Inferencia Estadística

Profesor(es): Jarnishs Beltran
Ayudante: Pablo Rivera

Ayudantía N°1
Otoño 2020

i) Una compañía de seguros garantiza pólizas de seguros individuales contra retrasos aéreos de más de doce horas. Una encuesta ha permitido estimar a lo largo de un año que cada persona tiene una probabilidad de cada de mil de ser víctima de un retraso aéreo que esté cubierto por este tipo de póliza y que la compañía aseguradora podrá vender una media de cuatro mil pólizas al año. Se pide hallar las siguientes probabilidades:

a) Que el número de retrasos cubiertos por la póliza no pase de cuatro por año

b) Número de retrasos esperados por año

c) Que el número de retrasos sea superior a dos por año

d) Que ocurran doce retrasos por año

Solution: Sea X = "número de retrasos por año", la variable sigue una distribución binomial
$n = 4000$, $p = \frac{1}{1000} = 0,001$, $b(4000, 0, 001)$
con lo que, $P(X = k) = \binom{4000}{k} \cdot 0,001^k \cdot 0,999^{4000-k} \quad k = 0, 1, ..., 4000$
Es necesario buscar una distribución que sea una buena aproximación de ésta. La distribución de Poisson es una buena aproximación de la binomial $b(4000, 0, 001)$, ya que $p = 0,001$ es muy pequeña y $n \cdot p = 4000 \cdot 0,001 = 4 < 5$.
Por tanto, $X \sim b(4000, 0, 001) \approx XP(\lambda = n \cdot p = 4) \quad P(X = 4) = \frac{4^k}{k!} \cdot e^{-4}$ a)

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$$
$$= [\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!}] \cdot e^{-4} = [1 + 4 + 8 + 10,667 + 10,667] \cdot e^{-4} = 0,6289$$

b) El número de retrasos esperado por año es la media $\mu_x = \lambda = 4$
c)

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$$
$$= 1 - [\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!}] \cdot e^{-4} = 1 - [1 + 4 + 8] \cdot e^{-4} = 1 - 0,381 = 0,7619$$

d) $P(X = 12) = \frac{4^{12}}{12!} \cdot e^{-4} = 0,035 \cdot e^{-4}0,00064$

ii) Una compañía aérea observa que el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de fallos es ocho. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen menos de dos componente en 50 horas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos tres componentes en 125 horas?

Solution: Sea la variable aleatoria discreta X = "nº componentes que fallan antes de 100 horas" El parámetro $\lambda = E[X] = 8$

a) Considerando ciertas condiciones de regularidad, se puede asumir que la variable: U= "nº componentes que fallan antes de 25 horas" sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda_u = E[U] = \frac{8}{4} = 2$

$$P[U = k] = \frac{\lambda_u^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \xrightarrow[\lambda_u = 2]{} P[U = 1] = \frac{2}{1!} \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} = 0,27067$$

b) Análogamente, la v.a. V = "nº componentes que fallan antes de 50 horas" sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda_v = E[V] = \frac{8}{2} = 4$

$$P[V < 2] = P[V = 0] + P[V = 1] = [\frac{4^0}{0!} \cdot e^{-4}] + [\frac{4^1}{1!} \cdot e^{-4}] = [1 + 4] \cdot e^{-4} = 5 \cdot e^4 = 0,0916$$

c) La v.a. Z = "nº componentes que fallan antes de 125 horas" sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 10$

$$P[Z \geq 3] = 1 - P[Z < 3] = 1 - (P[Z = 0] + P[Z = 1] + P[Z = 2]) =$$
$$= 1 - ([\frac{10^0}{0!} \cdot e^{-10}] + [\frac{10^1}{1!} \cdot e^{-10}] + [\frac{10^2}{2!} \cdot e^{-10}]) = 1 - [1 + 10 + 50] \cdot e^{-10} = 0,9972$$

iii) Por prescripción médica, un enfermo debe hacer una toma de tres píldoras de un determinado medicamento. De las doce píldoras que contiene el envase hay cuatro en malas condiciones. Se pide:

a) Probabilidad de que tome sólo una buena

b) Probabilidad de que de las tres píldoras de la toma al menos una esté en malas condiciones

c) ¿Cuál es el número de píldoras que se espera tome el enfermo en buenas condiciones en cada toma?

d) Si existe otro envase que contenga cuarenta píldoras, de las que diez se encuentran en malas condiciones. ¿qué envase sería más beneficiosos para el enfermo?

Solution: a) Hay dos situaciones excluyentes (buena, no-buena). La variable X = "número de píldoras buenas al tomar tres" sigue una distribución hipergeométrica X H(3,12, 8) , en donde

$$N = 12 \text{ píldoras} \begin{cases} 8 \text{ buenas} & \mapsto \quad p = 8/12 = 2/3 \\ 4 \text{ malas} & \mapsto \quad q = 4/12 = 1/3 \end{cases}$$

$$N.\,p = 12.\frac{2}{3} = 8 \qquad N.\,q = 12.\frac{q}{3} = 4 \qquad n = 3$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{N.p}{k}\binom{N.q}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \mapsto \quad P(X = 1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{8 \cdot \frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{12!}{3!\,9!}} = \frac{24}{110} = 0,22$$

Solution: b) La probabilidad de que al menos una esté en malas condiciones equivale a la probabilidad de que a lo sumo dos píldoras sean buenas. Por tanto:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{110} + \frac{24}{110} + \frac{56}{110} = \frac{82}{110} = 0,75$$

$$P(X=0) = \frac{\binom{8}{0}\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1 \,.\, 4}{\frac{12!}{3!\,9!}} = \frac{4 \,.\, 3!\,9!}{12!} = \frac{\cancel{4} \,.\, \cancel{3} \,.\, 2}{\cancel{12} \,.\, 11 \,.\, 10} = \frac{2}{110} = 0{,}02$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{8!}{2!\,6!} \,.\, 4}{\frac{12!}{3!\,9!}} = \frac{\frac{8 \,.\, 7}{2} \,.\, 4 \,.\, 3!\,9!}{12!} = \frac{56}{110} = 0{,}51$$

Solution:

c) El número de píldoras que se espera que tome es la media de la distribución:

$$\mu_x = n \cdot p = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2\, píldoras$$

d) Para tomar una decisión, hay que calcular el número de píldoras esperado en buenas condiciones al tomar tres del segundo envase.

$$N = 40 \ \text{píldoras} \begin{cases} 30 \text{ buenas} & \mapsto \quad p = 30/40 = 3/4 = 0{,}75 \\ 10 \text{ malas} & \mapsto \quad q = 10/40 = 1/4 = 0{,}25 \end{cases}$$

Solution:

$$\mu_Y = n \cdot p = 3 \cdot 0,75 = 2,25\, píldoras$$

El segundo envase es más beneficioso para el enfermo.

iv) - El tiempo de revisión del motor de un avión sigue aproximadamente unadistribución exponencial, con media 22 minutos.

a) Hallar la probabilidad de que el tiempo de la revisión sea menor de 10 minutos

b) El costo de la revisión es de 200 euros por cada media hora o fracción. ¿Cuál es la probabilidad de que una revisión cueste 400 euros?

c) Para efectuar una programación sobre las revisiones del motor, ¿cuánto tiempo se debe asignar a cada revisión para que la probabilidad de que cualquier tiempo de revisión mayor que el tiempo asignado sea solo de 0,1?

Solution: a) Sea X = "tiempo de revisión del motor de un avión en minutos"

$$\mu_x = E(X) = \frac{1}{\lambda} = 22\, minutos \rightarrow \lambda = \frac{1}{22} X \sim Exp[1/22]$$

Función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{22} e^{-x/22} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Función distribución:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/22} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Solution:

$$P[X < 10] = F(10) = 1 - e^{-10/22} = 1 - e^{-5/11} = 0,365$$

o bien,

$$P[X < 10] = \int_0^{10} f(x)\, dx = \int_0^{10} [\frac{1}{22} e^{-x/22}\, dx = -[e^{-x/22}]_0^{10} = -e^{-10/22} + 1 = 1 - e^{-5/11} = 0,365$$

b) Como el costo de la revisión del motor es de 200 euros por cada media hora o fracción, para que la revisión cueste 400 euros la duración de la revisión debe de ser inferior o igual a 60 minutos. Es decir, se tendrá que calcular $P[30 < X \leq 60]$

$$P[30 < X \leq 60] = F(60) - F(30) = [1 - e^{-60/22}] - [1 - e^{-30/22}] = e^{-30/22} - e^{-60/22} = e^{-15/11} - e^{-30/11} = 0,19$$

o bien,

$$P[[30 < Z \leq 60]] = \int_{30}^{60} [\frac{1}{22} e^{-x/22}]\, dx = -[e^{-x/22}]_{30}^{60} = -e^{-60/22} + e^{-30/22} =$$
$$= e^{-15/11} - e^{-30/11} = 0,19$$

c) Sea t = "tiempo que se debe asignar a la revisión", verificando $P[X > t] = 0,1$

$$P[X > t] = \int_t^{\infty} f(x)\, dx = \int_t^{\infty} [\frac{1}{22}^{-x/22}]\, dx = -[e^{-x/22}]_t^{\infty} = 0 + e^{-t/22} = 0,1$$
$$e^{-t/22} = 0,1 \rightarrow -t/22 = ln(0,1) \rightarrow -t/22 = -2,30 \rightarrow t = 50,6 \approx 51\, minutos$$

v) Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60 % de los hogares tienen al menos dos televisores Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos televisores?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 35 y 40 hogares tengan cuando menos dos televisores?

Solution: a) $n = 50 \quad p = 0{,}6 \quad q = 0{,}4$

$np < 5 \quad nq > 5$
$B(50, 0{,}6) \rightarrow N(50 \cdot 0{,}6, \sqrt{50 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}) = N(30, 3{,}46)$

$$p(X > 20) = p(Z > (20 - 30)/3{,}46) =$$
$$p(Z > -2{,}89) = p(Z \leq 2{,}89) = 0{,}9981$$

b)

$$p(35 < X \leq 40) = p(\frac{35 - 30}{3{,}46} < Z \leq \frac{40 - 30}{3{,}46}) =$$
$$= 0{,}9981 - 0{,}9265 = 0{,}0716$$

Formulario

- Distribución binomial

  Se determina de la siguiente manera:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

  Con media: $\mu = np$
  Y varianza: $\sigma^2 = np(1-p)$

- Distribución hipergeometrica

  Se determina de la siguiente manera:

$$p(X = x) = \frac{\binom{s}{x}\binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

  N representa el tamaño de la población.
  S Es el número de éxitos en la población.
  X Es el número de éxitos en la muestra; este puede asumir los valores de 0, 1, 2, 3...
  n Es el tamaño de la muestra o el número de ensayos.
  C Es combinatoria.

- Distribución poisson

  Se determina de la siguiente manera:

$$p(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

  Con media: $\mu = \lambda$
  Y varianza: $\sigma^2 = \lambda$

- Distribución normal

  La función de distribución de probabilidad es:

$$p(X \leq x) = \int_x^a \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

  Con media: $\mu = \frac{a+b}{2}$
  Y varianza: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

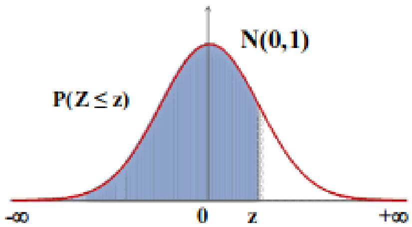
- Distribución exponencial

  Función de distribución de probabilidad es:

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_X^0 \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}; \forall x \geq 0$$

  Con media: $\mu = \frac{1}{\lambda}$
  Y varianza: $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.