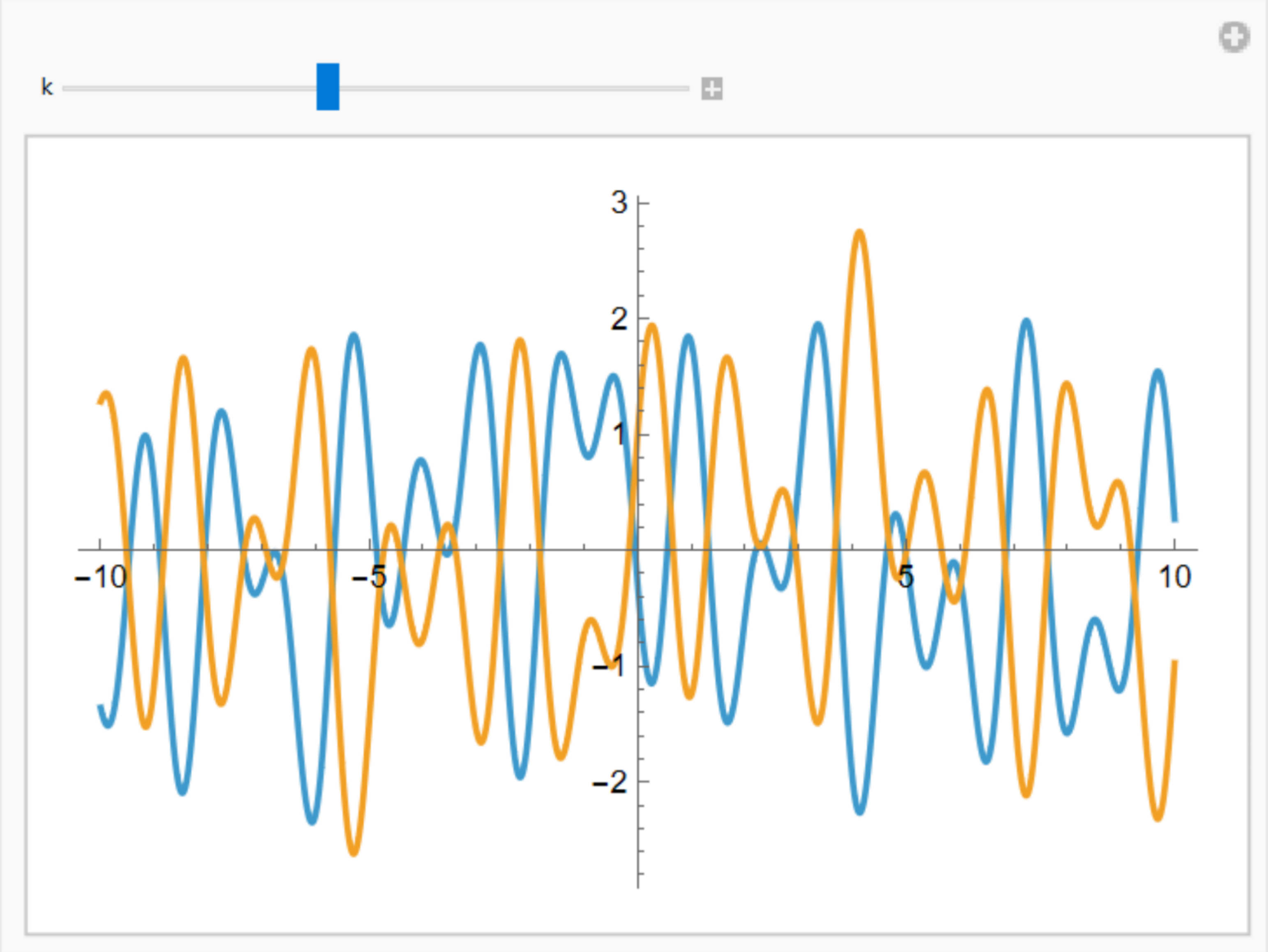
$T_{01} = 2\pi$ و $T_{02} = 15$

$$\begin{cases} T_0 = 2\pi k \\ T_0 = 15h \end{cases} \Rightarrow \frac{k}{h} = \frac{2\pi}{15} \times$$

طبق رابطه بالا سیگنال حاصل به هیچ عنوان متناوب نمی‌باشد و شرط تناوب مجموع دو سیگنال گویا بودن حاصل تقسیم تناوب دو سیگنال بر هم می‌باشد، در این صورت تناوب سیگنال حاصل از رابطه زیر به دست می‌آید

$k, h \in N$

$$\begin{matrix} T_0 = T_{01}k \\ T_0 = T_{02}h \end{matrix} \Rightarrow \frac{k}{h} = \frac{T_{02}}{T_{01}} \Rightarrow T_0 = k_{min}T_{01} = h_{min}T_{02}$$


k
3
2
1
−1
−2
−10
−5
5
10

بخـــش چهارم (محاسبه انتگرال‌های شامل ضربه و مشتقات آن)

با استفاده از خواص تابع ضربه، انتگرال های زیر را هم به صورت تئوری و هم شبیه‌سازی بدست آورید.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-3t}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{t}{2}-1\right)\right)\delta'(t-0.5)\,dt$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \left((t^2+2)\,\delta''(t+1) + \left(e^{-|t|}+t^2+2\right)\delta\left(e^{-|t|}+t^2+1\right)\right)dt$

3. $\int_{0}^{+\infty} (t^2+1)\left(\delta'(2t-6)+\delta(t^2-1)\right)dt$

1- $\left(e^{-3t}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)+\Lambda\left(\frac{t}{2}-1\right)\right)'\Big|_{t=\frac{1}{2}} \times (-1)^1$

$\Rightarrow \left(-3e^{-\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} - e^{-\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\times(-1) = \underline{0{,}221}$

2- $\int_{-\infty}^{+\infty}(t^2+2)\delta''(t+1)\,dt + \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-|t|}+t^2+2)\,\delta(e^{-|t|}+t^2+1)\,dt} = 0$

هیچگاه صفر نیست

$\Rightarrow (t^2+2)''\Big|_{t=-1} \Rightarrow \underline{2}$

3- $\int_{0}^{+\infty}(t^2+1)\delta'(2t-6)\,dt + \int_{0}^{\infty}(t^2+1)\,\delta(t^2-1)\,dt$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(ax+b)\,dx = \frac{f\left(-\frac{b}{a}\right)}{|a|} \Rightarrow$ ⁰/₀b

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(ax+b)\,dx = \frac{-f'(-\frac{b}{a})}{a|a|} \quad ☆$$

$$\delta(g(x)) = \begin{cases} 0 & g(x) \neq 0 \\ \infty & g(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta(g(x)) = \sum_{i=0}^{N} a_i \delta(t - x_i)$$

$$\int_{x_i^-}^{x_i^+} \delta(g(x)) = a_i \quad , \quad g(x) = \underbrace{\cancel{\frac{g(x_i)}{0!}}}_{0} + \frac{g'(x_i)}{1!}(x - x_i) + \underbrace{\cancel{\cdots}}_{0}$$

$$\Rightarrow \int_{x_i^-}^{x_i^+} \delta(g'(x_i)(x - x_i)) = \frac{1}{|g'(x_i)|} \quad ☆☆$$

$$\overset{☆,☆☆}{\Longrightarrow} \frac{+(2\times 3)}{2\times 2} = -\frac{3}{2} + \frac{(1^2+1)}{2} = -\frac{3}{2} + 1 = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

بخش چهارم

```
In[•]:= Integrate[(E^(-3 t) Cos[Pi t / 2] + UnitTriangle[t / 2 - 1]) DiracDelta'[t - 0.5], {t, -100, 100}]

Out[•]= 0.221166

In[•]:= Integrate[(t^2 + 2) DiracDelta''[t + 1] + (E^(-Abs[t]) + t^2 + 2) DiracDelta[E^(-Abs[t]) + t^2 + 1], {t, -100, 100}]

Out[•]= 2

In[•]:= Integrate[(t^2 + 1) (DiracDelta'[2 t - 6] + DiracDelta[t^2 - 1]), {t, 0, 100}]

         1
Out[•]= --
         2
```

بخـــش پنجم (شبیه‌سازی تابع دلتای دیراک)

قصد داریم تابع دلتای دیراک را تعریف کنیم؛ بدین منظور سیگنال‌های زیر را در نظر بگیرید:

1. $X_1(t,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\, sinc\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2$

2. $X_2(t,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{4\,\varepsilon}\, \Pi\left(\frac{t}{4\,\varepsilon}\right)$

3. $X_3(t,\varepsilon) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(1-\frac{|t|}{\varepsilon}\right) & |t| \le \varepsilon \\ 0 & otherwise \end{cases}$

4. $X_4(t,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-\frac{t}{\varepsilon}} u(t)$

5. $X_5(t,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sin\left(\frac{t}{|\varepsilon|}\right)}{\pi t}$ $\binom{Q6}{HW1}$

6. $X_6(t,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\varepsilon|}{\pi(t^2+\varepsilon^2)}$ $\binom{Q6}{HW1}$

۱) ابتدا برای سیگنال X_1 تا X_4 ، شروط مورد نیاز برای تحقق تابع دلتای دیراک را به صورت تئوری بررسی کنید.

* **توجه:** می‌توانید از بررسی تئوری شرایط زیر برای تحقق تابع دلتای دیراک استفاده کنید:

$$\forall t \neq 0 \to \delta(t) = 0 \quad and \quad \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1$$

1- $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sin^2(\frac{t\pi}{\varepsilon})}{(\frac{t}{\varepsilon}\pi)^2} \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \frac{\sin^2(\frac{t}{\varepsilon}\pi)}{t^2\pi^2}$

$\sin < 1 \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\pi^2 t^2} \Rightarrow t > |\sqrt{\varepsilon}| \Rightarrow 0$

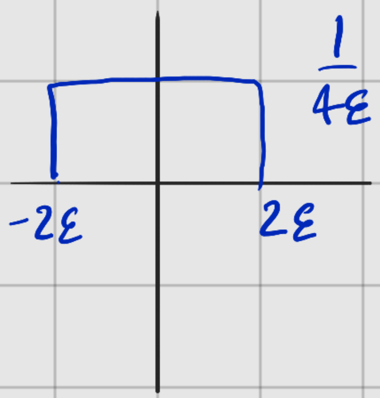
$\int_{0^-}^{0^+} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \frac{\sin(\frac{t}{\varepsilon}\pi)^2}{t^2\pi^2} dt \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\sin(\frac{t}{\varepsilon}\pi)^2}{t^2\pi^2} dt$

$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \left(\frac{-\sin^2(\frac{t}{\varepsilon}\pi)}{t} + \frac{\int_0^{\frac{2t}{\varepsilon}} \frac{\sin(u)}{u} du}{\varepsilon\pi} \right) \Big|_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}}$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \cancel{-\sqrt{\varepsilon}\, 2\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}^{\,0}_{\;<1} + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}} \operatorname{sinc}(u)\,du - \int_0^{-\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}} \operatorname{sinc}(u)\,du}{\pi}$$

$$= \frac{2\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{sinc}(u)\,du}{\pi} = 1$$

2_ $\frac{1}{4\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{4\varepsilon}\right) =$

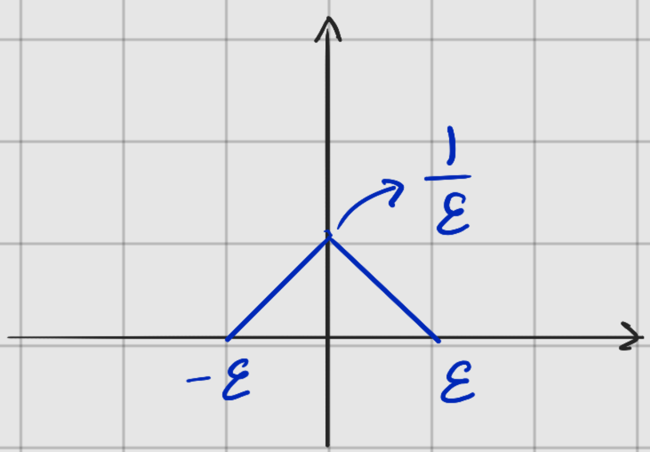


$$\Rightarrow \forall t > |2\varepsilon| \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \Rightarrow \forall t > |20| \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{4\varepsilon}\,\Pi\left(\frac{t}{4\varepsilon}\right) dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{4\varepsilon}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} 1\,dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{4\varepsilon}{4\varepsilon} = 1$$

3_ $x_3(t,\varepsilon) =$



$$\Rightarrow \forall t > |\varepsilon| \Rightarrow x_3 = 0 \quad \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \Rightarrow \forall t > |0| \Rightarrow x_3 = 0$$

$$\int_{0^-}^{0^+} x_3(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3(t)\,dt = S_{triangle} = \cancel{2}\cancel{\varepsilon} \times \frac{1}{\cancel{\varepsilon}} \times \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$= 1$$

$$\frac{\varepsilon^{n/m}}{\varepsilon}$$

4- $$x_4(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{-\frac{t}{\varepsilon}}}{\varepsilon} \quad \text{if}(t > \sqrt{\varepsilon}) \qquad e^{-\infty} \times \frac{1}{0} = 0$$

order به صفر میل کردن تابع نمایی بالاتر از تابع خطی می باشد.

$$\int_{0^-}^{0^+} x_4(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\,dt \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} -e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \Big|_0^{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$1 - \lim_{\varepsilon \to 0} -e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} = 1$$