گروه کامپیوتر دانشکده مهندسی	# طراحی الگوریتم نیمسال اول ۹۹-۱۴۰۰	تمرین در خانه هفته دهم تقسیم و حل (۲) مدرس: مصطفی نوری بایگی زمان تحویل: جمعه ۷ آذر ۱۳۹۹

۱. می‌دانیم که در الگوریتم نزدیک‌ترین زوج نقطه، آرایه هر بار به دو قسمت تقسیم می‌شود. الگوریتمی مشابه این الگوریتم ارائه دهید که هر بار آرایه را به سه قسمت تقسیم کند. بهینگی آن را نسبت به الگوریتم نزدیک‌ترین زوج نقطه که در کلاس مطرح شد بررسی کنید و پیچیدگی زمانی آن را تحلیل کنید.

۲. یک درخت دودویی کامل T با n گره را در نظر بگیرید به طوری که $n = ۲^d - ۱$. هر گره v از T با یک عدد حقیقی x_v برچسب‌گذاری شده است. فرض کنید که اعداد حقیقی برچسب زده شده روی گره‌ها متمایز هستند. گره v در T مینیمم محلی نامیده می‌شود اگر به ازای همه wهایی که v و w با یک یال به یکدیگر متصل هستند $x_v < x_w$.

درخت باینری کامل T داده شده است، اما برچسب‌گذاری فقط به روش ضمنی زیر مشخص شده است: برای هر گره v می‌توانید با استعلام از آن گره مقدار x_v را تعیین کنید. نشان دهید چگونه می توان با $\mathcal{O}(n \log n)$ استعلام از گره‌ها یک مینیمم محلی T را بدست آورد.

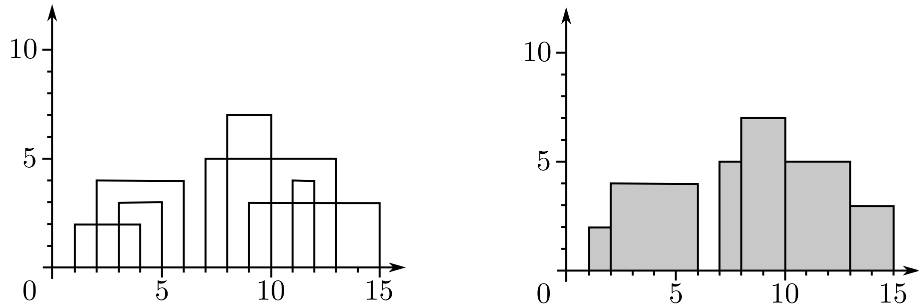
۳. به شما گراف مشبک G با اندازه $n \times n$ داده شده است. گراف مشبک گراف مجاورت صفحه شطرنج $n \times n$ است. به عبارت دیگر گرافی است که مجموعه گره‌های آن مجموعه همه زوج مرتب‌های اعداد طبیعی مانند (i, j) است به شرطی که $۱ \leq i, j \leq n$ و دو گره (i, j) و (k, l) با یک یال به هم متصل می‌شوند اگر و تنها اگر $|i - k| + |j - l| = ۱$.

فرض کنید مشابه سؤال قبل هر گره با برچسب حقیقی x_v برچسب گذاری شده است و گره v در G مینیمم محلی نامیده می‌شود اگر به ازای هر w که v و w با یک یال به یکدیگر وصل هستند $x_v < x_w$. همچنین می‌دانیم همه برچسب‌ها متمایز هستند. الگوریتمی ارائه دهید که مینیمم محلی در G را با $\mathcal{O}(n)$ استعلام به دست آورد. دقت کنید که در این گراف تعداد گره‌ها برابر با $n^۲$ است.

۴. تعدادی ساختمان در یک محله وجود دارند. نمای دوبعدی هر ساختمان یک مستطیل است و توسط سه‌تایی مرتب (a_i, b_i, h_i) تعیین می‌شود، که a_i و b_i به ترتیب مختصات دیوار سمت چپ و سمت راست مستطیل و h_i ارتفاع آن را مشخص می‌کند. اجتماع این مستطیل‌ها، نمای دوبعدی ساختمان‌ها از افق دور را نشان می‌دهد. این نما را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از بازه‌ها که ارتفاع هر بازه یک مقدار ثابت (ارتفاع بلندترین ساختمان در این بازه) است، نمایش داد.

به عنوان مثال، مشخصات ۷ ساختمان به صورت زیر داده شده است. نمایش این ساختمان‌ها را در شکل زیر می‌بینید.

$$(۱, ۴, ۲), (۱۱, ۱۲, ۴), (۸, ۱۰, ۷), (۷, ۱۳, ۵), (۲, ۶, ۴), (۹, ۱۵, ۳), (۳, ۵, ۳)$$



خروجی این مثال، از ۷ بازه تشکیل شده است (یک بازه برای ارتفاع ۰). فرض کنید در حالت کلی خروجی از m بازه تشکیل شده باشد. این m بازه را با دو آرایه $x[۱..m+۱]$ و $t[۱..m]$ نمایش می‌دهیم، که بازه iام از $x[i]$ تا $x[i+۱]$ ادامه دارد و $t[i]$ ارتفاع بلندترین ساختمان در این بازه می‌باشد. در این صورت، خروجی مثال بالا به صورت زیر خواهد بود.

$$x = \langle ۱, ۲, ۶, ۷, ۸, ۱۰, ۱۳, ۱۵ \rangle \qquad t = \langle ۲, ۴, ۰, ۵, ۷, ۵, ۳ \rangle$$

الگوریتمی با زمان اجرای $O(n \log n)$ طراحی کنید که با دریافت یک لیست با اندازه n از سه‌تایی‌ها، نمای دوبعدی ساختمان‌ها را محاسبه کند و به صورت خروجی بالا برگرداند. در مورد زمان اجرای آن بحث کنید. برای راحتی، می‌توانید فرض کنید مقادیر a_i، b_i و h_i متمایز هستند.