Sviluppi Teorici e Applicativi delle Metriche Entropiche di Rohlin

Dawid Crivelli

26 Aprile 2012

Distanza di Rohlin

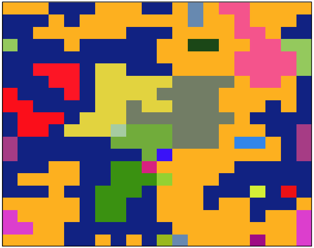
Distanza non tra configurazioni, ma tra **partizioni**

Requisiti:

- uno spazio di probabilità: $(\mathbf{M}, \mathcal{M}, \mu)$
- un criterio per partizionare (relazione di equivalenza)
- usiamo $\mathbf{M}$ discreto

Ogni sequenza, reticolo, grafo $=>$ array con relazioni non locali

da $\mathcal{C}(\mathbf{M})$ a $\mathcal{Z}(\mathbf{M})$



Complessità di una partizione

Partizione $\Longleftrightarrow$ scomposizione in **atomi** disgiunti di *misura* $\mu(A_k)$

Rappresentazione associando ad ogni sito un'etichetta (atomo):

$$\mathrm{A} = \{\underbrace{(1,2,3,4)}_{A_1}, \underbrace{(5,6)}_{A_2}, \underbrace{(7,8,9)}_{A_3}, \underbrace{(10,11,12,13)}_{A_4}\}$$

$$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

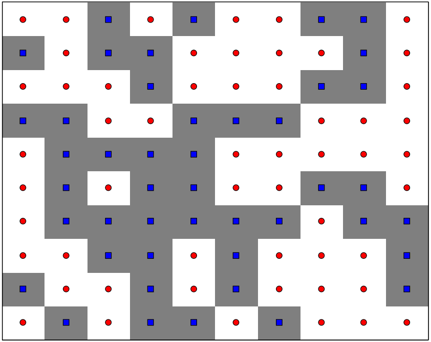
Entropia di Shannon: misura della complessità di una partizione

$$H(A) = \sum_k^n \mu(A_k) \log\left(\mu(A_k)\right)$$

H=log(n) (max) $\Leftrightarrow$ partizione con n atomi equivalenti
H=0 (min) $\Leftrightarrow$ partizione banale ν

Partizionamento

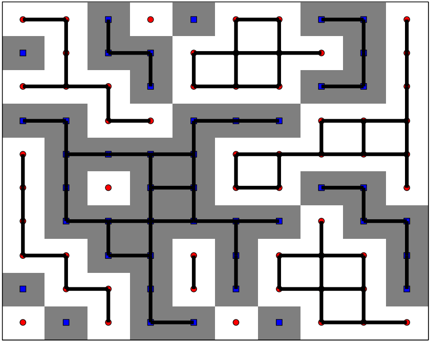
un partizione è una relazione di equivalenza, $i \sim j \iff i, j \in A_k$



relazione locale(tra vicini) $=>$ partizione globale
$=>$ colorazione di grafi, algoritmo Hoshen-Kopelman $\mathcal{O}(N \log(N))$

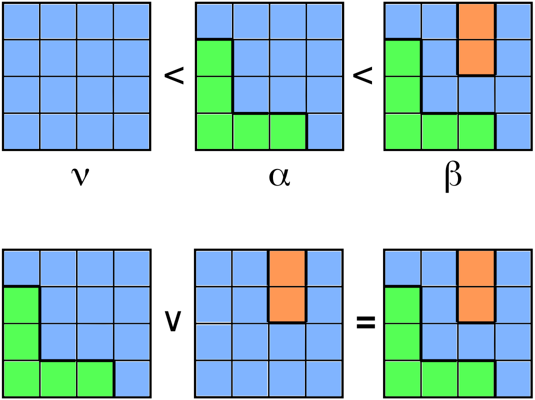
Partizionamento

un partizione è una relazione di equivalenza, $i \sim j \iff i, j \in A_k$



relazione locale(tra vicini) => partizione globale
=> colorazione di grafi, algoritmo Hoshen-Kopelman $\mathcal{O}(N \log(N))$

Ordinamento parziale e fattori



Ordinamento

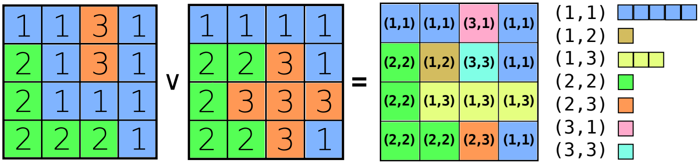
- α è **fattore** di β
- β è più fine di α
- $H(\alpha) < H(\beta)$

Prodotto

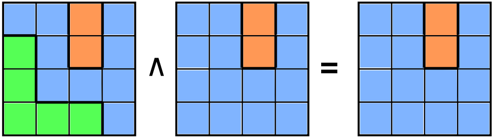
- proprietà associativa
- elemento neutro ν
- ogni partizione è prodotto di fattori
- "minimo comune fattore"

Prodotti tra partizioni

Partizione prodotto $\gamma = \alpha \vee \beta$, più fine: **unione** dei bordi



Partizione intersezione $\sigma = \alpha \wedge \beta$, meno fine: **intersezione** dei bordi

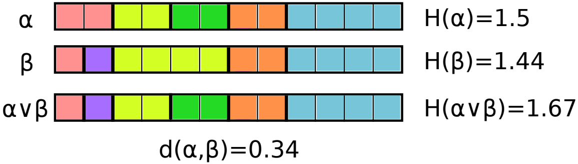


Distanza di Rohlin

Distanza tra partizioni, tramite l'entropia del prodotto:

$$d_R(\alpha, \beta) = 2\,H(\alpha \vee \beta) - H(\alpha) - H(\beta)$$

Partizioni simili hanno piccola distanza:



Funziona perché:

- prodotto idempotente $\alpha \vee \alpha = \alpha$
- l'entropia del prodotto è crescente $H(\alpha \vee \beta) \geq H(\alpha)$, $\forall \beta$

Distanza piccola per partizioni estramemente frammentate...

Riduzione e amplificazione della distanza

Ridurre le partizioni: eliminare il più possibile fattori comuni

Definiamo una mappa dalle partizioni alle ridotte

$$\alpha \otimes \beta \xrightarrow{\text{riduzione}} \hat{\alpha}(\alpha, \beta) \otimes \hat{\beta}(\alpha, \beta)$$

Algoritmo

- scomposizione delle due partizioni in fattori
- confronto dei fattori tra le due partizioni
- scelta e scarto
- ricomposizione di ciascuna

La distanza è sempre maggiore:

$$R = \frac{d_R(\hat{\alpha} \otimes \hat{\beta})}{d_R(\alpha \otimes \beta)} \geq 1$$

Confronto tra diverse riduzioni

Fattori lineari

- **solo** partizioni lineari connesse
- ottimale come riduzione
- semplicissimo da implementare

Fattori semplici

- ovunque applicabile
- oneroso computazionalmente
- peggiore nel caso lineare