베이지 정리(Bayes' theorem)

베이지(조건부 확률) 정리

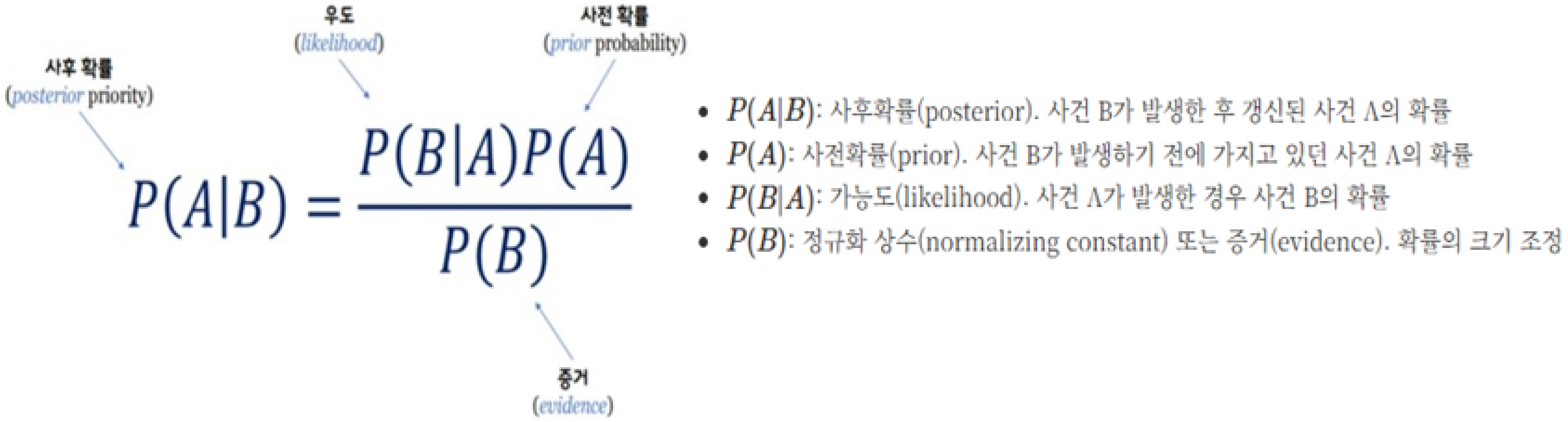
정의

- 두 사건 X, Y에 대한 조건부 확률(conditional probability) 간에 성립하는 확률 관계

> - 새로운 정보를 토대로 어떤 사건이 발생했다는 주장에 대한 신뢰도를 갱신해 나가는 방법(a method to update belief on the basis of new information)

- 베이즈 정리를 이해함에 있어서 가장 먼저 정리해야 할 개념은 '확률'에 관한 관점임

> - 베이즈 정리의 의미를 이해하기 어려운 이유는 확률론에서는 '전통적인 관점'으로 확률을 정의해오고 이해해왔기 때문임
> - 여기서는 확률이라는 단어를 '주장에 대한 신뢰도'로 생각해보자.
> - 이러한 관점은 확률에 대한 베이지안 주의(Bayesianism) 관점으로 볼 수 있음
> - 반면, 전통적인 확률관은 빈도주의(frequentism)이라고 볼 수 있음
> - 가령 동전의 앞면이 나올 확률이 50%라고 하면, 빈도주의자들은 100번 동전을 던졌을 때 50번은 앞면이 나온다고 해석하고, 베이지안 주의자들은 동전의 앞면이 나왔다는 주장의 신뢰도가 50%라고 보는 것임




```
- P(Y|X) : 사후확률(Posterior)
    - 사건 발생 후의 확률을 의미하는데, 정확히 말하자면 발생한 사건(X)이 특정 확률분포(Y)에서 나왔을 확률
    - 머신러닝 관점에서는 관측된 특징(X)이 특정 클래스(Y)에서 나왔을 확률이라고도 할 수 있음
- P(X|Y) : 우도 또는 가능도(Likelihood)
    - 사후확률과 반대로, 특정 확률분포 or 클래스(Y)에서 특정 사건 or 특징(X)이 발생할 확률을 뜻함
    - 즉, 머신러닝 관점에서는 기존에 있는 데이터의 각 클래스 별로 특정 특징에 대한 분포를 의미함
- P(Y) : 사전확률(Prior)
    - 특정 특징 or 사건에 무관하게 미리 알 수 있는 확률
    - 즉, 머신러닝 관점에서는 특징(X)가 관측되기 전부터 이미 정해져있던 클래스(Y)의 분포를 의미함
- P(X) : 증거(Evidence)
    - 머신러닝 관점에서는 특정 클래스(Y)의 분포에 상관없이 전체 클래스에서 특정 특징(X)이 관측될 확률을 뜻함
```

- 수식 중 P(X|Y), P(Y|X)라는 것이 바로 조건부 확률을 나타내는 표현

> - 예를 들어 P(A|B)라는 확률은 사건 B가 일어났다는 가정 하에 사건 A가 발생할 확률을 나타냄

- 사건 A, B에 대한 조건부 확률 수식

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- 베이즈 정리 수식은 확률의 곱 규칙과 확률의 합 규칙으로부터 유도됨

> - 확률의 곱 규칙은 두 사건 X, Y가 동시에 일어날 확률을 나타냄
> - 확률의 합 규칙은 두 사건 X, Y중 하나만 일어날 확률을 나타냄

확률의 곱 규칙 : $P(Y, X) = P(X|Y)P(Y) = P(X \cap Y)$

확률의 합 규칙 : $P(X) = \sum_{Y} P(Y, X) = \sum_{Y} P(X|Y)P(Y) = P(X_1|Y)P(Y) + P(X_2|Y)P(Y) + \cdots$

$$P(Y, X) = P(X, Y)$$

$$\rightarrow P(X \cap Y) = P(Y \cap X)$$

$$\rightarrow P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X)$$

$$\rightarrow P(Y|X) = \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)}$$

조건부 확률 예제1) 하얀별사탕, 분홍별사탕

건빵 2봉지를 샀다. 그래서 별사탕도 2봉지다. 첫번째 봉지에는 하얀별사탕이 10개, 분홍별사탕이 30개 들었고, 두번째 봉지에는 각각 20개씩 들었다. 두봉지의 별사탕을 하나의 접시에 담고, 눈을 감은체 별사탕하나를 집어들었다. 눈을 뜨고 집어든 별사탕을 지그시 살펴보니 분홍별사탕이다. 이 별사탕이 첫번째 봉지에서 나왔을 확률은?

별사탕이 40개씩 들었다는게 알려지면 엄청 잘팔리겠군.
음… 첫번째봉지에 분홍별사탕이 더 많이 있었으니,
아무리못해도 50%이상의 확률이 나와야 한다.

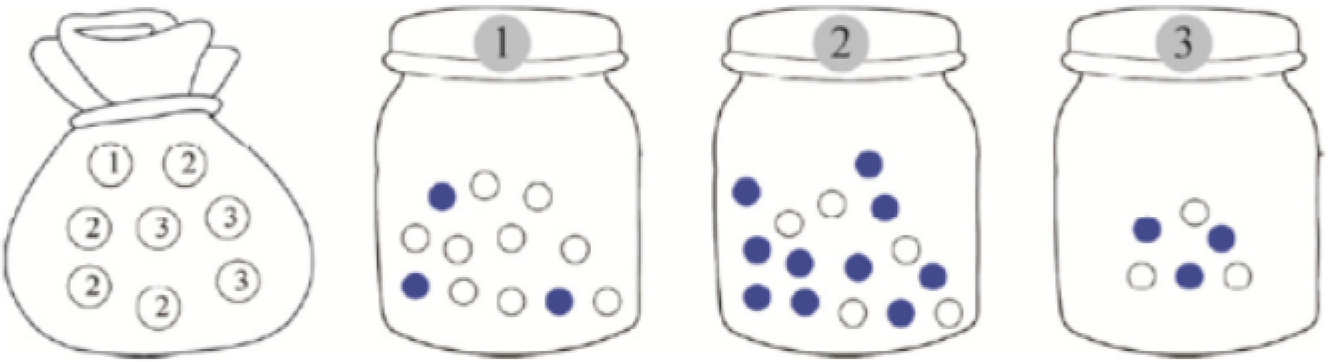
풀어보자. 일단 문제를 확률적으로 표현해보면 아래와 같다.
P(첫번째봉지|분홍별사탕) = P(분홍별사탕|첫번째봉지)P(첫번째봉지)/P(분홍별사탕)

P(분홍별사탕|첫번째봉지) = 30/40
P(첫번째봉지) = 40/80
P(분홍별사탕) = 50/80

각각의 확률을 적용하면,
P(첫번째봉지|분홍별사탕) = (30/40) * (40/80) / (50/80)
= (30 * 40 * 80) / (40 * 80 * 50) = 30/50 = 60/100 = 60%

따라서, 답은 60%이다.

베이즈 정리 예시 & 최대 사후확률 추정 (Maximum a Posteriori) 간단한 예시



"하얀 공(특징 X)이 나왔다는 사실만 알고 어느 병(클래스 Y)에서 나왔는지 모르는데, 어느 병(클래스 Y)인지 추정하라"

- 먼저 주머니에서 숫자가 적힌 공 하나를 뽑아서 번호를 확인
- 그리고 1, 2, 3이라 표시된 병 중 카드 번호에 해당하는 병에서 공을 하나 꺼내 색을 말함
- 꺼낸 숫자 공과 색깔 공은 꺼낸 곳에 다시 넣음
- 번호와 색을 나타내는 확률변수를 각각 Y와 X라고 가정

어느 병이든 가능성이 있으므로, 각 번호일 때의 사후 확률 P(Y=1|X=흰), P(Y=2|X=흰), P(Y=3|X=흰)을 구해서 가장 큰 값을 갖는 경우를 택해야 함

$$\hat{Y} = \underset{Y}{\mathrm{argmax}}\, P(Y|X)$$

하얀 공(X=흰)이 나왔을 때, 가장 큰 P(Y=?|X=흰) 값을 가지는 경우의 Y를 최종 클래스로 추론

- Y_hat은 추정된 Y(클래스)를 의미
- 위 수식은 **사후 확률을 최대화하는 클래스 or 확률 분포의 모수(parameter, (평균, 표준편차 등)) Y를 찾는다**는 의미에서 **최대 사후확률 추정(Maximum a Posteriori, MAP)**이라고 함

P(Y=1|X=흰)

$$P(X=\text{흰}) = P(X=\text{흰}|Y=1)P(Y=1) + P(X=\text{흰}|Y=2)P(Y=2) + P(X=\text{흰}|Y=3)P(Y=3)$$

$$= \frac{9}{12}\frac{1}{8} + \frac{5}{15}\frac{4}{8} + \frac{3}{6}\frac{3}{8} = \frac{43}{96}$$

$$P(X=\text{흰}|Y=1) = \frac{9}{12}$$

$$P(Y=1) = \frac{1}{8}$$

$$P(Y=1|X=\text{흰}) = \frac{P(X=\text{흰}|Y=1)P(Y=1)}{P(X=\text{흰})}$$

$$= \frac{\frac{9}{12}\frac{1}{8}}{\frac{43}{96}} = \frac{9}{43}$$

P(Y=2|X=흰), P(Y=3|X=흰)

$$P(Y=1|X=\text{흰}) = \frac{\frac{9}{12}\frac{1}{8}}{\frac{43}{96}} = \frac{9}{43}$$

$$P(Y=2|X=\text{흰}) = \frac{\frac{5}{15}\frac{4}{8}}{\frac{43}{96}} = \frac{16}{43}$$

$$P(Y=3|X=\text{흰}) = \frac{\frac{3}{6}\frac{3}{8}}{\frac{43}{96}} = \frac{18}{43}$$

- 3번 병에서 흰 공이 나왔을 때의 사후확률이 가장 크므로, 흰 공은 3번 병에서 나왔을 확률이 가장 큼
- 즉, 위에서 살펴봤던 최대 사후확률 수식을 이용하면 다음과 같은 결과가 나옴

$$\hat{Y} = \arg\max_{Y}\left(Y=1 : \frac{9}{43},\ Y=2 : \frac{16}{43},\ Y=3 : \frac{18}{43}\right) = 3$$

베이지 정리 예제

```
def bayes_theorem(prob_A, prob_B_given_A, prob_B_given_not_A):
    # P(A and B) = P(A) * P(B|A)
    prob_A_and_B = prob_A * prob_B_given_A

    # P(B) = P(B|A) * P(A) + P(B|¬A) * P(¬A)
    prob_B = prob_B_given_A * prob_A + prob_B_given_not_A * (1 - prob_A)

    # P(A|B) = P(A and B) / P(B)
    prob_A_given_B = prob_A_and_B / prob_B

    return prob_A_given_B

#예제: 오른쪽 자동차가 돌 확률, 오른쪽 자동차가 왼쪽으로 돌 확률, 오른쪽 자동차가 돌지 않고 브레이크를 밟을 확률
prob_Right_car_turn = 0.5
prob_Right_car_trun_left = 0.4
prob_Right_car_Break = 0.3

result = bayes_theorem(prob_Right_car_turn, prob_Right_car_trun_left, prob_Right_car_Break)
print(f"오른쪽 자동차가 왼쪽으로 돌 확률: {result:.4f}")
```

```
오른쪽 자동차가 왼쪽으로 돌 확률: 0.5714
```

<<<참조자료 사이트>>>

1.[베이즈 정리]
2.[Bayes Theorem 정리]

3. [나이브 베이즈 분류 이론 설명 및 구현]
4. [조건부 확률(베이지안)의 이해를 위한 예제 및 풀이]

---

1. [베이즈 정리를 이해하는 가장 쉬운 방법]
2. [디즈니가 넷플릭스를 넘기 어려운 이유 | 인공지능과 알고리즘, 나이브 베이즈 분류]
