10. 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 직선 $y=ax-1$과 서로 다른 두 점에서 만나고, 직선 $y=x+b$와 만나지 않을 때, 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프에 대한 설명 중 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.)

| 보기 |

ㄱ. x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
ㄴ. y축과 양의 부분에서 만난다.
ㄷ. 꼭짓점은 제2사분면에 존재한다.

정답 ㄱ

이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=ax-1$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2=ax-1$, 즉 $x^2-ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4\times1\times1>0$

$\therefore\ a^2>4$ ...... ㉠

또한, 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x+b$가 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2=x+b$, 즉 $x^2-x-b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\times1\times(-b)<0$

$\therefore\ 4b<-1$ ...... ㉡

ㄱ. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=a^2-4b>4+1=5>0$ ($\because$ ㉠, ㉡)

즉, 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄴ. ㉡에서 $b<-\frac{1}{4}$이므로 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프는 y축과 음의 부분에서 만난다. (거짓)

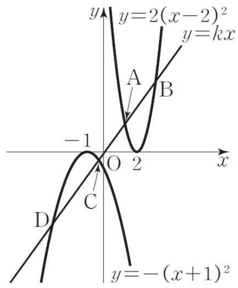
ㄷ. $y=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$에서 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}+b\right)$이고,

$-\frac{a^2}{4}+b=\frac{-(a^2-4b)}{4}<0$ ($\because$ ㉠, ㉡)이므로

꼭짓점은 제3사분면 또는 제4사분면에 존재한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

11. 그림과 같이 직선 $y=kx$가 이차함수 $y=2(x-2)^2$의 그래프와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 이차함수 $y=-(x+1)^2$의 그래프와 만나는 서로 다른 두 점을 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CD}}=2:3$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.



정답 $\frac{80}{7}$

직선 $y=kx$와 이차함수 $y=2(x-2)^2$의 그래프의 서로 다른 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $2(x-2)^2=kx$, 즉 $2x^2-(k+8)x+8=0$의 서로 다른 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{k+8}{2}$, $\alpha\beta=4$ ...... ㉠

직선 $y=kx$와 이차함수 $y=-(x+1)^2$의 그래프의 서로 다른 두 교점의 x좌표를 각각 γ, δ라 하면 γ, δ는 이차방정식 $-(x+1)^2=kx$, 즉 $x^2+(k+2)x+1=0$의 서로 다른 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=-k-2$, $\gamma\delta=1$ ...... ㉡

이때 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CD}}=2:3$에서 $3\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$이므로

$3|\alpha-\beta|=2|\gamma-\delta|$

위의 식의 양변을 제곱하면

$9(\alpha-\beta)^2=4(\gamma-\delta)^2$

㉠에서

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=\left(\frac{k+8}{2}\right)^2-16=\frac{k^2}{4}+4k$

㉡에서

$(\gamma-\delta)^2=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta$

$=(k+2)^2-4=k^2+4k$

즉, $9\left(\frac{k^2}{4}+4k\right)=4(k^2+4k)$이므로

$\frac{7}{4}k^2-20k=0$, $\frac{7}{4}k\left(k-\frac{80}{7}\right)=0$

$\therefore\ k=\frac{80}{7}$ ($\because\ k>0$)