CAPITOLO 6

# Leggi congiunte di variabili aleatorie

## 6.1 FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE CONGIUNTE

Fino a ora abbiamo considerato unicamente le leggi di singole variabili aleatorie. Tuttavia, siamo spesso interessati a studiare problemi di probabilità legati al valore congiunto di due o più variabili aleatorie. Per trattare queste probabilità, definiamo, per due variabili aleatorie $X$ e $Y$, la *funzione di distribuzione congiunta* di $X$ e $Y$ come

$$F(a,b) = P\{X \le a, Y \le b\} \qquad -\infty < a,b < \infty$$

La funzione di distribuzione di $X$ può essere ottenuta da quella congiunta di $X$ e $Y$ come segue:

$$\begin{aligned}
F_X(a) &= P\{X \le a\} \\
&= P\{X \le a, Y < \infty\} \\
&= P\Big(\lim_{b\to\infty} \{X \le a, Y \le b\}\Big) \\
&= \lim_{b\to\infty} P\{X \le a, Y \le b\} \\
&= \lim_{b\to\infty} F(a,b) \\
&\equiv F(a,\infty)
\end{aligned}$$

Il lettore può notare che nelle precedenti uguaglianze abbiamo fatto uso una volta di più del fatto che la probabilità è un funzione d'insieme continua. In maniera analoga, la funzione di distribuzione della variabile $Y$ è data da

$$\begin{aligned}
F_Y(b) &= P\{Y \le b\} \\
&= \lim_{a\to\infty} F(a,b) \\
&\equiv F(\infty,b)
\end{aligned}$$

Le funzioni di distribuzioni $F_X$ e $F_Y$ sono definite le funzioni di distribuzione *marginali* di $X$ e $Y$.

Tutte le proprietà riguardanti le probabilità relative alle variabili $X$ e $Y$ possono, in teoria, essere espresse in termini della loro funzione di distribuzione congiunta. Per esempio, supponiamo di voler calcolare la probabilità che $X$ sia maggiore di $a$ e $Y$ sia maggiore di $b$.

Questo può essere fatto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} P\{X > a, Y > b\} &= 1 - P(\{X > a, Y > b\}^c) \\ &= 1 - P(\{X > a\}^c \cup \{Y > b\}^c) \\ &= 1 - P(\{X \le a\} \cup \{Y \le b\}) \qquad (1.1) \\ &= 1 - [P\{X \le a\} + P\{Y \le b\} - P\{X \le a, Y \le b\}] \\ &= 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a, b) \end{aligned}$$

La Formula (1.1) è un caso speciale della Formula (1.2), la cui dimostrazione è lasciata come esercizio.

$$\begin{aligned} &P\{a_1 < X \le a_2, b_1 < Y \le b_2\} \\ &\quad = F(a_2, b_2) + F(a_1, b_1) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) \qquad (1.2) \end{aligned}$$

quando $a_1 < a_2, b_1 < b_2$.

Nel caso in cui sia $X$ che $Y$ siano variabili aleatorie discrete, è conveniente definire la (funzione di) densità discreta congiunta di $X$ e $Y$ come segue

$$p(x, y) = P\{X = x, Y = y\}$$

La densità discreta di $X$ può essere ottenuta da $p(x, y)$ tramite

$$\begin{aligned} p_X(x) &= P\{X = x\} \\ &= \sum_{y:p(x,y)>0} p(x, y) \end{aligned}$$

In maniera analoga,

$$p_Y(y) = \sum_{x:p(x,y)>0} p(x, y)$$

**Esempio 1a.** Supponiamo che vengano scelte a caso 3 palline da un'urna contenente 3 palline rosse, 4 bianche e 5 blu. Se denotiamo con $X$ e $Y$, rispettivamente, il numero di palline rosse e bianche scelte, allora la densità discreta congiunta di $X$ e $Y$, $p(i, j) = P\{X = i, Y = j\}$, è data da

$$p(0, 0) = \binom{5}{3}\bigg/\binom{12}{3} = \frac{10}{220}$$

$$p(0, 1) = \binom{4}{1}\binom{5}{2}\bigg/\binom{12}{3} = \frac{40}{220}$$

$$p(0, 2) = \binom{4}{2}\binom{5}{1}\bigg/\binom{12}{3} = \frac{30}{220}$$

$$p(0, 3) = \binom{4}{3}\bigg/\binom{12}{3} = \frac{4}{220}$$

$$p(1, 0) = \binom{3}{1}\binom{5}{2}\bigg/\binom{12}{3} = \frac{30}{220}$$

$$p(1, 1) = \binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}\bigg/\binom{12}{3} = \frac{60}{220}$$

**TABELLA 6.1** $P\{X = i, Y = j\}$

| $i$ \ $j$ | 0 | 1 | 2 | 3 | Somme sulla riga $= P\{X = i\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{10}{220}$ | $\frac{40}{220}$ | $\frac{30}{220}$ | $\frac{4}{220}$ | $\frac{84}{220}$ |
| 1 | $\frac{30}{220}$ | $\frac{60}{220}$ | $\frac{18}{220}$ | 0 | $\frac{108}{220}$ |
| 2 | $\frac{15}{220}$ | $\frac{12}{220}$ | 0 | 0 | $\frac{27}{220}$ |
| 3 | $\frac{1}{220}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{220}$ |
| Somme sulla colonna $= P\{Y = j\}$ | $\frac{56}{220}$ | $\frac{112}{220}$ | $\frac{48}{220}$ | $\frac{4}{220}$ | |

$$p(1,2) = \binom{3}{1}\binom{4}{2}\Big/\binom{12}{3} = \frac{18}{220}$$

$$p(2,0) = \binom{3}{2}\binom{5}{1}\Big/\binom{12}{3} = \frac{15}{220}$$

$$p(2,1) = \binom{3}{2}\binom{4}{1}\Big/\binom{12}{3} = \frac{12}{220}$$

$$p(3,0) = \binom{3}{3}\Big/\binom{12}{3} = \frac{1}{220}$$

Queste probabilità possono facilmente essere tabulate come nella Tabella 6.1. Il lettore noti che la densità discreta della variabile $X$ si ottiene calcolando le somme sulle righe, mentre quella di $Y$ si ottiene sommando i valori sulle colonne. Siccome le densità discrete di $X$ e $Y$ appaiono ai margini di questa tabella, per questo motivo hanno ricevuto il nome di densità marginali. ■

**Esempio 1b.** Supponiamo che il 15 per cento delle famiglie in una certa comunità non abbia bambini, che il 20 per cento ne abbia 1, il 35 per cento ne abbia 2 e il 30 per cento ne abbia 3; e supponiamo, inoltre, che in ogni famiglia, ogni figlio sia con uguale probabilità maschio o femmina in maniera indipendente. Se scegliamo a caso una famiglia di questa comunità, allora $M$, il numero di maschi e $F$, il numero delle femmine, in questa famiglia hanno la densità discreta congiunta mostrata nella Tabella 6.2.

**TABELLA 6.2** $P\{B = i, G = j\}$

| $i$ \ $j$ | 0 | 1 | 2 | 3 | Somme sulla riga $= P\{B = i\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.15 | 0.10 | 0.0875 | 0.0375 | 0.3750 |
| 1 | 0.10 | 0.175 | 0.1125 | 0 | 0.3875 |
| 2 | 0.0875 | 0.1125 | 0 | 0 | 0.2000 |
| 3 | 0.0375 | 0 | 0 | 0 | 0.0375 |
| Somme sulla colonna $= P\{G = j\}$ | 0.3750 | 0.3875 | 0.2000 | 0.0375 | |

Queste probabilità si ottengono come segue:

$$
\begin{aligned}
P\{B = 0, G = 0\} &= P\{\text{senza figli}\} = 0.15 \\
P\{B = 0, G = 1\} &= P\{\text{1 femmina e in totale 1 figlio}\} \\
&= P\{\text{1 figlio}\}P\{\text{1 femmina}|\text{1 figlio}\} = (0.20)\left(\tfrac{1}{2}\right) \\
P\{B = 0, G = 2\} &= P\{\text{2 femmine e in totale 2 figli}\} \\
&= P\{\text{2 figli}\}P\{\text{2 femmine}|\text{2 figli}\} = (0.35)\left(\tfrac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Lasciamo al lettore di verificare l'esattezza degli altri valori della Tabella 6.2. ■

Diciamo che le variabili aleatorie $X$ e $Y$ sono *congiuntamente* (*assolutamente*) *continue* se esiste una funzione $f(x, y)$ integrabile, che abbia la proprietà che per ogni sottoinsieme $C$ dello spazio delle coppie di numeri reali

$$
P\{(X, Y) \in C\} = \iint_{(x,y)\in C} f(x, y)\, dx\, dy \tag{1.3}
$$

La funzione $f(x, y)$ è chiamata (*funzione di*) *densità congiunta* di $X$ e $Y$. Se $A$ e $B$ sono una qualsiasi coppia di sottoinsiemi della retta reale, allora definendo $C = \{(x, y): x \in A, y \in B\}$, dalla Formula (1.3) otteniamo che

$$
P\{X \in A, Y \in B\} = \int_B \int_A f(x, y)\, dx\, dy \tag{1.4}
$$

Poiché

$$
\begin{aligned}
F(a, b) &= P\{X \in (-\infty, a], Y \in (-\infty, b]\} \\
&= \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{a} f(x, y)\, dx\, dy
\end{aligned}
$$

segue, differenziando, che

$$
f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial a\, \partial b} F(a, b)
$$

sempre che le derivate parziali di $F$ abbiano senso. Un'ulteriore interpretazione della densità congiunta si ottiene dalla Formula (1.4) nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
P\{a < X < a + da, b < Y < b + db\} &= \int_{b}^{d+db} \int_{a}^{a+da} f(x, y)\, dx\, dy \\
&\approx f(a, b)\, da\, db
\end{aligned}
$$

quando $da$ e $db$ sono "piccoli" e $f(x, y)$ è continua in $(a, b)$. Perciò $f(a, b)$ risulta una misura di quanto sia probabile che il vettore (aleatorio) $(X, Y)$ sia vicino a $(a, b)$.

Se $X$ e $Y$ sono congiuntamente continue, esse lo saranno anche individualmente, e le loro densità si posso ottenere come segue:

$$
P\{X \in A\} = P\{X \in A, Y \in (-\infty, \infty)\}
$$

$$= \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \int_A f_X(x)\, dx$$

dove

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

è perciò la densità (marginale) della variabile aleatoria $X$.

In maniera analoga, la densità (marginale) di $Y$ è data da

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

**Esempio 1c.** La densità congiunta di $X$ e $Y$ è data da

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si calcolino (a) $P\{X > 1, Y < 1\}$, (b) $P\{X < Y\}$, e (c) $P\{X < a\}$.

**Soluzione**

(a) $$P\{X > 1, Y < 1\} = \int_0^1 \int_1^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\, dx\, dy$$
$$= \int_0^1 2e^{-2y}\left(-e^{-x}\Big|_1^{\infty}\right) dy$$
$$= e^{-1}\int_0^1 2e^{-2y}\, dy$$
$$= e^{-1}(1 - e^{-2})$$

(b) $$P\{X < Y\} = \iint\limits_{(x,y):\, x<y} 2e^{-x}e^{-2y}\, dx\, dy$$
$$= \int_0^{\infty}\int_0^{y} 2e^{-x}e^{-2y}\, dx\, dy$$
$$= \int_0^{\infty} 2e^{-2y}(1 - e^{-y})\, dy$$
$$= \int_0^{\infty} 2e^{-2y}\, dy - \int_0^{\infty} 2e^{-3y}\, dy$$
$$= 1 - \tfrac{2}{3}$$
$$= \tfrac{1}{3}$$

$$\text{(c)}\ P\{X < a\} = \int_0^a \int_0^\infty 2e^{-2y}e^{-x}\,dy\,dx$$
$$= \int_0^a e^{-x}\,dx$$
$$= 1 - e^{-a}$$

■

**Esempio 1d.** Si consideri un cerchio di raggio $R$ e supponiamo di scegliere a caso un punto dentro il cerchio in modo tale che tutte le regioni di uguale area interne al cerchio abbiano uguale probabilità di contenere il punto. (In altre parole, il punto è uniformemente distribuito dentro il cerchio.) Se fissiamo il centro del cerchio come l'origine di un sistema di assi cartesiani e $X$ e $Y$ rappresentano le coordinate del punto scelto (Figura 6.1), segue che, essendo $(X, Y)$ un punto scelto a caso e in modo uniforme, la densità congiunta di $X$ e $Y$ è data da

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{se } x^2 + y^2 \le R^2 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

per un qualche $c$.

(a) Si determini la costante $c$.
(b) Si determinino le densità marginali di $X$ e $Y$.
(c) Si calcoli la probabilità che $D$, la distanza dall'origine del punto selezionato, sia minore o uguale a $a$.
(d) Si trovi $E[D]$.

**Soluzione** (a) Poiché

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy\,dx = 1$$

segue che

$$c \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} dy\,dx = 1$$

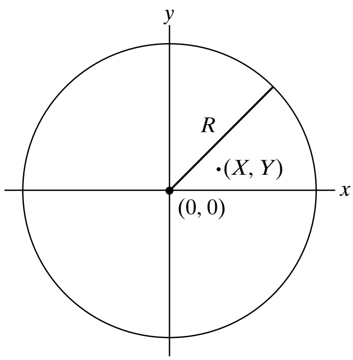


**Figura 6.1** Distribuzione congiunta.

Possiamo calcolare $\iint_{x^2+y^2\leq R^2} dy\,dx$ utilizzando la trasformazione a coordinate polari, o più semplicemente notando che essa rappresenta l'area del cerchio ed è quindi uguale a $\pi R^2$. Quindi

$$c = \frac{1}{\pi R^2}$$

(b)
$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\int_{x^2+y^2\leq R^2} dy \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\int_{-c}^{c} dy \qquad c = \sqrt{R^2 - x^2} \\
&= \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2} \qquad x^2 \leq R^2
\end{aligned}$$

ed è uguale a 0 quando $x^2 > R^2$. Per simmetria la densità marginale di Y è data da

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2} \qquad & y^2 \leq R^2 \\
&= 0 & y^2 > R^2
\end{aligned}$$

(c) Per la funzione di distribuzione di $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$, la distanza dall'origine, si ottiene quanto segue: per $0 \leq a \leq R$,

$$\begin{aligned}
F_D(a) &= P\left\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq a\right\} \\
&= P\{X^2 + Y^2 \leq a^2\} \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} f(x,y)\,dy\,dx \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq a} dy\,dx \\
&= \frac{\pi a^2}{\pi R^2} \\
&= \frac{a^2}{R^2}
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\iint_{x^2+y^2\leq a^2} dy\,dx$ è l'area del cerchio di raggio a e quindi è pari a $\pi a^2$.

(d) Per il punto (c) otteniamo che la densità di $D$ è

$$f_D(a) = \frac{2a}{R^2} \qquad 0 \leq a \leq R$$

Quindi

$$E[D] = \frac{2}{R^2}\int_0^R a^2\,da = \frac{2R}{3} \qquad \blacksquare$$

**Esempio 1e.** La densità congiunta di $X$ e $Y$ è data da

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si determini la densità della variabile $X/Y$.

**Soluzione** Iniziamo calcolando la funzione di distribuzione di $X/Y$. Per $a > 0$,

$$\begin{aligned} F_{X/Y}(a) &= P\left\{\frac{X}{Y} \le a\right\} \\ &= \iint\limits_{x/y \le a} e^{-(x+y)}\,dx\,dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{ay} e^{-(x+y)}\,dx\,dy \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-ay})e^{-y}\,dy \\ &= \left\{-e^{-y} + \frac{e^{-(a+1)y}}{a+1}\right\}\Bigg|_0^\infty \\ &= 1 - \frac{1}{a+1} \end{aligned}$$

Differenziando otteniamo che la densità di $X/Y$ è data da $f_{X/Y}(a) = 1/(a+1)^2$, $0 < a < \infty$. ■

Possiamo definire in maniera analoga al caso di due variabile, la distribuzione di probabilità congiunta di $n$ variabili aleatorie. Per esempio, la funzione di distribuzione congiunta $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ di $n$ variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si definisce

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = P\{X_1 \le a_1, X_2 \le a_2, \ldots, X_n \le a_n\}$$

Inoltre, le $n$ variabili aleatorie sono dette congiuntamente continue se esiste una funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, detta densità congiunta, tale che per ogni sottoinsieme $C$ dello spazio delle $n$-uple di numeri reali

$$P\{(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C\} = \iint\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\in C}\cdots\int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

In particolare, per ogni famiglia di sottoinsiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ della retta reale

$$P\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n\}$$

$$= \int_{A_n} \int_{A_{n-1}} \cdots \int_{A_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

**Esempio 1f.** ***La distribuzione multinomiale.*** Una delle più importanti distribuzioni congiunte è certamente la multinomiale, che si ottiene quando si ripeta $n$ volte un esperimento in forma indipendente. Supponiamo che ogni esperimento possa avere come risultato uno qualsiasi tra $r$ possibili esiti, con probabilità pari a $p_1, p_2, \ldots, p_r$, $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$, rispettivamente. Se denotiamo con $X_i$ il numero degli $n$ esperimenti che hanno dato come risultato l'esito numero $i$, allora

$$P\{X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_r = n_r\} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r} \tag{1.5}$$

ogni volta che $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.

La Formula (1.5) è verificata notando che ogni successione degli esiti degli $n$ esperimenti che portano al fatto che l'esito $i$ si verifichi esattamente $n_i$ volte, per $i = 1, 2, \ldots, r$, avrà probabilità pari a $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$, grazie all'ipotesi di indipendenza. Essendoci $n!/(n_1!\, n_2! \ldots n_r!)$ di tali sequenze (vi sono $n!/n_1! \ldots n_r!$ permutazioni di $n$ oggetti dei quali $n_1$ sono uguali tra loro, $n_2$ sono uguali tra loro, $\ldots$, $n_r$ sono uguali tra loro) la Formula (1.5) risulta verificata. La distribuzione congiunta determinata dalla densità discreta congiunta data dalla Formula (1.5) è detta distribuzione multinomiale. Il lettore noterà che per $r = 2$, la distribuzione multinomiale si riduce all'usuale binomiale.

Come applicazione della distribuzione multinomiale, supponiamo di lanciare 9 volte un dado equilibrato. La probabilità che 1 appaia tre volte, 2 e 3 due volte ciascuno, 4 e 5 una sola volta ciascuno e il 6 mai, è pari a

$$\frac{9!}{3!\,2!\,2!\,1!\,1!\,0!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^0 = \frac{9!}{3!\,2!\,2!}\left(\frac{1}{6}\right)^9 \qquad \blacksquare$$

## 6.2 VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI

Le variabili aleatorie $X$ e $Y$ si dicono *indipendenti* se, per ogni coppia di sottoinsiemi della retta reale $A$ e $B$,

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\} \tag{2.1}$$

In altre parole, $X$ e $Y$ sono indipendenti se, per ogni $A$ e $B$, gli eventi $E_A = \{X \in A\}$ e $F_B = \{Y \in B\}$ sono indipendenti.

Grazie agli assiomi della probabilità si può provare che l'Equazione (2.1) è verificata se e solo se per ogni coppia di numeri reali $a, b$,

$$P\{X \leq a, Y \leq b\} = P\{X \leq a\}P\{Y \leq b\}$$

Quindi, in termini della distribuzione congiunta $F$ di $X$ e $Y$, abbiamo che $X$ e $Y$ sono indipendenti se e solo se

$$F(a, b) = F_X(a)F_Y(b) \qquad \text{per ogni } a, b$$

Quando $X$ e $Y$ sono variabili aleatorie discrete, la definizione d'indipendenza (2.1) risulta equivalente a

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \qquad \text{per ogni } x, y \tag{2.2}$$

L'equivalenza segue poiché, se (2.1) è soddisfatta, allora otteniamo la (2.2) ponendo $A$ e $B$ uguali, rispettivamente, ai sottoinsiemi formati da un solo punto $A = \{x\}$, $B = \{y\}$. Inoltre, se (2.2) è soddisfatta, allora per ogni coppia di sottoinsiemi $A$ e $B$,

$$\begin{aligned} P\{X \in A, Y \in B\} &= \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} p(x, y) \\ &= \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} p_X(x)p_Y(y) \\ &= \sum_{y \in B} p_Y(y) \sum_{x \in A} p_X(x) \\ &= P\{Y \in B\}P\{X \in A\} \end{aligned}$$

e quindi la (2.1) risulta verificata.

Nel caso di variabili congiuntamente continue la condizione d'indipendenza è equivalente a

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad \text{per ogni } x, y$$

Perciò, semplificando, $X$ e $Y$ sono indipendenti se la conoscenza del valore di una non cambia la distribuzione dell'altra. Le variabili che non sono indipendenti vengono definite *dipendenti*.

**Esempio 2a.** Supponiamo che vengano eseguite $n + m$ prove indipendenti, ognuna delle quali abbia probabilità pari a $p$ di risultare in un successo. Se $X$ è il numero di successi nelle prime $n$ prove e $Y$ il numero di successi nelle $m$ prove successive, allora $X$ e $Y$ sono indipendenti, già che conoscere il numero dei successi nelle prime $n$ prove non modifica la distribuzione del numero di successi nelle ulteriori $m$ prove (per l'ipotesi di indipendenza delle prove). Infatti, per valori interi positivi $x$ e $y$,

$$\begin{aligned} P\{X = x, Y = y\} &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \binom{m}{y} p^y (1-p)^{m-y} \qquad \begin{array}{l} 0 \le x \le n, \\ 0 \le y \le m \end{array} \\ &= P\{X = x\}P\{Y = y\} \end{aligned}$$

D'altra parte anche $X$ e $Z$ saranno indipendenti, dove $Z$ è il numero totale di successi nelle $n + m$ prove (perché?). ∎

**Esempio 2b.** Supponiamo che il numero di persone che entrano in un ufficio postale in un dato giorno sia descrivibile con una variabile di Poisson di parametro $\lambda$. Si provi che, se ogni persona che entra nell'ufficio postale è un uomo con probabilità pari a $p$ e donna con probabilità pari a $1 - p$, allora il numero di uomini e donne che entrano nell'ufficio postale sono variabili aleatorie di Poisson indipendenti di parametri rispettivamente pari a $\lambda p$ e $\lambda(1 - p)$.

**Soluzione** Denotiamo con $X$ e $Y$, rispettivamente, il numero di uomini e donne che entrano nell'ufficio postale. Proveremo che sono indipendenti dimostrando che la Formula (2.2) è verificata. Per ottenere questa espressione per $P\{X = i, Y = j\}$, condizioniamo rispetto a $X + Y$ come segue:

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i, Y = j | X + Y = i + j\}P\{X + Y = i + j\}$$
$$+ P\{X = i, Y = j | X + Y \neq i + j\}P\{X + Y \neq i + j\}$$

[Il lettore noti come questa formula non sia altro che un caso particolare della formula $P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)$.]

Essendo $P\{X = i, Y = j | X + Y \neq i + j\}$ chiaramente pari a 0, otteniamo

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i, Y = j | X + Y = i + j\}P\{X + Y = i + j\} \quad (2.3)$$

Ora, siccome $X + Y$ rappresenta il numero totale di persone che entrano nell'ufficio postale, segue, per ipotesi, che

$$P\{X + Y = i + j\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i + j)!} \quad (2.4)$$

Inoltre, dato che $i + j$ persone entrano nell'ufficio postale e con probabilità pari a $p$ ognuna di esse è un uomo, segue che la probabilità che esattamente $i$ di essi sia un uomo (e quindi $j$ siano donne) è semplicemente la densità discreta di una variabile binomiale di parametri $i + j$ e $p$ valutata in $i$, ovvero $\binom{i + j}{i}p^i(1 - p)^j$. Quindi

$$P\{X = i, Y = j | X + Y = i + j\} = \binom{i + j}{i}p^i(1 - p)^j \quad (2.5)$$

Sostituendo la (2.4) e la (2.5) nella (2.3) abbiamo

$$\begin{aligned} P\{X = i, Y = j\} &= \binom{i + j}{i}p^i(1 - p)^j e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i + j)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^i}{i!\, j!}[\lambda(1 - p)]^j \\ &= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1 - p)]^j}{j!} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Perciò

$$P\{X = i\} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}\sum_j e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1 - p)]^j}{j!} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!} \quad (2.7)$$

e in maniera simile

$$P\{Y = j\} = e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1 - p)]^j}{j!} \quad (2.8)$$

Le Formule (2.6), (2.7) e (2.8) verificano quanto desiderato. ∎