Option Pricing

Instructor: Kang, Byung Jin

숭덕경상관 **418**호**, Tel. 828-7392**

E-mail. bjkang@ssu.ac.kr

숭실대학교 금융학부
SSU School of Finance

I. Binomial Option Pricing Model

Introduction

❒ Option Pricing

- ❖ Option pricing follows the same lines as forward pricing
- ❖ The basic idea is "replication" – we look to create identical payoffs to the option's using
- ❖ Once we have a portfolio that replicates the option, the cost of the option must be equal to the cost of replicating it
- ❖ Thus, the challenge is in identifying the composition of the replicating portfolio

❒ But, an Added Complication

- ❖ Volatility is a primary determinant of option value ➔ "<u>We cannot price options without first modeling volatility</u>"
  - ➢ More generally, we need to model uncertainty in the evolution of the price of the underlying security
- ❖ This introduces <u>model dependence</u>
- ❖ it is this dimension that distinguishes different option pricing models: they differ not on how they price options, but on how they model the evolution of uncertainty

Models We Examine

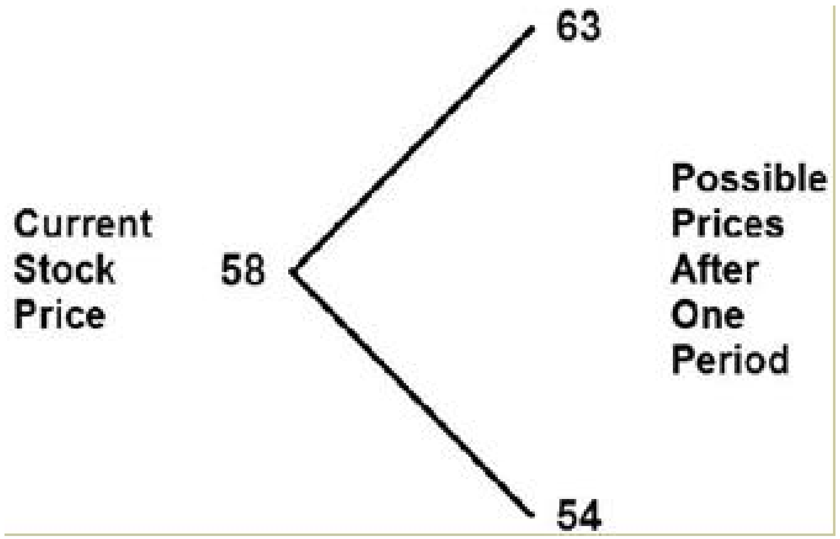
- Two Widely – Use Classes of Models
  - The binomial model / The Black – Scholes model

- The Black – Scholes Model
  - Fischer Black and Myron Scholes (1973), Robert Merton (1973)
  - Offers closed – form solutions for option prices, but
  - Is more technically complex than the binomial, and
  - Is relatively limited

- The Binomial model
  - Cox, Ross, and Rubinstein (1979)
  - Much more flexible and intuitive
  - Approximate the Black – Scholes framework arbitrarily closely
  - One shortcoming: no closed – form solutions

A Binomial Model

- Assumption
  - Price of an underlying asset moves from its current level S to one of two possible levels, uS or dS
  - "u": up move, occurs with probability p
  - "d": down move, occurs with probability 1 – p
  - Intuitively, binomial model volatility is determined by "u/d" ➔ The larger is this ratio, the greater the variability of underlying asset prices



A Binomial Model

❒ Binomial Model's Flexibility

- The model is not as simplistic as it appears
- With frequent price changes, we can create a large number of possible future prices and a variety of future price distributions
- In particular, the model's parameters can be chosen to approximate the Black – Scholes price process arbitrarily closely
- But it can also do a great deal more as the work of Derman and Kani, Rubinstein, Dupire, and others has shown

❒ Volatility in Binomial Model

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

- Annualized volatility of the stock returns: 30% ➔ u? d?

Real World Example

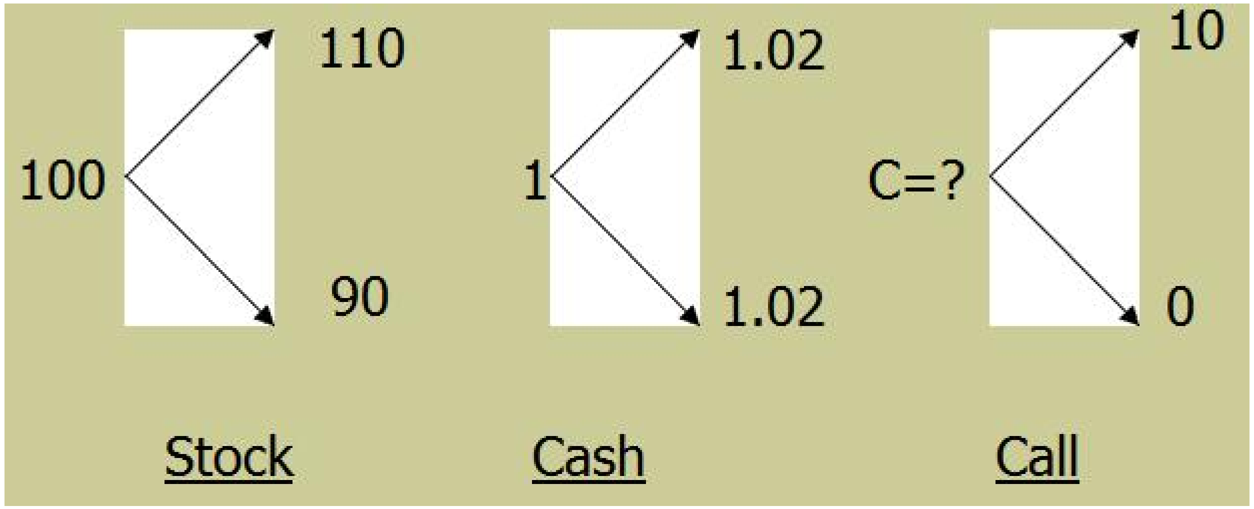
신한지주 신주인수권, 살까 말까 [이데일리, 2009년 3월 3일, 최한나 기자]

신한지주(43,300 원 ▼ 800 -1.81%)가 유상증자를 위해 발행하는 신주인수권이 3 일부터 상장 거래되면서 투자자들의 관심을 끌고 있다. 신한지주 주식을 사고 싶은 투자자라면 신주인수권을 미리 매수해 지분 확보기회로 삼을 수 있기 때문이다. 또 신주인수권 매매를 통해 차익을 얻을 수 있을지도 관심이다. 이 경우 오는 9 일부터 13 일까지의 주식 거래가격으로 결정되는 2 차 발행가액 수준이 중요해진다. 신주인수권을 살 것이냐 말 것이냐를 결정하는데 가장 중요한 것은 신한지주 주식 가격이 오를 것으로 전망하느냐 여부. 주가가 오를 것으로 본다면 신한지주 비중을 늘릴 필요가 있고 디딤돌로 신주인수권을 이용할 수 있다. 신주인수권을 사려고 마음 먹었다면 `어느 정도를 적정 가격으로 볼 수 있느냐`가 다음으로 살펴봐야 할 요인이다. 신주인수권은 옵션이기 때문에 시장가격이나 변동성, 잔존만기 등을 감안해야 적정 가격을 산출할 수 있다. 산출된 적정가격보다 실제 신주인수권 가격이 싸다면 신주인수권을 사고, 비싸다면 반대 거래를 통해 차익을 얻을 수 있다. 가장 중요한 기준인 적정 가격은 전문가별로 엇갈린다. 이준재 한국투자증권 애널리스트는 "현재 주가를 2 만 2000 원으로 보고 이항모형을 이용했을 때 신주인수권 가치는 5770 원 정도로 볼 수 있다"며 "주가가 1000 원 오를 때마다 신주인수권 가치는 263 원씩 상승한다"고 분석했다. 현대증권은 5500 원을 기준으로 제시했다. 윤창배 현대증권 애널리스트는 "2 일 종가인 2 만 2000 원이 13 일까지 유지된다고 가정하면 확정 발행가액은 1 만 6500 원"이라며 "신주인수권이 시가와 발행가액 차이인 5500 원보다 싸면 신주인수권을 사고, 비싸면 반대로 거래하면 된다"고 말했다. 최정욱 대신증권 애널리스트는 "2 차 발행가액이 결정되기 전에 신주인수권 거래가 종결되므로 이론적으로는 차익거래가 존재하지 않지만, 신한지주 주가와 발행가액 예상치 변동에 따라 신주인수권 가치가 변하므로 따져볼 필요가 있다"며 "신주인수권이 이론가격을 밑도는 수준일 때 매수하는게 유리하다"고 말했다. 신한지주 신주인수권 증서는 오는 3 일 상장되며 9 일까지 5 영업일 동안만 거래된다. 상장될 신주인수권은 총 6240 만 증서로 총 발행주식수 3 억 9620 만주의 15.8% 정도다.

Single Period Binomial Model

- Example
  - S = 100
  - u = 1.10, d = 0.90, p = 0.75, r = 1.02 (risk – free rate is 2% per period)
  - Exercise price = 100

- The Call Pricing Problem



Single Period Binomial Model

Replicating the Call

- Portfolio: "h" units of stock + "B" units of cash (i.e., risk – free bond)
- "h" > 0: buy the stock, "h" < 0: sell the stock (short – sale)
- "B" > 0: investing(depositing), "B" < 0: borrowing

Replicating Portfolio

- For the portfolio to replicate the call, we must have:
- (1) $h * 110 + B * 1.02 = 10$
- (2) $h * 90 + B * 1.02 = 0$

➔ $h = 0.50$, $B = -44.12$

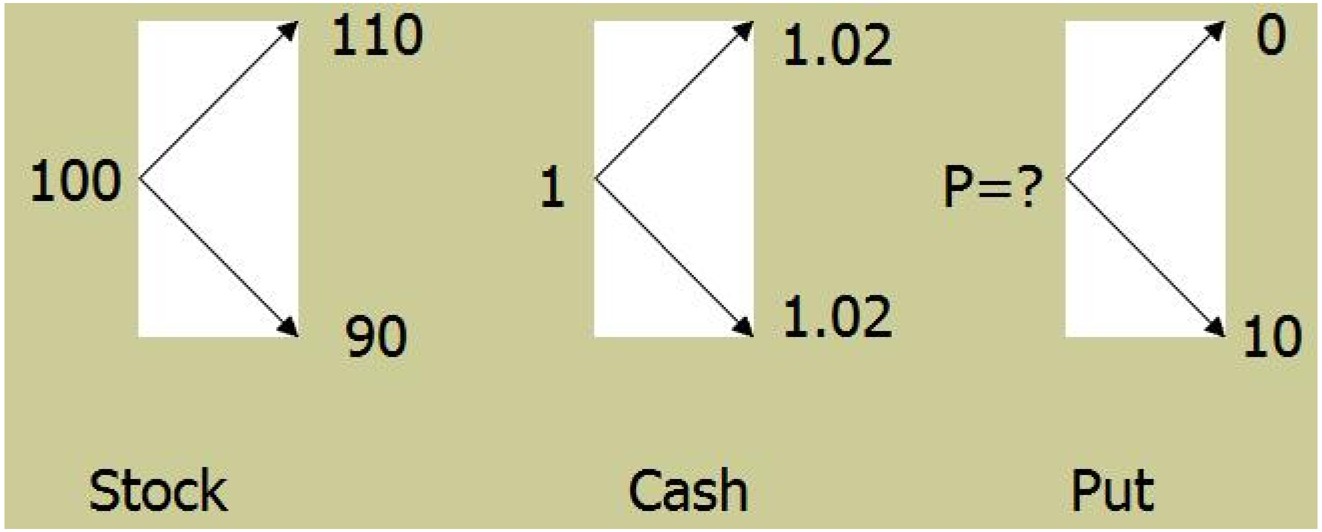
- A long position in 0.5 units of the stock + a borrowing of 44.12 = long the call

Option Premium

- By LOP, call option premium = $0.50 * 100 - 44.12 = 5.88$

Single Period Binomial Model

The Put Pricing Problem



Replicating Portfolio

- For the portfolio to replicate the put, we must have:
- (1) h * 110 + B * 1.02 = 0
- (2) h * 90 + B * 1.02 = 10

➔ h = –0.50, B = 53.92

- A short position in 0.5 units of the stock + investing of 53.92 = long the put

Single Period Binomial Model

- Option Premium
  - By LOP, put option premium = –0.5 * 100 + 53.92 = 3.92

- In Conclusion,
  - 5.88 is the arbitrage – free (unique) price of the call option, and 3.92 is the arbitrage – free (unique) price of the put option

- Arbitrage Opportunities
  - (1) If the market price of the call is 5.50?
  - (2) If the market price of the call is 6.25?
  - (3) If the market price of the put is 3.70?
  - (4) If the market price of the put is 4.25?

Some Comments

- What Happened to the Probability "p"?
  - That "p" does not matter explicitly for the pricing seems surprising
  - But since the replication is done state – by – state, it does not matter what the probability of the state is
  - Nonetheless, does "p" enter implicitly through "u" and "d"?
  - That is, what happens to "u" and "d" if "p" = 1 or "p" = 0?

- Hedge Ratio
  - The quantities "h" in the calculations above are called "hedge ratio" or the "delta of the option"
  - It is the number of units of the underlying security that must be used to replicate the option
  - As such, it measures the "riskiness" of the option in terms of the underlying
  - It is evidently central to the pricing of options by replication, and is also central to hedging the risk in written option positions ➔ "Delta Hedging"

Derivation of the Formula

- 1. Replication

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
 & S_u{*}h - C_u = uS_0{*}h - C_u \\
S_0{*}h\text{-}C \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_d{*}h - C_d = dS_0{*}h - C_d
\end{tikzcd}
$$

$$\text{By construction}: \quad S_u h - C_u = S_d h - C_d \Rightarrow h^* = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)}$$

$$\begin{cases} \text{PV of the portfolio} = \left(S_u h^* - C_u\right) / (1+r)^T \\ \text{Initial cost} = S_0 h^* - C \end{cases} \Rightarrow \left(S_u h^* - C_u\right)/(1+r)^T = S_0 h^* - C$$

$$\Rightarrow C = S_0 h^* - \left(S_u h^* - C_u\right)/(1+r)^T = S_0 \frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)} - \left(S_0 u \times \frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)} - C_u\right) \Big/ (1+r)^T$$

$$= \frac{C_u - C_d - \left(uC_u - uC_d - uC_u + dC_u\right)/(1+r)^T}{u-d}$$

$$= \frac{\left(qC_u + (1-q)C_d\right)}{(1+r)^T}, \quad q = \frac{(1+r)^T - d}{u-d}$$

Derivation of the Formula

- Hedge Ratio

$$h^* = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{\Delta C}{\Delta S}$$

- Risk Neutral Probability

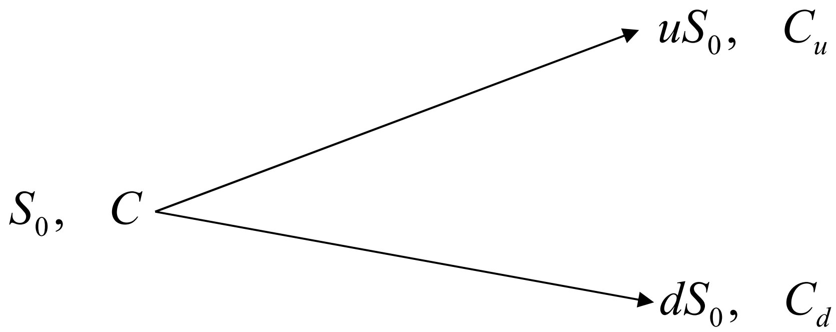
$$q = \frac{(1+r)^T - d}{u - d}$$

- Note That
  - Irrelevance of the stock's expected return
    - The key reason is that we are not valuing the option in the absolute terms
  - Irrelevance of the investor's risk preferences

Risk Neutral Valuation

- Basic Concept
  - An alternative approach used to price options in practice is called "risk – neutral pricing"
  - Risk – neutral pricing uses on a very intuitive approach: the value of the option equals the present value of the payoffs received at maturity
  - Since these payoffs are uncertain, present valuation requires taking expectations of the payoffs and discounting them back to the current time
  - In the risk – neutral pricing approach, these expectations are taken under what is called the "risk – neutral (or risk – adjusted)" probabilities
  - By construction, since the probabilities are risk – adjusted, no further adjustment needs to be made for risk, and the expectations can be discounted back to the present at the risk – free rate
  - Of course, this approach results in the same price as we obtain from replication

Risk Neutral Valuation



For any asset f, $\quad f_0 = \dfrac{1}{(1+r)^T} E^Q(f_T)$

$$\Rightarrow S_0 = \frac{1}{(1+r)^T}\left(quS_0 + (1-q)dS_0\right), \quad \therefore q = \frac{(1+r)^T - d}{u-d}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{(1+r)^T}\left(qC_u + (1-q)C_d\right)$$

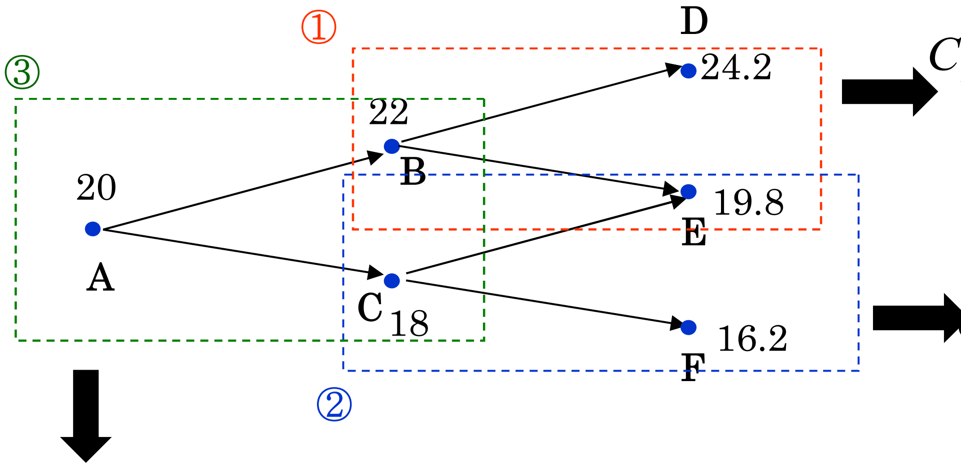
Exercise

- Example 1
  - Current stock price: $100
  - Stock price in three months: $120 or $80
  - Three months risk–free rate: 12% per annum
  - Exercise price: $105, Time to maturity of options: three months
  - European call option price? European put option price?

- Example 2
  - Current stock price: $100
  - Stock price in three months: $120 or $80
  - Three months risk–free rate: 12% per annum
  - Exercise price: $105, Time to maturity of options: three months
  - European call option price? European put option price?

Two – Period Binomial Model

- Example
  - Current stock price: \$20
  - Stock return for next three months: 10% or –10%
  - Risk–free rate: 12% per annum, Exercise price: \$21, Time to maturity: six months
  - European call option price?

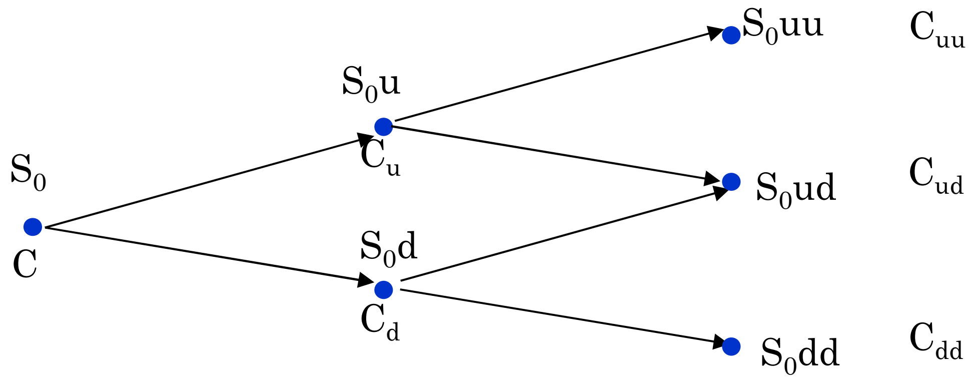


$$
\begin{aligned}
C_B &= \left(p \times C_D + (1-p)C_E\right)/(1+0.12)^{0.25} \\
&= (0.6523 \times 3.2 + 0.3477 \times 0)/(1+0.12)^{0.25} \\
&= 2.0257
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_C &= \left(p \times C_E + (1-p)C_F\right)/(1+0.12)^{0.25} \\
&= (0.6523 \times 0 + 0.3477 \times 0)/(1+0.12)^{0.25} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_A &= \left(p \times C_B + (1-p)C_C\right)/(1+0.12)^{0.25} \\
&= (0.6523 \times 2.0257 + 0.3477 \times 0)/(1+0.12)^{0.25} \\
&= 1.2823
\end{aligned}
$$

Two – Period Binomial Tree Model



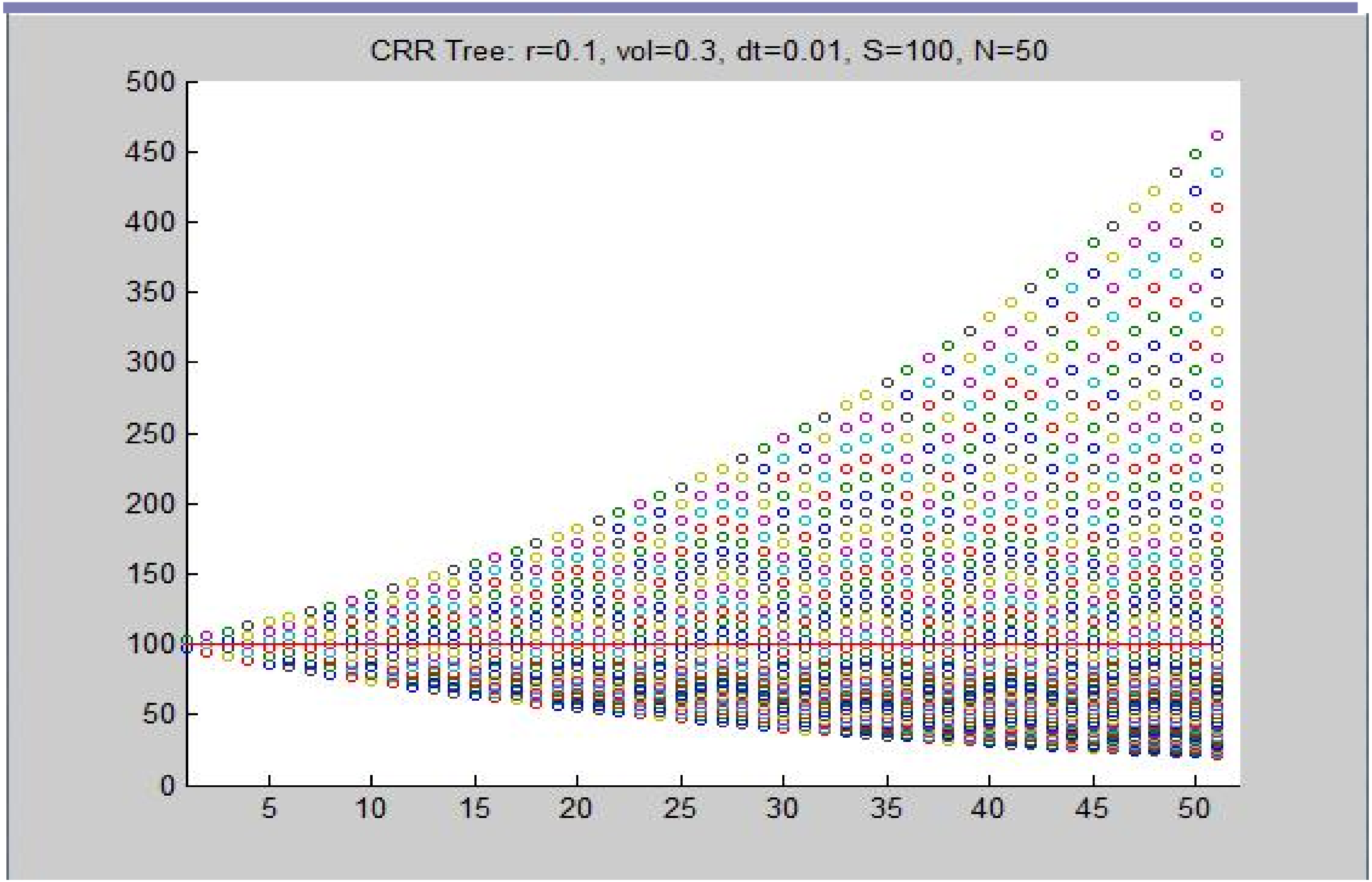
$$\begin{cases} C_u = \left[pC_{uu} + (1-p)C_{ud}\right] / (1+r)^T \\ C_d = \left[pC_{ud} + (1-p)C_{dd}\right] / (1+r)^T \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = \left[pC_u + (1-p)C_d\right] / (1+r)^T \quad \Rightarrow C = \left[p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}\right] / (1+r)^T$$

Example

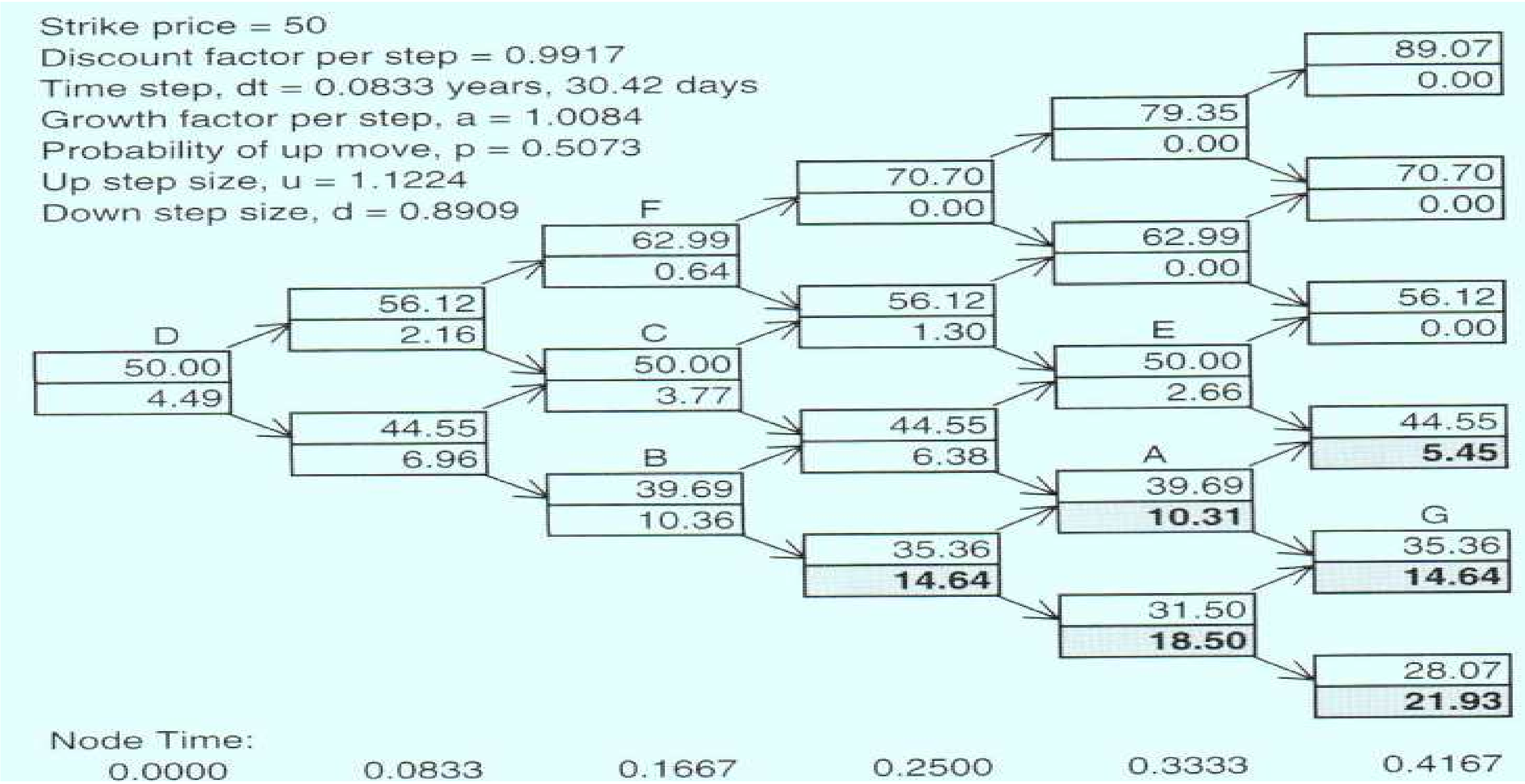
- Current stock price: 10,000 won
- Stock return for next three months: 20% or –20%
- Risk–free rate:12% per annum, Exercise price: 9,000 won, Time to maturity: six months
- European call option price? European put option price?

Multi – Period Binomial Model



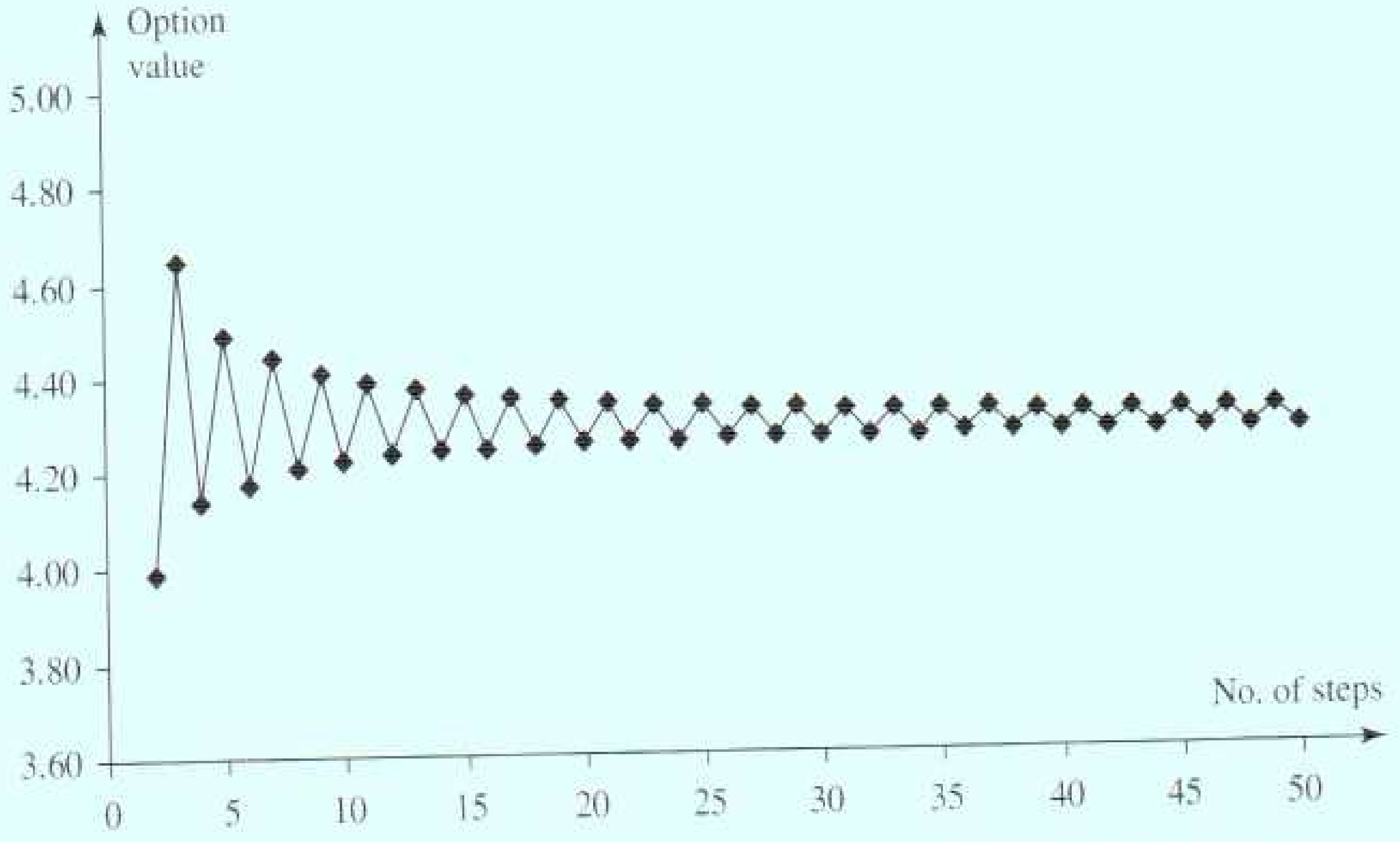
Application to American Style Options

- Example (See J. Hull)
  - 5 – month American put option on a non – dividend paying stock
  - The stock price is \$50, the strike price is \$50, the risk free rate is 10% per annum, and the volatility is 40% per annum



Convergence of the Tree

Figure 19.4 Convergence of the price of the option in Example 19.1 calculated from the DerivaGem Application Builder functions.



Other Types of Options

- Stock Index Options

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = 1/u, \quad p = \frac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u - d}$$

- Currency Options

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = 1/u, \quad p = \frac{e^{(r-r_f)\Delta t} - d}{u - d}$$

- Futures Options

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = 1/u, \quad p = \frac{1 - d}{u - d}$$

II. Black – Scholes Model

Black – Scholes Model

과학자들의 '경제야 놀자!'

[2007 년 11 월 28 일, 한겨레, 과학향기] '만약 당신이 10 년 전으로 돌아간다면 무엇을 하겠습니까?'라는 설문조사 질문에 상당수의 사람들이 똑같은 답변을 했다. 그 답변은 '서울 강남 지역에 땅을 사겠다'였다고 한다. '미래를 내다볼 줄 알면 돈을 많이 벌 수 있다'는 단순한 사실을 보여주는 예다. 하지만 미래를 예측하는 일은 결코 쉽지 않다. 주가가 널뛰기를 하며 투자자들의 머리를 복잡하게 하고 있지만 전문가들이 내놓은 전망조차 제각각이다. 만약 미래를 예측하는 확률을 단 1%라도 높일 수 있다면 수익률은 훨씬 높아질 것이다. 불확실한 미래를 예측하기 위해 투자에 과학, 특히 물리학이 활발하게 동원되기 시작했다. 주식시장으로 진출한 대표적인 물리학 법칙을 알아보자.

멱급수의 법칙: 고전 경제학자들은 주가 변화의 분포가 정규분포의 모양을 띤다고 생각했다. 즉 주가가 큰 폭으로 떨어지거나 큰 폭으로 오르는 경우는 정규분포의 가장자리이기 때문에 일어날 확률이 낮다고 생각했다. 그런데 주가의 급격한 등락은 예상보다 자주 일어났다. 고전 경제학자들의 생각이 틀린 것이다. 1995 년 미국 보스턴대 물리학자들이 모여 '통계물리적 해석'이라는 새로운 방법을 만들어냈다. 그리고 기업의 수익률 분포가 정규분포가 아니라 '멱급수의 법칙'을 따른다는 사실을 밝혀냈다. 멱급수는 y=a/xk 의 방정식으로 표현되는데 시스템을 이루는 요소들의 상호의존이 높아서 가장자리가 더 두터운 모양으로 나타난다. 즉 주가가 폭등하거나 폭락하는 현상이 실제 주식 시장에서는 자주 나타난다는 것이다. 이를 통해 물리학의 시각으로 경제를 보는 경제물리학이 탄생했다.

양자역학: 물리학과 경제의 관계는 여기에서 그치지 않는다. 주식 시장에 양자역학을 적용할 수 있다. 양자역학에서 관찰하고자 하는 대상은 관찰 수단에 의해 변한다. 즉 전자를 관찰하려고 해도 전자를 관찰하는 현미경 같은 도구가 전자의 위치, 속도에 영향을 준다. 이와 같이 주식 시장에서는 참여하는 사람 각각은 시장을 관찰할 뿐 아니라 적극적으로 영향을 미친다. 때문에 주식 시장에서 미래를 예측하는 좋은 도구가 개발됐다 해도, 그 도구를 사용하는 사람이 많아지는 순간 그 도구는 효용성을 잃는다. 어떤 펀드의 수익률이 좋다고 소문이 나고

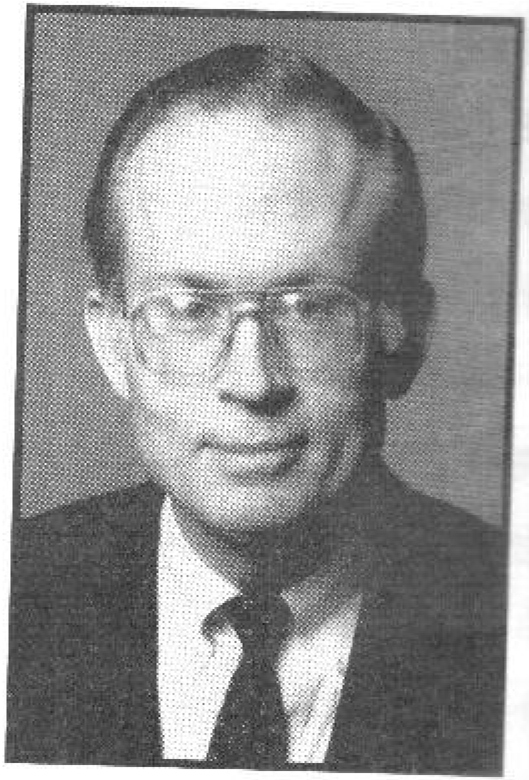
Black – Scholes Model

그 펀드에 돈이 몰리는 순간 수익률은 떨어지기 일쑤다. 입자의 정확한 양자역학적 상태를 알 수 없듯 주식 시장도 정확히 예측할 수 없다. 그러나 양자역학이 입자 하나하나에 대해 설명하지 못하나 전체의 방향성과 확률을 내는 것처럼 주식 시장도 전체적인 방향성은 양자역학으로 계산할 수 있다.

열역학: 미래 가치를 사고파는 파생상품은 열역학 법칙으로 설명할 수 있다. 파생상품이란 미래 가격을 기준으로 현재에 사고파는 것으로 선물(Futures)과 옵션(Options)이 있다. 선물은 주식의 미래의 가격을 예측해 현재 거래하는 것이다. 주식을 산 사람은 거래한 가격보다 주식의 가치가 오르면 돈을 벌지만, 반대의 경우는 손해를 본다. 옵션은 미래에 주식을 사고팔 수 있는 권리만 현재 거래하는 것이다. 옵션은 주가가 많이 오르면 큰 수익을 얻을 수 있어 복권과 비슷한 성격을 갖는다. 파생상품은 보통 경제활동에서 발생하는 위험을 최소화하기 위해 만들어졌다. 금융상품 중에서 가장 복잡하기로 유명한 이 파생상품은 미국 항공우주국(NASA)의 과학자들이 금융가로 진출하면서 크게 발전했다. 파생상품에서 가장 골치 아픈 문제는 파생상품의 가격을 결정하는 것이다. 이 문제를 해결한 것이 피셔 블랙과 아이런 숄즈가 개발한 '블랙-숄즈 모형'이다. 이 모형을 쓰면 몇 가지 가정 하에 주식 옵션의 이론적 가격을 결정할 수 있어 옵션 판매에 따르는 위험을 95%까지 없앨 수 있다. 블랙-숄즈 모형은 주식 가격이 기하학적 브라운운동을 나타낸다는 관찰에서 시작한다. 브라운운동은 가루가 액체 분자에 부딪혀 복잡하게 움직이는 현상으로 수리물리를 쓰면 숫자와 수식으로 표현할 수 있다. 이 중 하나가 아인슈타인의 열전도방정식으로 공기에서 입자의 확산을 잘 설명한다. 블랙-숄즈 모형은 이 열전도방정식을 이용해 옵션의 가격을 푸는 데 성공했고 결국 노벨 경제학상을 받았다.

이 외에도 단순한 구조가 반복돼 복잡한 구조를 만드는 플랙탈, 1,1,2,3,4,8,13 으로 이어지는 피보나치 수열, 기상 예보에 사용되는 복잡계 물리학 등 다양한 물리학 이론이 주식시장에서 사용되고 있다. 이제 현대 경제학은 자연과학을 떼고서는 설명할 수 없게 됐다. 과학적 분석 없이 느낌으로 투자하던 시대는 끝났다는 얘기다. 참신한 아이디어로 무장한 과학자들이 자연과학과 공학에 이어 금융가로 진군하고 있다.

Black, F., M. Scholes, and R. Merton



물리학도에서 금융학자로 전향한

옵션의 비밀을 푼 블랙–숄즈 모델의
주인공 마이런 숄즈

Introduction

❒ Black – Scholes Model (1973)

- It is unambiguously the best known model of option pricing
- It is also one of the most widely used: it is the benchmark model for pricing options on equities / stock indices / currencies (the "Garman – Kohlhagen model, 1983") / futures (the "Black model, 1976")
- The black model is also commonly used to some interest rate derivatives such as caps and floors

❒ Preliminary Comments

- Technically, the BS model is more complex than the binomial or other lattice models
- The BS model is a continuous time model – prices in the model are allowed to change continuously rather than at discrete points in time
- All returns, interest rates, etc are quoted in continuously compounded terms
- Modeling the continuous evolution of uncertainty requires the use of some sophisticated mathematics including techniques drawn from the field of stochastic calculus

Introduction

❒ Why Bother?

- ❖ This raises the obvious question: Why bother?
- ❖ That is, since we can approximate the BS distribution arbitrarily closely by the binomial, what is gained by all this extra fancy footwork?
  - ➢ Unlike the binomial or other lattice models, option prices in the BS model can be expressed in "closed – form", i.e., as particular explicit functions of the parameters
  - ➢ This makes computing option prices very easy
  - ➢ It also makes computing option sensitivities very easy

❒ Main Assumptions of the BS Model

- ❖ The model assumes that the underlying asset price evolves according to a geometric Brownian motion (GBM)
  - ➢ (1) Returns on the stock follow a log – normal distribution
  - ➢ (2) Stock prices must evolve smoothly: they cannot jump

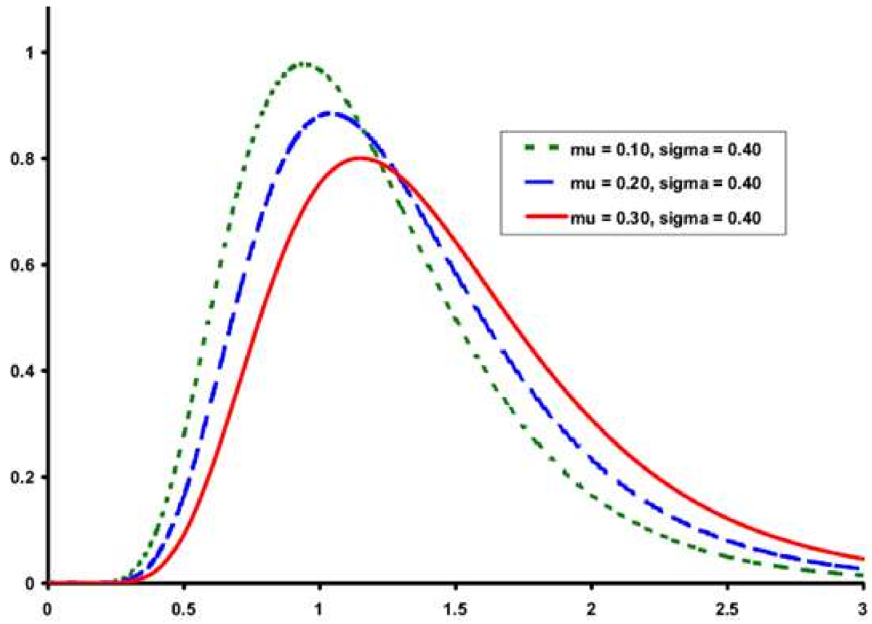
Assumptions of the BS Model

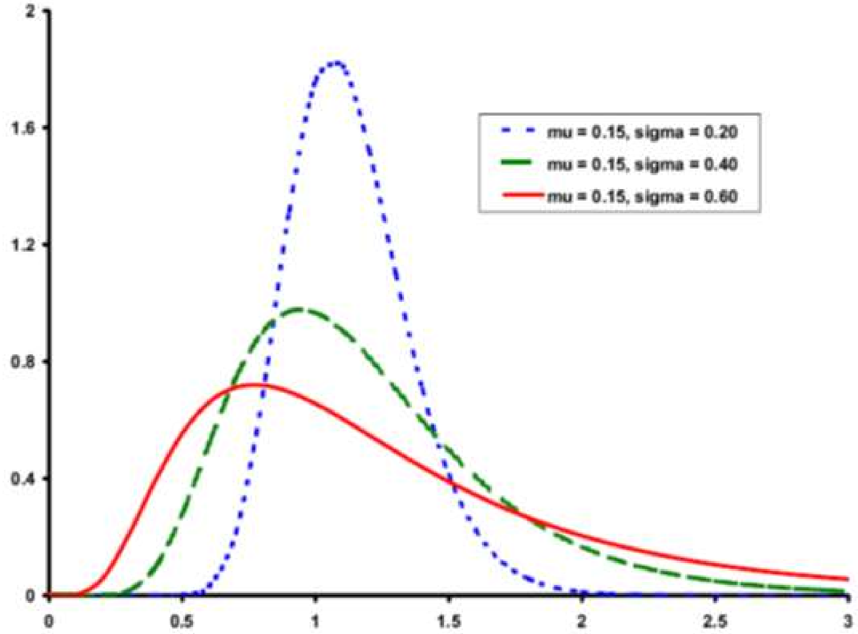
❒ Log – Normal Assumption

- ❖ Log returns of underlying assets are normally distributed
- ❖ Mathematically, log returns and continuously compounded returns represent the same thing

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N(\mu t, \sigma^2 t).$$

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{S_t}{S_0} = e^x \quad \Leftrightarrow \quad S_t = S_0 e^x.$$





Assumptions of the BS Model

Is GBM a Reasonable Assumption?

- The log – normality and no – jumps conditions appear unreasonably restrictive:
  - Volatility of markets is typically not constant over time
  - Market prices do sometimes “jump”
  - The no – jumps assumption appears to rule out even dividends
- Alternative
  - Stochastic volatility model / Jump model, …

Other Assumptions

- The risk – free interest rate is constant
- No dividends during the life of the option
- The options are European in style
- No transaction costs / No taxes

Derivation of BS PDE

- Basic Principle
  - (1) Consider a portfolio consisting of a long position in h shares of the stock and a short position in one options
  - (2) Make the position riskless for only a very short period of time

$$\Pi = -C + hS \quad \Rightarrow \quad d\Pi = -dC + hdS$$

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \quad dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S}\sigma S dz$$

$$\text{Then,} \quad d\Pi = \left(h\mu S - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial S}\mu S - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \left(h\sigma S - \frac{\partial C}{\partial S}\sigma S \right) dz$$

$$\therefore h = \frac{\partial C}{\partial S}$$

$$\Rightarrow \quad d\Pi = \left(\frac{\partial C}{\partial S}\mu S - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial S}\mu S - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt = r dt = r\left(-C + \frac{\partial C}{\partial S} S \right) dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial C}{\partial S} rS + \frac{\partial C}{\partial t} = rC$$

Black – Scholes Formula

- Boundary Condition

$$C(S_T, T) = \max(S_T - X, 0), \quad P(S_T, T) = \max(X - S_T, 0)$$

- Solution of the PDE

$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2), \quad P = Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

$$\text{where,} \quad d_{1,2} = \frac{\ln(S/X) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Black – Scholes Formula

❒ Upper / Lower Bounds

- (1) Upper bound: $$\lim_{S_0 \to \infty} d_1 = \infty \Rightarrow N(d_1) = 1,\ N(d_2) = 1,\ N(-d_1) = 0,\ N(-d_2) = 0$$
  $$\therefore\ C = S - Xe^{-rT}, \quad P = 0$$

- (2) Lower bound: $$\lim_{S_0 \to 0} d_1 = -\infty \Rightarrow N(d_1) = 0,\ N(d_2) = 0,\ N(-d_1) = 1,\ N(-d_2) = 1$$
  $$\therefore\ C = 0, \quad P = Xe^{-rT} - S_0$$

❒ Example

- Current stock price: $42, Volatility: 20% p.a., risk–free rate: 10% p.a.
- Exercise price: $40, Time to maturity: 6 months
- European call option price? European put option price?

Real World Example

Rate = 0.6%

Economic Meanings

- Replication of a Call
  - To replicate a call in general, we must
    - (1) Take a long position in "h" units of the underlying, and
    - (2) Borrow "B" at the risk – free rate
  - Cost of this replicating portfolio = h * S(0) – B

- From the BS Formula for a Call
  - C = S(0) * Term 1 – Term 2
  - Term 1 = N(d1)
  - Term 2 = PV(X) * N(d2)
  - → "h" = N(d1): hedge ratio (i.e., delta of the option)
  - → "B" = PV(X) * N(d2)

Economic Meanings

- Replication of a Put
  - To replicate a put in general, we must
    - (1) Take a short position in "h" units of the underlying, and
    - (2) Invest "B" at the risk – free rate
  - Cost of this replicating portfolio = –h * S(0) + B

- From the BS Formula for a Call
  - C = –S(0) * Term 1 + Term 2
  - Term 1 = N(–d1)
  - Term 2 = PV(X) * N(–d2)
  - → "h" = N(–d1) = 1 – N(d1): hedge ratio (i.e., delta of the option)
  - → "B" = PV(X) * N(–d2) = PV(X) * (1 – N(d2))

Economic Meanings

- What is N(d1) and N(d2) in Call Options?
  - N(d1)
    - Hedge ratio (i.e., the amount of the underlying that must be bought)
    - Sensitivity measure
  - N(d2)
    - The risk neutral probability of the option finishing in the money

- What is N(d1) and N(d2) in Put Options
  - –N(–d1)
    - Hedge ratio / Sensitivity measure
    - N(–d1) is the amount of the underlying that must be shorted
  - N(–d2)
    - The risk neutral probability of the option finishing in the money

Summary of the BS Formula

Value of long position in the **underlying** in the replacement portfolio

Amount of **borrowing** in replicating portfolio

$$C = \overbrace{S_0 \cdot \underbrace{N(d_1)}} - \overbrace{e^{-rT} K \cdot \underbrace{N(d_2)}}$$

Delta of the cell (i.e., change in call value per $1 change in underlying)

Risk-neutral probability of the call finishing in –the-money i.e.., that S_T > K)

Summary of the BS Formula

Value of **investment** in the replicating portfolio

Value of short position in the **underlying** in the replicating portfolio

$$P = \overbrace{e^{-rT} K \cdot \underbrace{N(-d_2)}} - \overbrace{S_0 \cdot \underbrace{N(-d_1)}}$$

Risk-neutral probability of put option finishing in-the-money (i.e., that S_T < K)

Delta of the put (change in put value per $1 change in underlying)

Calculation of the BS Model Prices

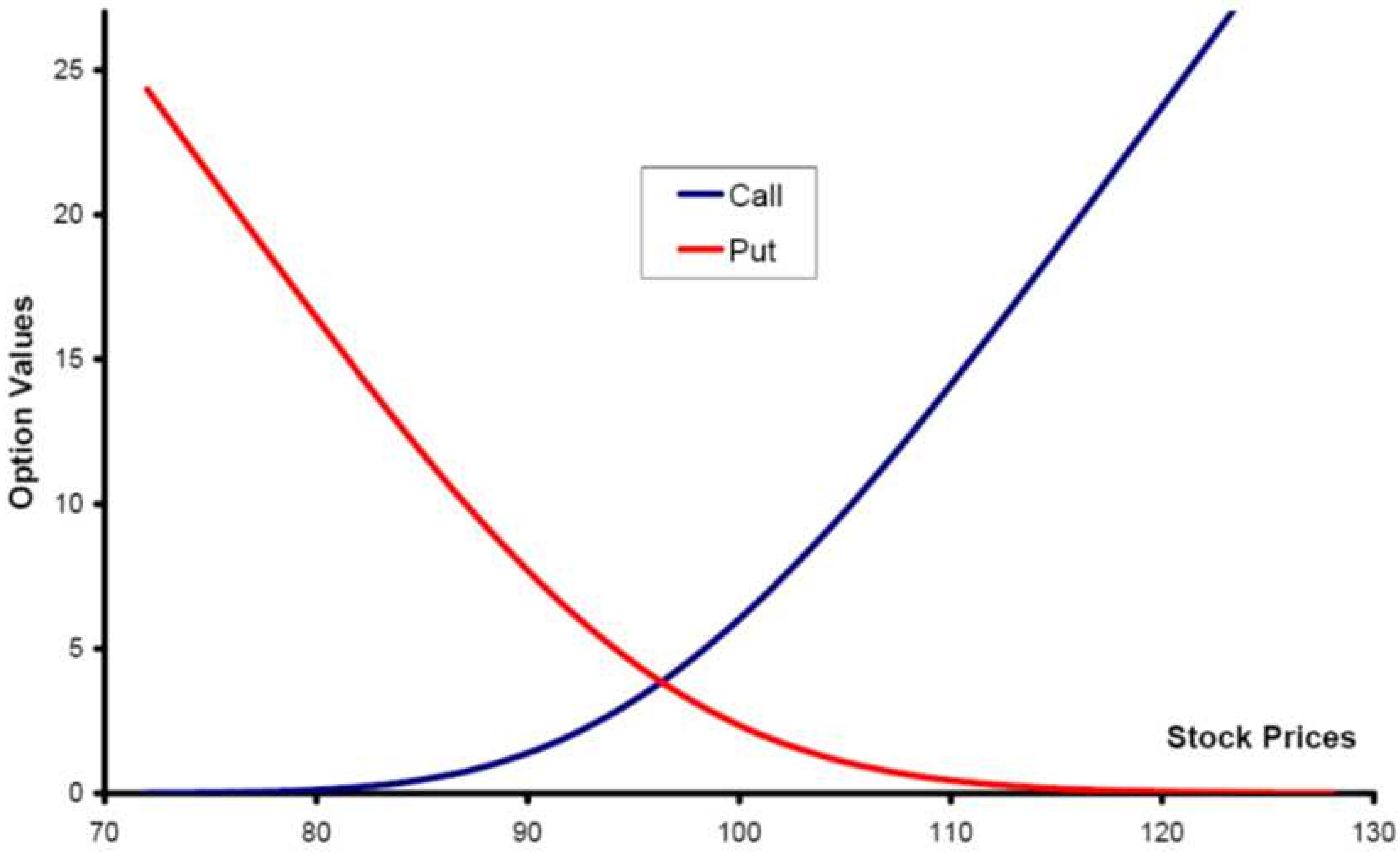
❒ Steps

- (1) Determine the input values
- (2) Compute d1 and d2
- (3) Compute N(d1) and N(d2) ➔ In Excel, use the function “Normsdist(d1)”
- (4) Calculate the option premium from the BS formula

❒ Example

- The strike price X = 100
- The time to maturity is 0.5 years
- The annualized volatility of the stock returns is 20%
- The risk – free interest rate is 5%
- The figures plot call and put prices as the underlying asset price varies from 72 to 128

Calculation of the BS Model Prices



Extension to Other Types of Options

- Equity Index Options

$$C = Se^{-qT}N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2), \quad P = Xe^{-rT}N(-d_2) - Se^{-qT}N(-d_1)$$

$$\text{where,} \quad d_{1,2} = \frac{\ln(S/X) + (r - q \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

- Currency Options (Garman and Kohlhagen Model, 1983)

$$C = Se^{-r_f T}N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2), \quad P = Xe^{-rT}N(-d_2) - Se^{-r_f T}N(-d_1)$$

$$\text{where,} \quad d_{1,2} = \frac{\ln(S/X) + (r - r_f \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

- Futures Option (Black, 1976)

$$C = e^{-rT}[FN(d_1) - XN(d_2)], \quad P = e^{-rT}[XN(-d_2) - FN(-d_1)]$$

$$\text{where,} \quad d_{1,2} = \frac{\ln(F/X) \pm (\sigma^2 T)/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

BSM Model

[2008 년 5 월 16 일, 한국일보] 통화옵션

옵션(option)은 스와프(swap)와 함께 금융파생상품의 축이다. 어떤 금융상품을 장차 어느 시점에 어떤 가격으로 사거나 팔 수 있는 권리가 거래 대상이다. 선물거래는 나중에 반드시 현물로 사거나 팔아야 할 의무가 따르지만 옵션거래는 얼마든지 권리를 포기할 수 있다. 가령 1 달러=1,000 원으로 1 만 달러를 살 옵션을 샀고, 환율이 달러당 1,100 원이 됐다면 권리를 행사해 달러당 100 원의 득을 본다. 거꾸로 환율이 달러당 900 원으로 떨어지면 옵션을 포기하고, 거래 비용인 '옵션 프리미엄'만 부담하면 그만이다.

■ 옵션은 본고장 미국에서도 1970 년대 이후에 거래가 본격화했다. 환 리스크를 덜 수 있는 보험처럼 여겨졌고, 그리 까다롭지 않은데도 거래가 활발하지 않았던 것은 '보험료'인 옵션 프리미엄을 산출할 마땅한 방법이 없었기 때문이다. 생명보험이라면 연령별 사망률 통계만으로도 보험회사가 손해를 보지 않을 보험료를 산출할 수 있지만 옵션에는 그런 게 없었다. 1973 년 MIT 의 마일런 숄즈와 피셔 블랙이 '블랙·숄즈 모형'이라 불리게 된 공식을 내놓은 뒤에야 옵션 시장이 꽃피었다. 마이런은 이 공로로 노벨 경제학상을 받았다.

■ 블랙·숄즈 모형은 비교적 간단하다. 계산에 필요한 수치는 대상인 기초자산(금융상품)의 가치, 기간, 금리, 옵션 행사가격, 변동률 등 다섯 가지가 전부다. 문제는 이미 나와 있는 다른 수치와 달리 변동률은 결국 예측에 의존할 수밖에 없다는 점이다. 바로 여기서 투기 여지가 생긴다. 애초의 보험 성격을 띤 옵션이 선물에 비해 약하긴 하지만 도박성을 띠게 되는 것도 완전한 예측이 불가능한 변동률에 의존하기 때문이다. 통화옵션이 환 리스크를 더는 수단이지만, 환율 변동폭에 따라서는 새로운 위험이 되기도 한다.

Binomial Tree Model vs. BSM Model

기아차 BW 적정가는?

[2009 년 3 월 31 일, 아시아 경제신문] 올 들어 회사채 발행이 급증하며 전환사채(CB), 신주인수권부 사채(BW) 같은 주식연계채권의 발행도 늘어나고 있다. 특히 3 월 중에 있었던 기아차의 4000 억원 BW 발행에 8 조원에 가까운 시중 자금이 몰리면서 BW 에 대한 시장의 관심이 높아진 상황이다. 다음달 1 일 상장될 기아차 신주인수권(워런트)의 실제 가치는 어떻게 되며 적절한 활용방안은 무엇이 있을까? 강송철 대우증권 애널리스트는 31 일 "기아차 워런트는 기아차 주식에 대한 콜옵션과 마찬가지"라며 "적절히 활용하면 주식 매수에 비해 여러 가지 이점을 누릴 수 있다"고 분석했다. 강 애널리스트가 '블랙-숄즈' 모형을 이용해 적정가치를 계산한 바에 따르면 기아차 워런트의 이론 가격은 2702 원이다. 여기에 기아차 워런트의 경우 행사가격 조정과 관련된 조건도 고려할 필요가 있다. 강 애널리스트는 "이번 기아차 워런트에는, 3 개월마다 신주인수권의 행사가격을 조정할 수 있는 조건이 포함돼 있다"며 "이런 점을 감안하면 단순한 콜옵션이라기 보다는 일종의 ‘이색 옵션(Exotic option)’이라고 볼 수 있다"고 진단했다.

그는 행사가격 조정이 일어날 수 있는 이유로 ▲유상증자, 주식배당, 준비금의 자본 전입으로 신주를 발행하는 경우 ▲합병, 자본감소, 주식분할 및 병합 등에 의해 행사가액 조정 필요한 경우 ▲기아차 보통주의 가격이 하락할 경우 등 세가지를 꼽았다. 강 애널리스트는 "이러한 행사가격 조정 조건은 분명 옵션 보유자에게 유리한 조건이며 옵션의 적정 가치를 높이는 요인"이라며 "옵션의 적정 가치는 블랙-숄즈 모형을 이용한 값인 2702 원보다 상향 조정될 필요가 있다"고 밝혔다. 이에 따라 변형된 이항 모형을 적용할 경우 3366 원으로 계산된다는 게 강 애널리스트의 분석이다.

Limitations of O.P.M.

세계 석학 대리전 된 '키코 재판'

[2009년 12월 17일, 서울경제신문] 중소업체 D사와 우리·외환은행 간 키코(KIKO·통화옵션파생상품) 사건 재판에 세계적인 석학들이 증인으로 출석하는 등 뜨거운 공방이 연출됐다. 17일 오후 서울중앙지법 민사합의32부(변현철 부장판사) 심리로 열린 부당이득금 반환 청구소송에서 노벨경제상 수상자인 로버트 엥글(67) 뉴욕대 스턴경영대학원 석좌교수가 증인으로 출석했다.

엥글 교수는 자신의 이름과 신분을 묻는 재판부의 질문에 영어로 "예스(YES)"라고 답한 뒤 증인선언을 읽어 내려갔다. 증인신문은 동시통역됐다. 엥글 교수는 키코상품 구조와 관련, "시중은행이 중소기업을 상대로 판매한 키코는 기업보다 은행의 기대이익이 훨씬 크게 설계된 불공정한 상품"이라고 주장했다. 엥글 교수는 "기업이 키코 상품으로 이득을 보려면 환율이 지정한 범위 안에서만 움직여야 하는데 환율의 변동성이 커 이럴 가능성은 거의 0%에 가깝다"며 "환헤지(위험 회피) 상품으로서는 오류(flaud)가 있다"고 말했다.

엥글 교수에 따르면 키코상품을 구성하고 있는 풋옵션 가치(기업의 기대이익)와 콜옵션 가치(은행의 기대이익)를 '헤스톤 옵션모형'으로 계산한 결과 은행은 기업이 받는 프리미엄 143억원보다 평균 4.6배 많은 656억원을 받도록 상품이 설계됐다는 것. 엥글 교수는 "지난 1990년대 이후로 파생상품의 가격을 예측하는 모형에서 국내 시중은행 측이 적용하고 있는 '블랙숄즈 모형'을 쓰는 선진국은 없다"며 "변동이 심한 금융시장에 적합한 가격측정 모형은 "헤스톤 옵션 모형"이라고 강조했다. 블랙숄즈 모형은 특정 상품이 정규분포를 따르고 일정한 흐름을 보이는 상품에 적용하는 것으로 비정규 분포를 따르는 현행 파생상품은 헤스톤 옵션 모형이 적합하다는 게 엥글 교수의 설명이다.