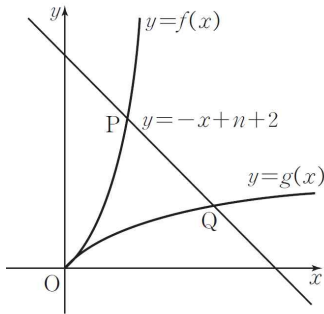
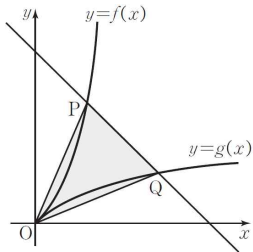


6. 함수

12. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x) = x^2 + nx$ ($x \geq 0$)의 역함수를 $g(x)$ 라 하고, 직선 $y = -x + n + 2$ 와 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 POQ의 넓이가 40일 때, n 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



정답 8



점 P는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x + n + 2$ 의 교점이므로 $x^2 + nx = -x + n + 2$ 에서 $x^2 + (n+1)x - (n+2) = 0$
 $(x-1)(x+n+2) = 0 \therefore x = 1$ ($\because x \geq 0$)

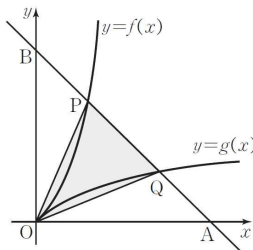
따라서 P(1, $n+1$)이고 점 Q는 점 P와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭인 점이므로 Q($n+1$, 1)이다.

따라서 삼각형 POQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} n+1 & 1 \\ 1 & n+1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \{(n+1)^2 - 1\} = \frac{1}{2} n(n+2)$$

이때, $\frac{1}{2} n(n+2) = 40$ 에서 $n = 8$

[다른 풀이]



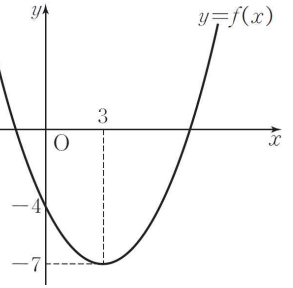
(삼각형 POQ의 넓이)

= (삼각형 OAB의 넓이) - 2 × (삼각형 OAQ의 넓이)

$$= \frac{1}{2} (n+2)^2 - 2 \times \left\{ \frac{1}{2} \times (n+2) \times 1 \right\} = \frac{n(n+2)}{2}$$

(이하 동일)

13. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 (3, -7)을 꼭짓점으로 하고 점 (0, -4)를 지나는 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 있다. 방정식 $f(f(x)) = -4$ 를 만족시키는 모든 실근의 합을 구하시오.

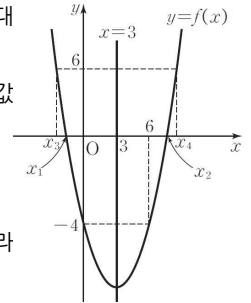


정답 12

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이므로 $f(0) = f(6) = -4$ 이다.

즉, $f(f(x)) = -4$ 를 만족시키는 $f(x)$ 의 값은

$f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 6$ 이다.



$f(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값을 x_1, x_2 라 하고

$f(x) = 6$ 을 만족시키는 x 의 값을 x_3, x_4 라 하면

두 점 $(x_1, f(x_1))$ 과 $(x_2, f(x_2))$, 두 점 $(x_3, f(x_3))$ 과 $(x_4, f(x_4))$ 는 각각 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이므로

$$x_1 + x_2 = 6, \quad x_3 + x_4 = 6$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 + 6 = 12$$

[다른 풀이]

$f(x) = a(x-3)^2 - 7$ ($a > 0$)이라 하면 $f(0) = -4$ 이므로

$$9a - 7 = -4 \text{에서 } 9a = 3 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 - 7$$

이때, $f(f(x)) = -4$ 를 만족시키는 $f(x)$ 를 t 라 하면

$$f(t) = -4 \text{에서 } \frac{1}{3}(t-3)^2 - 7 = -4, \quad (t-3)^2 = 9$$

$$t-3 = 3 \text{ 또는 } t-3 = -3$$

따라서 $t = 6$ 또는 $t = 0$ 이므로 $f(x) = 6$ 또는 $f(x) = 0$

$$(i) \quad f(x) = 6 \text{에서 } \frac{1}{3}(x-3)^2 - 7 = 6$$

$$\therefore x^2 - 6x - 30 = 0$$

따라서 이 이차방정식의 두 실근을 x_1, x_2 라 하면

$$x_1 + x_2 = 6$$

$$(ii) \quad f(x) = 0 \text{에서 } \frac{1}{3}(x-3)^2 - 7 = 0$$

$$\therefore x^2 - 6x - 12 = 0$$

따라서 이 이차방정식의 두 실근을 x_3, x_4 라 하면

$$x_3 + x_4 = 6$$

따라서 방정식 $f(f(x)) = -4$ 의 모든 실근의 합은

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 + 6 = 12$$