



گروه کامپیوتر  
دانشکده مهندسی

## طراحی الگوریتم

نیمسال اول ۹۹-۱۴۰۰

تمرین در خانه هفته هشتم

الگوریتم‌های گراف (۲)

مدرس: مصطفی نوری بایگی

زمان تحویل: جمعه ۲۳ آبان ۱۳۹۹

۱. فرض کنید  $G = (V, E)$  گرافی همبند باشد. کمترین تعداد یال‌ها در یک مسیر بین دو رأس  $u$  و  $v$  را با  $\text{dist}(u, v)$  نشان می‌دهیم و آن را فاصله‌ی آن دو رأس می‌نامیم. در این صورت قطر  $G$  که آن را با  $\text{diam}(G)$  نشان می‌دهیم، بیشترین فاصله بین دو رأس است. به عبارت دیگر

$$\text{diam}(G) = \max_{v, u \in V} \text{dist}(v, u)$$

همچنین، میانگین فاصله‌ی رئوس  $G$  که آن را با  $\text{apd}(G)$  نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{apd}(G) = \frac{\sum_{v, u \in V} \text{dist}(v, u)}{\binom{n}{2}}$$

به عنوان مثال اگر  $G$  گرافی با سه رأس  $u, v$  و  $w$  و دو یال  $\{u, v\}$  و  $\{v, w\}$  باشد، آنگاه

$$\text{diam}(G) = \text{dist}(u, w) = 2$$

در حالی که

$$\text{apd}(G) = \frac{\text{dist}(u, v) + \text{dist}(u, w) + \text{dist}(v, w)}{3} = \frac{4}{3}$$

ادعا: عدد طبیعی  $c$  وجود دارد به طوری که برای هر گراف همبند  $G$  داریم:

$$\frac{\text{diam}(G)}{\text{apd}(G)} \leq c$$

ادعای فوق را اثبات یا رد کنید.

۲. شما در حال طراحی الگوریتمی برای یافتن درخت پوشای کمینه بر روی ماشینی با توازن پردازشی محدود می‌باشید. وروی الگوریتم شما گرافی همبند و بدون جهت و وزن دار با  $n$  رأس و  $m$  یال است که وزن همه یال‌های آن متمایزند. لیستی شامل همه یال‌ها به شما داده می‌شود. الگوریتمی ارائه دهید که با یک بار پیمایش دنباله یال‌های گراف و با استفاده از حافظه‌ای با اندازه  $O(n)$  یک درخت پوشای کمینه برای گراف بسازد.

الگوریتم شما باید بتواند فارغ از نحوه قرار گرفتن یال‌ها در لیست کار کند. (راهنمایی: برای هر یال جدید بررسی کنید که آیا باید به درخت اضافه شود یا خیر و در صورت لزوم کدام یال از درخت باید حذف شود).

۳. گروهی از طراحان شبکه در یک شرکت ارتباطی با مشکل زیر روبرو شده‌اند. آنها یک گراف همبند  $G = (V, E)$  دارند که در آن گره‌ها نمایانگر سایت‌هایی هستند که می‌خواهند با هم ارتباط برقرار کنند. هر یال  $e$  در این گراف یک خط ارتباطی با پهنای باند  $b(e)$  است.

به ازای هر دو گره  $u$  و  $v$  آنها می‌خواهند مسیری مانند  $p$  بین  $u$  و  $v$  را انتخاب کنند. میزان پهنای  $p$  را با  $b(p)$  نمایش می‌دهیم که برابر است با کمترین پهنای باند یال‌هایی که در  $p$  وجود دارد، به عبارت دیگر  $b(p) = \min_{e \in p} b(e)$ . بیشترین پهنای باند قابل دستیابی برای جفت  $(u, v)$  برابر بیشترین مقدار  $b(p)$  به ازای همه مسیرهای ممکن بین  $u$  و  $v$  است.

از آنجایی که نگه‌داری یک مسیر به ازای هر جفت گره دشوار است یکی از طراحان پیشنهادی می‌دهد. او می‌گوید شاید بتوان درخت پوشایی (دقت کنید نه لزوماً کمینه) را در  $G$  پیدا کرد که برای هر دو گره  $u$  و  $v$  مسیر یکتایی که بین این دو گره در درخت وجود دارد در واقع بهترین مسیر با بیشترین پهنای باند قابل دستیابی برای  $u$  و  $v$  باشد.

این ایده برای چند روز در دفاتر این شرکت به یک دلیل طبیعی به سختی مورد انتقاد قرار گرفت: هر زوج رأس ممکن است از طریق مسیر متفاوتی و مستقل نسبت به بقیه زوج رؤوس به بیشترین پهنای باند قابل دستیابی برسد. چرا باید یک درخت به تنهایی همه زوج‌ها را به مسیر مناسب خود برساند؟ اما پس از چند تلاش ناموفق برای رد این ایده، شک طراحان در مورد درستی این ادعا بیشتر می‌شود.

ثابت کنید چنین درختی وجود دارد و الگوریتمی کارا برای یافتن آن ارائه کنید. به عبارت دیگر با دریافت یک گراف، درخت پوشای  $T$  را بیابید که به ازای هر دو رأس  $u$  و  $v$  پهنای باند مسیر موجود در  $T$  بین  $u$  و  $v$  برابر با بیشترین پهنای باند قابل دستیابی برای آن جفت رأس باشد.