Proyecto 2

Paula Rosado Fernández

Análisis Numérico
Universidad Complutense de Madrid

09/04/2021

Índice general

Capítulo 1

Ejercicio 1

1.1. Resolución de los coeficientes

1.1.1. Apartado a

Para hallar los valores de los coeficientes de la discretización (1.1) utilizaremos Taylor para aproximar cada función a su polinomio de Taylor de orden 4 (1.2).

$$D_h^a f(x) = \frac{a_0 f(x) + a_1 f(x+h) + a_2 f(x+2h) + a_3 f(x+3h)}{h} \tag{1.1}$$

$$f(y) = f(x) + f^{'}(x)(y-x) + f^{''}(x)\frac{(y-x)^2}{2!} + f^{'''}(x)\frac{(y-x)^3}{3!} \tag{1.2}$$

La razón de aplicar Taylor hasta orden cuatro, es el número de incógnitas (coeficientes) que tenemos. Al aplicar Taylor obtendremos una sistema de ecuaciones de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Desarrollando Tylor obtenemos:

Tomando $x = x_0$, el polinomio de Taylor para $a_0 f(x)$ es:

$$f(y) = a_0 f(x_0) \tag{1.3}$$

Tomando $x = x_0$ $y = x_0 + h$ el polinomio de Taylor para $a_1 f(x+h)$, es:

$$f(y) = a_1 f(x_0) + a_1 f^{'}(x_0)(h) + a_1 f^{''}(x_0)\frac{(h)^2}{2!} + a_1 f^{'''}(x_0)\frac{(h)^3}{3!} \tag{1.4}$$

Tomando $x = x_0$ $y = x_0 + 2h$ el polinomio de Taylor para $a_2 f(x+2h)$, es:

$$f(y) = a_2 f(x_0) + a_2 f^{'}(x_0)(2h) + a_2 f^{''}(x_0)\frac{(2h)^2}{2!} + a_2 f^{'''}(x_0)\frac{(2h)^3}{3!} \tag{1.5}$$

Tomando $x = x_0$ $y = x_0 + 3h$ el polinomio de Taylor para $a_3 f(3+2h)$, es:

$$f(y) = a_3 f(x_0) + a_3 f^{'}(x_0)(3h) + a_3 f^{''}(x_0)\frac{(3h)^2}{2!} + a_3 f^{'''}(x_0)\frac{(3h)^3}{3!} \tag{1.6}$$

Una vez calculados los polinomios de Taylor los introducimos en la Discretización de $f^{'}$ y sacamos las ecuaciones para calcular los coeficientes. Obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \tag{1.7}$$
$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 1 \tag{1.8}$$
$$\frac{a_1}{2} + 2a_2 + \frac{9a_3}{2} = 0 \tag{1.9}$$
$$\frac{a_1}{6} + \frac{4a_2}{3} + \frac{9a_3}{2} = 0 \tag{1.10}$$
$$\tag{1.11}$$

Igualamos la ecuación correspondiente a f' a 1 y el resto a 0 y calculamos los coeficientes obteniendo los valores:

$$a_0 = -\frac{11}{6} \tag{1.12}$$
$$a_1 = 3 \tag{1.13}$$
$$a_2 = -\frac{3}{2} \tag{1.14}$$
$$a_3 = \frac{1}{3} \tag{1.15}$$
$$\tag{1.16}$$

1.1.2. Apartado b

Para hallar los coeficientes de la siguiente discretización (1.17) realizaremos el mismo procedimiento:

$$D_h^a f(x) = \frac{b_1 f(x+h) + b_{-1} f(x-h) + b_2 f(x+2h) + b_{-2} f(x-2h)}{h} \tag{1.17}$$

Calculamos los siguentes Polinomios de Taylor:

Tomando $x = x_0$ $y = x_0 + h$ el polinomio de Taylor para $b_1 f(x+h)$ es:

$$f(y) = b_1 f(x_0) + b_1 f^{'}(x_0)(h) + b_1 f^{''}(x_0)\frac{(h)^2}{2!} + b_1 f^{'''}(x_0)\frac{(h)^3}{3!} \tag{1.18}$$

Tomando $x = x_0$ $y = x_0 - h$ el polinomio de Taylor para $b_{-1}f(x-h)$ es:

$$f(y) = b_{-1}f(x_0) - b_{-1}f^{'}(x_0)(h) + b_{-1}f^{''}(x_0)\frac{(h)^2}{2!} - b_{-1}f^{'''}(x_0)\frac{(h)^3}{3!} \tag{1.19}$$

Tomando $x = x_0$ $y = x_0 + 2h$ el polinomio de Taylor para $b_2 f(x+2h)$ es:

$$f(y) = b_2 f(x_0) + b_2 f^{'}(x_0)(2h) + b_2 f^{''}(x_0)\frac{(2h)^2}{2!} + b_2 f^{'''}(x_0)\frac{(2h)^3}{3!} \tag{1.20}$$

Tomando $x = x_0$ $y = x_0 - 2h$ el polinomio de Taylor para $b_{-2}f(x-2h)$ es:

$$f(y) = b_{-2}f(x_0) - b_{-2}f^{'}(x_0)(2h) + b_{-2}f^{''}(x_0)\frac{(2h)^2}{2!} - b_{-2}f^{'''}(x_0)\frac{(2h)^3}{3!} \tag{1.21}$$

Los introducimos en la Discretización de $f^{'}$ obteniendo el siguente sistema de ecuaciones:

$$b_1 + b_{-1} + b_2 + b_{-2} = 0 \tag{1.22}$$
$$b_1 - b_{-1} + 2b_2 - 2b_{-2} = 1 \tag{1.23}$$
$$\frac{b_1}{2} + \frac{b_{-1}}{2} + 2b_2 + 2b_{-2} = 0 \tag{1.24}$$
$$\frac{b_1}{2} - \frac{b_{-1}}{2} + 4b_2 - 4b_{-2} = 0 \tag{1.25}$$
$$\tag{1.26}$$

Los valores de las correspondientes incógnitas son:

$$b_1 = \frac{2}{3} \tag{1.27}$$
$$b_{-1} = -\frac{2}{3} \tag{1.28}$$
$$b_2 = -\frac{1}{12} \tag{1.29}$$
$$b_{-2} = \frac{1}{12} \tag{1.30}$$
$$\tag{1.31}$$

1.2. Argumentación del orden de la discretización de $f^{'}$

Una vez calculados los coeficientes hemos de sacar el término del error de cada discretización para obterner el orden mínimo de discretización. Para ello, realizamos un procedimiento similar al utilizado en el apartado anterior, calculamos los Polinomios de Taylor para cada función y los introducimos en la discretización correspondiente. La única diferencia es que calcularemos el Polinomio de Taylor de un grado más. Como ya tenemos los valores de los coeficientes, al sustituir dichos valores en los polinomios calculados, obtendremos un valor en función de 'h', el orden de dicha 'h' nos proporcionará el órden mínimo de discretización de $f^{'}$.

A continuación se mostrarán los pasos descritos anteriormente para cada apartado:

1.2.1. Apartado a

$D_h^a f(x)$ sería igual a la suma de:

$$\frac{(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)f(x_0)}{h} \tag{1.32}$$

$$\frac{(a_1 + 2a_2 + 3a_3)f^{'}(x_0)h}{h} \tag{1.33}$$

$$\frac{(\frac{a_1}{2} + 2a_2 + \frac{9a_3}{2})f^{''}(x_0)h^2}{h} \tag{1.34}$$

$$\frac{(\frac{a_1}{6} + \frac{4a_2}{3} + \frac{9a_3}{2})f^{'''}(x_0)h^3}{h} \tag{1.35}$$

$$\frac{(\frac{a_1}{24} + \frac{2a_2}{3} + \frac{27a_3}{8})f^{''''}(x_0)h^4}{h} \tag{1.36}$$

Por el sistema de ecuaciones resuelto anteriormente, sabemos que los cocientes 1.32,1.34,1.35 se anularían y el cociente 1.33 quedaría como $f^{'}(x_0)$. En cambio el cociente 1.36 sería igual a: $\frac{1}{4}h^3 f^{''''}(x_0)$

Por lo tanto, el orden mínimo de la discretización de $f^{'}$ es 3.

1.2.2. Apartado b

$D_h^b f(x)$ sería igual a la suma de:

$$\frac{(b_1 + b_{-1} + b_2 + b_{-2})f(x_0)}{h} \tag{1.37}$$

$$\frac{(b_1 - b_{-1} + 2b_2 - 2b_{-2})h}{h} \tag{1.38}$$

$$\frac{(\frac{b_1}{2} + \frac{b_{-1}}{2} + 2b_2 + 2b_{-2})f^{''}(x_0)h^2}{h} \tag{1.39}$$

$$\frac{(\frac{b_1}{2} - \frac{b_{-1}}{2} + 4b_2 - 4b_{-2})h^3}{h} \tag{1.40}$$

$$\frac{(\frac{b_1}{24} + \frac{b_{-1}}{24} + 2\frac{b_2}{3} + 2\frac{b_{-2}}{3})f^{''''}(x_0)h^4}{h} \tag{1.41}$$

En este apartado observamos que sustituyendo los coeficientes en el cociente 1.41 este se anularía, razón para calcular el Polinomio de Taylor de orden 6. Por lo tanto, se le añadiría a la suma:

$$\frac{(\frac{b_1}{120} - \frac{b_{-1}}{120} + 4\frac{b_2}{15} - 4\frac{b_{-2}}{15})f^{'''''}(x_0)h^5}{h} \tag{1.42}$$

La solución de este conciente es $-\frac{1}{30}f^{'''''}h^4$ por lo tanto, el orden mínimo de la discretización de $f^{'}$ es 4.

Ahora debemos demostrar que el orden de discretización calculado es máximo, para ello deberemos determinar que tipo sistema de ecuaciones es cada uno de los calculados previamente. Además de determinar el tipo de sistema resultante al añadir una ecuación más, o lo que es lo mismo añadir un grado a cada polinomio de Taylor calculado.

Para el apartado a:
La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible determinado es que los coeficientes que acompañan a las incógnitas no sean linealmente dependientes, por lo tanto la solución del sistema será una y única. La Regla de Cramer para sistemas cuadrados nos asegura que si el determinante de los coeficientes es distinto de 0, entonces el sistema será Compatible Determinado. El siguente determinante generado por los coeficientes de las incógnitas del sistema de ecuaciones calculado en el apartado 1.1.1 tiene solución 1. Por lo tanto podemos asegurar que el sistema de ecuaciones es Compatible Determinado.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{9}{2} \end{vmatrix} \tag{1.43}$$

Ahora comprobamos si añadiendo una ecuación (la correspondiente al siguiente orden del Polinomio de Taylor) más el sitema sigue siendo compatible determinado o no.

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \tag{1.44}$$
$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 1 \tag{1.45}$$
$$\frac{a_1}{2} + 2a_2 + \frac{9a_3}{2} = 0 \tag{1.46}$$
$$\frac{a_1}{6} + \frac{4a_2}{3} + \frac{9a_3}{2} = 0 \tag{1.47}$$
$$\frac{a_1}{24} + \frac{2a_2}{3} + \frac{27a_3}{8} = 0 \tag{1.48}$$
$$\tag{1.49}$$

Resolviendo este sistema por el Método de Gauss llegamos a que $0 = -\frac{1}{4}$ por lo tanto este sistema es Incompatible. Con este último paso queda demostrado que el orden de discretización calculado en el apartado 1.2.1 es máximo.

Para el apartado b:
Realizamos el mismo proceso, vamos determinando que tipo de sistema de ecuaciones es cada vez que introducimos una ecuación más en el sistema inicial, hasta hallar uno que sea Incompatible. El determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones inicial(1.50) es igual a 18.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 & -4 \end{vmatrix} \tag{1.50}$$

Por lo tanto, por la Reglar de Cramer el sistema es Compatible Determinado. A contnuación le añadiremos una ecuación más al sistema, para ello calculamos un orden más del Polinomio de Taylor de cada función.
Al añadirle la siguiente ecuación, obtenemos el mismo resultado calculado previamente, por lo que el sistema es Compatible Determinado.

$$\frac{b_1}{24} + \frac{b_{-1}}{24} + 2\frac{b_2}{3} + 2\frac{b_{-2}}{3} = 0 \tag{1.51}$$

De nuevo añadimos una ecuación al sistema, calculando un orden más del Polinomio de Taylor de cada función.

$$\frac{b_1}{120} - \frac{b_{-1}}{120} + 4\frac{b_2}{15} - 4\frac{b_{-2}}{15} = 0 \tag{1.52}$$

Resolviendo el sistema por Gauss obtenemos que $0 = \frac{1}{30}$ por lo tanto el Sistema es Incomptible y el resultado coincide con el calculado previamente en el apartado 1.2.2, quedando demostrado que el orden máximo de discretización es el calculado previamente.

Capítulo 2

Ejercicio 2

2.1. Gráficas y cálculo del error

2.1.1. Apartado b

Siendo la función azul la correspondiente a $h = 2^{-1}$
Siendo la función roja la correspondiente a $h = 2^{-2}$
Siendo la función amarilla la correspondiente a $h = 2^{-3}$
Siendo la función morada la correspondiente a $h = 2^{-4}$

Las gráficas de $(x, D_h^a f)$ para los distintos valores de h son:

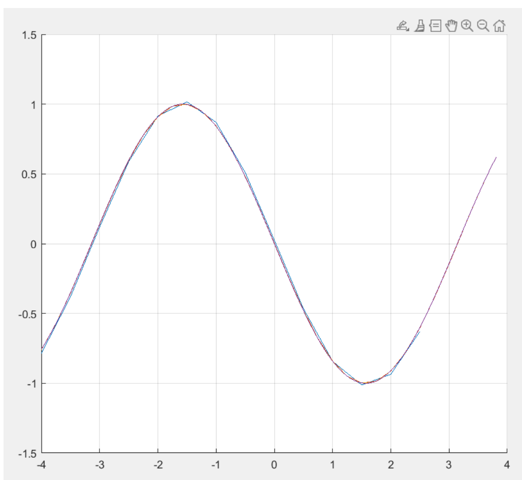

Figura 2.1:

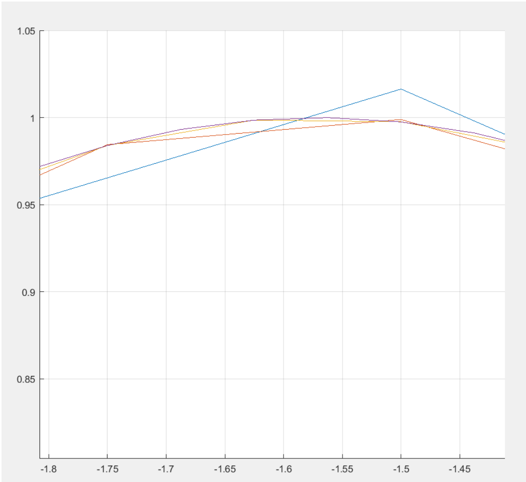

Figura 2.2:

Las gráficas de $(x, D_h^b f)$ para los distintos valores de h son:

Figura 2.3:

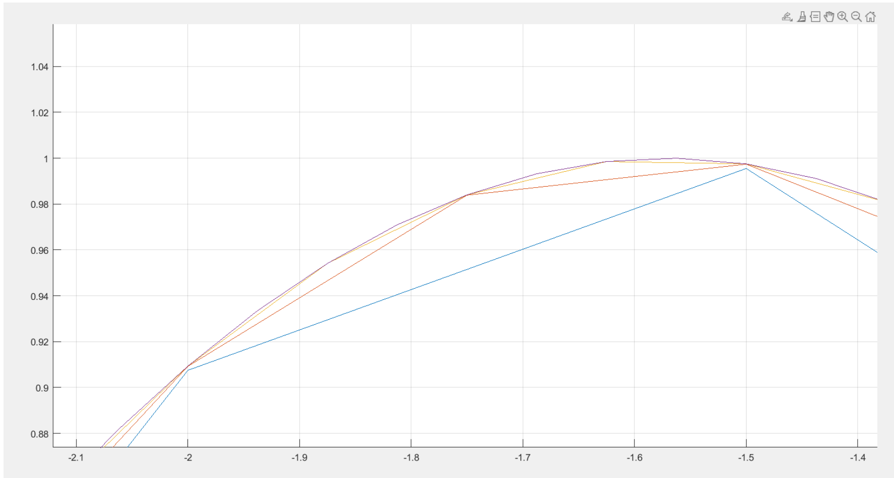

Figura 2.4:

2.1.2. Apartados c y d

Los errores de la discretización para los distintos valores de h utilizados, son el máximo de la diferencia (en valor absoluto) los valores de la derivada de la función y los valores calculados de $(x, D_h^a f)$ y $(x, D_h^b f)$.

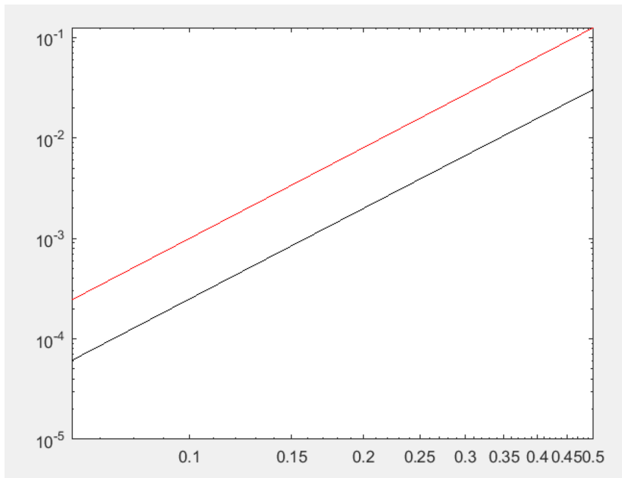

Figura 2.5: *Error de* $(x, D_h^a f)$

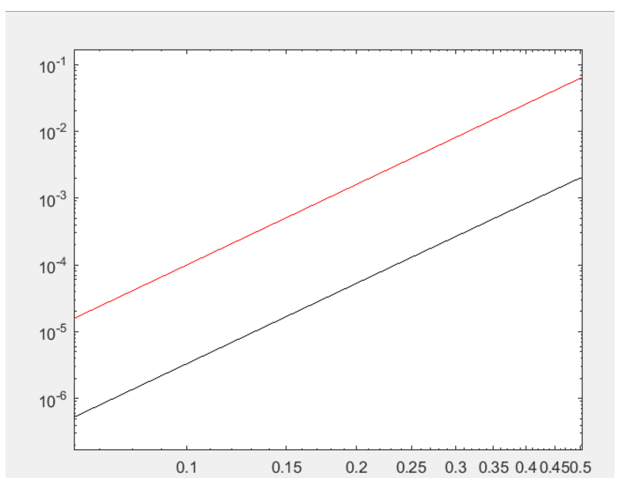

Figura 2.6: *Error de* $(x, D_h^b f)$

Discusión sobre la concordancia de los resultados obtenidos con los teóricos:

El resultado teórico del error de $(x, D_h^a f)$ era del orden de h^3y el de $(x, D_h^a f)$ era del orden de h^4.
En las figuras 2.5 y 2.6 el eje X corresponde a las distintas h y el eje Y al error calculado para cada valor del eje x. Al representar el error en escala logarítmica (aplicada a ambos ejes), cualquier función de la forma $y = x^n$ en escala logarítmica tendrá una forma lineal ya que:

$$log(y) = log(x^n) = nlog(x) \tag{2.1}$$

Por lo tanto si el eje y, $Y = log(y)$ y el eje x, $X = log(x)$ entonces $Y = nY$.
Concluyendo que si el error calculado con el programa concuerda con el teórico, la función del error en $(x, D_h^a f)$ tendrá que tener pendiente 3 ($n = 3$) y en $(x, D_h^b f)$ tendrá que tener pendiente 4 ($n = 4$).

Para comprobar que coinciden en la figura 2.5 se puede observar una recta negra correspondiente al error y una roja correspondiente a una recta de pendiente 3 al ser paralelas, podemos concluir que el resultado teórico y el error calculado concuerdan.
De manera análoga ocurre en la figura 2.6 pero siendo sendas rectas de pendiente 4.