

# DDP with CBF Constraints

Wonyoung Park (University of Seoul)

Date: January 7, 2023

## I. 본 문서의 소개

본 문서는 Differential Dynamic Programming(이하 DDP)를 사용하여 자동차의 path planning 진행 사항에 대해 기록하고 있다. DDP를 이용하여 경로를 만들되, Control Barrier Function(이하 CBF)를 이용하여 constraint를 구성하고자 한다.

### A. 서울시립대학교 제어 및 동역학 연구실의 소개

- 1) CDSL@UoS는 서울시립대학교 전자전기컴퓨터공학부 소속으로, 수학적 모델에 기반한 제어이론(control theory)을 개발하고 이를 로봇틱스(robotics)의 다양한 분야에 적용하는 연구를 수행하고 있습니다.
- 2) 본 연구실은 작성일 기준 박경훈 교수를 포함하여 8명의 연구자들로 구성되어 있습니다.
- 3) 보다 자세한 사항은 연구실 홈페이지(<https://sites.google.com/view/cdsluos>)를 참고해주세요.

## II. PRIOR INFORMATION

### A. Differential Dynamic Programming

DDP에 대해서 다룰 때, discrete-time system을 고려한다. 따라서 모델의 kinematics는 식(1)와 같이 함수  $f$ 와  $g$ 로 구성된다.

$$x_{i+1} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

DDP의 total cost는

$$J(x_0, U) = \sum_{i=0}^{N-1} \ell(x_i, u_i) + \ell_f(x_N) \quad (2)$$

식(2)와 같다. 여기서  $U \triangleq \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}\}$ 이고,  $N$ 은 총 길이,  $\ell_f$ 는 final cost를 의미한다. 이 상황에서 최소화를 하고자 하는 것은  $U^* \triangleq \arg \min_U J(x_0, U)$ 이다.  $i$ 번째 경우일 때 Value는  $V_i(x) \triangleq \min_{U_i} J_i(x, U_i)$ 이다. 따라서 (3)를 만족하게 된다.

$$V(x) = \min_u [\ell(x, u) + V'(f(x) + g(x)u)] \quad (3)$$

DDP는 iteration을 여러번 진행하며 (3)를 backward pass에서 최소화하고, forward pass를 진행한다.

#### 1) Backward Pass:

$$Q(\delta x, \delta u) = \ell(x + \delta x, u + \delta u) + V'(f(x + \delta x) + g(x + \delta x)(u + \delta u)) \quad (4)$$

(3)를 Taylor expansion하면 (4)과 같다. Q-function의 pseudo-Hamiltonian을 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q_x &= \ell_x + f_x^\top V'_x \\ Q_u &= \ell_u + f_u^\top V'_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \ell_{xx} + f_x^\top V'_{xx} f_x + V'_x f_{xx} \\ Q_{ux} &= \ell_{ux} + f_u^\top V'_{xx} f_x + V'_x f_{ux} \\ Q_{uu} &= \ell_{uu} + f_u^\top V'_{xx} f_u + V'_x f_{uu} \end{aligned} \quad (5)$$

Q에 대한 minimization을 진행하면

$$\delta u^* = \arg \min_{\delta u} Q(\delta x, \delta u) = k + K \delta x \quad (6)$$

가 만족된다. 추가적인 constraints가 존재하지 않는다면 locally-linear한 상황에서

$$k \triangleq -Q_{uu}^{-1} Q_{ux}, K \triangleq -Q_{uu}^{-1} Q_{ux} \quad (7)$$

를 만족한다.  $k$ 와  $K$ 를 구한 것을 이용하여  $V$ 에 대한 variation을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta V &= -1/2 k^\top Q_{uu} k \\ V_x &= Q_x - K^\top Q_{uu} k \\ V_{xx} &= Q_{xx} - K^\top Q_{uu} K \end{aligned} \quad (8)$$

2) Forward Pass: Backward pass를 통해서  $k, K$ 의 값을 구하였고, 이를 이용하여  $\delta u^*$ 를 구하였다. 이  $\delta u$ 를 통해서  $u$ 에 대한 update를 진행한다.

$$x_{0\_update} = x_0$$

$$u_{i\_update} = u_i + \delta u$$

$$x_{i+1\_update} = f(x_{i\_update}) + g(x_{i\_update})u_{i\_update} \quad (9)$$

수식 (9)에서의  $\delta u$ 는  $\alpha k_i + K_i(x_{i\_update} - x_i)$ 이다.  $\alpha$ 는 1로 시작해서 점점 줄어드는 값이다.

### B. Control Barrier Function

안전 영역  $\mathcal{C}$ 이 있다고 하고, 안전 영역의 구역을 다음과 같이 정의 가능하다.

$$\mathcal{C} := \{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq 0\} \quad (10)$$

$h(x) \geq 0$ 을 만족하는 조건을 가지는  $h(x)$ 와 함께, 장벽 함수를 구현해야 한다. 크게 2가지의 장벽 함수를 고려했는데, 장벽 함수의 형태는 다음과 같다.

$$b_1 = -\log\left(\frac{h(x)}{1+h(x)}\right), b_2(x) = \frac{1}{h(x)} \quad (11)$$

위와 같이 barrier function을 설정하면,  $h(x)$ 가 안전 영역  $\mathcal{C}$  안에 있는 경우에는 항상 양수의 값을 가진다. 다만, 안전 영역의 경계로 다가갈수록 함수의 값이 커지게 된다.

### 1) Reciprocal Barrier Function:

$$\frac{1}{\alpha_1(h(x)) \leq b(x) \leq \frac{1}{\alpha_2(h(x))}}, L_f(b(x)) \leq \alpha_3(h(x)) \quad (12)$$

$\alpha$ 는  $class - \mathcal{K}$ 를 의미한다. 수식 12은 reciprocal barrier function이라고 부른다.

### C. 수식 작성

기본적으로 LaTeX에서 문서를 작성하는 mode는 크게 plain text를 작성하는 textmode와 수식을 작성하는 mathmode로 나뉩니다. 문서 작성 시 textmode가 기본이며, mathmode로 진입하는 방법은 크게 아래의 두 경우입니다.

- 만약 plain text 내에서 수식을 작성하고 싶다면, “ $\dots$ (수식 내용) $\dots$ ”와 같이 \$ symbol을 이용합니다. (예시 :  $\dot{x} = Ax + Bu$ )
- 만약 plain text와 plain text 사이에 단독으로 수식을 넣고 싶다면, align 등의 함수를 이용하여 다음과 같이 작성합니다(aligned 외에도 equation, aligned 등의 함수가 있습니다.)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (13)$$

이 때 align 함수를 사용하면 위와 같이 수식 번호를 확인할 수 있는데, eqref 함수를 이용하면 (식 (??)와 같이) 본문 상에서 수식 번호를 참조할 수 있습니다. 한편 수식 번호를 지우고 싶다면, \* symbol을 추가하여 아래와 같이 작성하면 됩니다.

$$y = Cx + Du$$

또한 LaTeX에서는 \를 이용하여 줄바꿈을 하게 되는데, 이는 mathmode와 textmode에 공통으로 적용됩니다. 이와 함께 &를 이용하면, 여러 줄로 구성된 수식을 가지런히 정렬한 형태로 작성할 수 있습니다.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (14)$$

$$y = Cx + Du. \quad (15)$$

### D. Theorem 환경 사용

연구실에서 수행하는 연구로 논문을 작성할 때, 경우에 따라 definition, lemma, theorem 등을 문서에 추가할 필요가 있습니다. 이 경우 IEEE 템플릿에서 공식 제공하거나 amsthm package를 통해 newtheorem으로 정의된 definition, lemma, theorem 함수 등을 아래와 같이 활용할 수 있습니다.

Definition 1: Blabla... □

Lemma 1: Blabla... □

Theorem 1: Blabla... □

Proof: Blabla... ■

수식과 마찬가지로 label 함수를 이용하여 Theorem 1과 같이 상호 참조도 가능합니다.

### E. Reference 작성

LaTeX에서는 thebibliography라는 함수 혹은 bib 파일을 이용하여 reference를 관리합니다. Reference 작성법은 별도로 연구실 Wiki를 통해 소개하고, 추후 템플릿에도 요약하여 정리해놓도록 하겠습니다. Rerefernce 작성 예시는 본 문서의 제일 마지막을 참고해주세요.

### F. 유용한 참고 자료

아래 리스트에서는 LaTeX 사용과 관련하여 유용한 참고 자료들을 소개합니다.

- **Overleaf documentation** : <https://www.overleaf.com/learn>
- **LaTeX 관련 Youtube 영상** (KAIST 수리과학과) : <https://www.youtube.com/watch?v=ysnKC1jEC1s>
- **Detexify** : <https://detexify.kirelabs.org/classify.html>
- **KTUG** (한국 텍 사용자 그룹) :
- **LaTeX - Beginner's Guide** : [http://static.latexstudio.net/wp-content/uploads/2015/03/LaTeX\\_Beginners\\_Guide.pdf](http://static.latexstudio.net/wp-content/uploads/2015/03/LaTeX_Beginners_Guide.pdf)
- **IEEE Transactions Template 사용법** : [https://www.cs.cmu.edu/~steffan/personal/tmp/IEEETran\\_HOWTO.pdf](https://www.cs.cmu.edu/~steffan/personal/tmp/IEEETran_HOWTO.pdf)
- (이후 업데이트 될 예정입니다.)

### REFERENCES

- [1] *IEEE Journal Paper Template*, IEEE, <https://www.overleaf.com/latex/templates/ieee-journal-paper-template/jbbdbkztwxd>
- [2] *LaTeX*, Wikipedia, <https://en.wikipedia.org/wiki/LaTeX>