

Sviluppi teorici e applicativi delle metriche entropiche di Rohlin

Dawid Crivelli

30 marzo 2012

Indice

1	Partizioni su insiemi	2
1.1	Generalità	2
1.2	Riduzione	5
1.2.1	Amplificazione	6
1.3	Possibili tipi di partizionamento	7
1.3.1	Sequenze lineari connesse	7
1.3.2	Sequenze non connesse	9
1.3.3	Sequenze su reticoli multidimensionali e grafi	9
1.3.4	Grafi arbitrari	11
2	Algoritmi	12
2.1	Partizioni connesse	12
2.2	Partizionamento generico	14
2.2.1	Struttura dei vicini	14
2.2.2	Partizionamento	16
2.2.3	Relabeling	17
2.2.4	Hashing	18
2.3	Operazioni tra partizioni generiche	19
2.3.1	Prodotto	19
2.3.2	Entropia	20
2.3.3	Differenza simmetrica	20
2.3.4	Intersezione	21
2.4	Riduzione	22
2.4.1	Confronto con l'intersezione	22
2.4.2	Confronto diretto	23

Capitolo 1

Partizioni su insiemi

Definiamo in questo capitolo alcuni concetti fondamentali: le partizioni su un insieme, il significato di entropia, lo spazio delle partizioni con le operazioni binarie associate e una distanza tra partizioni. Studiamo le proprietà di questa distanza e come amplificarla. Diamo infine qualche esempio sui possibili tipi di partizioni che si possono incontrare su un insieme discreto.

1.1 Generalità

Introduciamo il formalismo e risultati generali per spazi di partizioni e metriche di Rohlin, seguendo l'approccio in [billingsley, casartelli-vivo]. Sia $(\mathbf{M}, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di probabilità, ovvero un insieme \mathbf{M} , una σ -algebra \mathcal{M} di sottoinsiemi di \mathbf{M} , una misura normalizzata μ su \mathcal{M} . Nei casi trattati \mathbf{M} può essere una sequenza di simboli, un reticolo bidimensionale, un grafo arbitrario.

Introducendo una relazione di equivalenza su \mathbf{M} , possiamo definire una particolare classe di sottoinsiemi. Una *partizione* di \mathbf{M} è una collezione finita $\alpha \equiv (A_1, A_2, \dots, A_N)$ di sottoinsiemi disgiunti misurabili che ricoprono \mathbf{M} , cioè $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\bigcup_k A_k = \mathbf{M}$. Gli $\{A_k\}$ sono chiamati *atomi* di α e sono una rappresentazione delle classi di equivalenza degli elementi di \mathbf{M} . L'insieme di tutte le partizioni misurabili è denotato con $\mathcal{Z} \equiv \mathcal{Z}(\mathbf{M})$. La partizione unitaria ν consiste del singolo atomo coincidente con \mathbf{M} . È possibile introdurre un ordine parziale su \mathcal{Z} , con la relazione $\alpha \leq \beta$ quando β è un raffinamento di α : questo accade quando ogni atomo A_k è esattamente composto da atomi di β , cioè $A_k = \{\bigcup_j B_j \mid B_j \in \beta\}$. In questo caso, si dice che α è un *fattore* di β . La partizione banale $\nu \leq \alpha$, $\forall \alpha$.

I termini come *unità* e *fattore* dipendono dalla definizione di uno pseudo-prodotto commutativo ed associativo, la composizione $\gamma = \alpha \vee \beta$ (o anche $\gamma = \alpha\beta$ ove non vi sia ambiguità). Il *prodotto* è la partizione meno fine di tutte le partizioni con $\gamma \geq \alpha$ e $\gamma \geq \beta$, i cui atomi sono le intersezioni non vuote di tutti gli atomi di α e β . Chiaramente il prodotto con l'unità si comporta come l'identità del prodotto, con $\alpha\nu = \alpha$ per ogni α , mentre $\alpha\eta = \alpha$ quando $\eta \leq \alpha$. Queste proprietà rendono il risultato della composizione una specie di “minimo comune multiplo”. Dalla definizione segue anche che $\alpha \vee \alpha = \alpha$, ovvero il prodotto è idempotente.

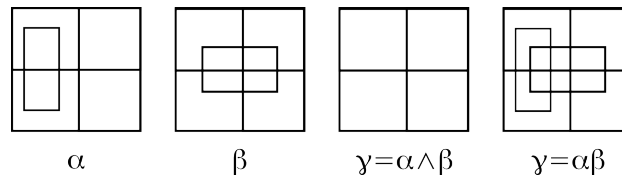


Figura 1.1.1: Esempio di prodotto e intersezione tra due partizioni

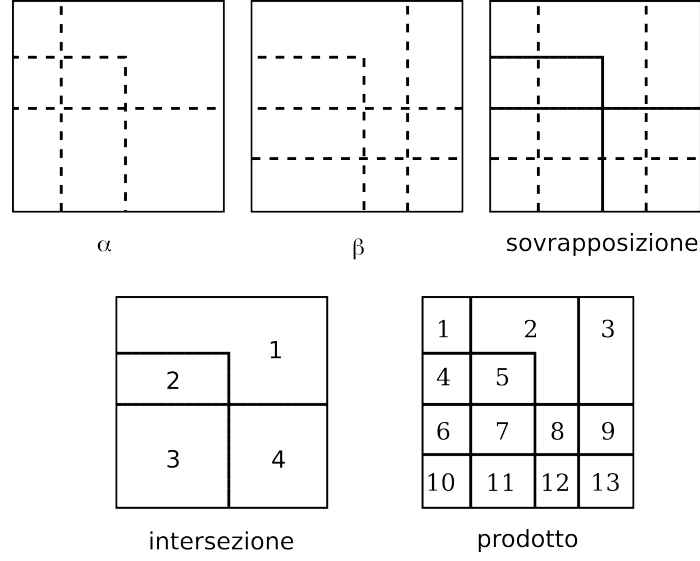


Figura 1.1.2: Intersezione e prodotto come operazioni sui bordi. Le partizioni α e β hanno bordi tratteggiati, con fase complementare, che danno l'impressione di linea continua quando sovrapposti. È evidente in questo modo il tratto di bordi in comune. Gli atomi sono stati numerati per rendere evidente la differenza tra le due operazioni.

L'operazione complementare che implementa un “massimo comune divisore” nello spazio delle partizioni è l'*intersezione* $\sigma = \alpha \wedge \beta$, definita come la partizione più fine tale che $\sigma \leq \alpha$ e $\sigma \leq \beta$. In questo caso, $\alpha \wedge \nu = \nu$ per ogni α , mentre $\alpha \wedge \beta = \nu$ implica che α e β sono *relativamente primi*, cioè non hanno un fattore comune.

Un altro modo di calcolare e visualizzare le operazioni è in termini di *bordi interni* di atomi della partizione, come si vede in figura 1.1.2. Il prodotto $\alpha \vee \beta$ corrisponde alla partizione avente come bordi l'unione dei bordi di α e β , mentre l'intersezione $\alpha \wedge \beta$ ha come bordi l'intersezione di quelli di α e β . Quando nell'intersezione i bordi non si chiudono, sono cancellati dal risultato e gli atomi raggruppati. Poiché la partizione banale non ha bordi tra atomi, si ricavano immediatamente le sue proprietà nel prodotto e nell'intersezione.

Una partizione può rappresentare un esperimento probabilistico con risultati disgiunti A_1, \dots, A_N , dove l'evento *atomico* A_k ha probabilità $\mu(A_k)$. Un *fattore* è quindi un sottoesperimento dell'esperimento più fine, che raggruppa diversi risultati come equivalenti: ad esempio, “pari o dispari” è un sottoesperimento con due atomi, dell'esperimento $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ del lancio di un dado.

Sullo spazio \mathcal{Z} possiamo definire dei funzionali *entropia* $H : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definiti su ogni partizione. In particolare l'*entropia di Shannon*

$$H_S(\alpha) = - \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \ln \mu(A_i) \quad (1.1.1)$$

L'entropia di Shannon è una misura dell'informazione media ottenuta dall'esperimento. Si vede immediatamente che la partizione banale ν , non codificando alcuna informazione ha entropia nulla. Se $\beta = (B_1, \dots, B_n)$ è un'altra partizione, l'entropia condizionata di α rispetto a β è

$$H_S(\alpha|\beta) = - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \mu(A_i \cap B_k) \ln \frac{\mu(A_i \cap B_k)}{\mu(B_k)} = H_S(\alpha \vee \beta) - H_S(\beta) \quad (1.1.2)$$

dove si prende per convenzione che $x \ln x = 0$ se $x = 0$. L'entropia condizionata è l'informazione media residua ottenuta da α quando il risultato per β è noto. Si noti che l'entropia di Shannon dipende solo dalla distribuzione delle misure degli atomi,

non dalla loro natura o “forma”, che potrebbe non avere significato in spazi astratti. Le mutue relazioni tra atomi (e possibilmente le loro forme) al contrario influenzano direttamente l'entropia condizionale.

Definiamo una metrica sullo spazio delle partizioni $\mathcal{Z}(\mathbf{M})$ tramite la distanza di Rohlin d_R

$$d_R = H(\alpha|\beta) + H(\beta|\alpha)$$

che misura la complessiva non-similarità tra le partizioni α e β . È possibile dare una definizione alternativa di questa distanza, sfruttando la seconda scrittura della probabilità condizionale, riscrivendo d_R come

$$d_R = 2H(\alpha \vee \beta) - H(\alpha) - H(\beta) \quad (1.1.3)$$

La simmetria $d_R(\alpha, \beta) = d_R(\beta, \alpha)$, la positività e la condizione $d_R(\alpha, \alpha) = 0$ sono manifeste, mentre la disuguaglianza triangolare è soddisfatta se H soddisfa alle condizioni di un funzionale entropia.

Se \mathbf{M} è finito, una *configurazione* o *stato* a su \mathbf{M} è una funzione che assegna ad ogni punto $x_i \in \mathbf{M}$ un valore $a_i = f(x_i)$ nell'alfabeto \mathbb{K} . Tutte le possibili configurazioni formano uno spazio $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}(\mathbf{M})$. Su \mathcal{C} la distanza di Hamming è definita come

$$d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathcal{N} \sum_i \rho(a_i, b_i)$$

dove $\rho(a_i, b_i)$ è una distanza su \mathbb{K} e \mathcal{N} una possibile costante di rinormalizzazione, che noi porremo uguale a 1. Da notare come questa misura operi tra elementi diversi dalla misura di Rohlin, pur partendo sempre da \mathbf{M} .

Entropia topologica

Oltre all'entropia di Shannon, definita tramite la misura μ , è possibile una definizione alternativa che non ve ne fa ricorso. Per questo motivo, è chiamata *entropia topologica*. Dato uno spazio compatto, come lo spazio \mathbf{M}^1 da noi considerato, il teorema di Heine-Borel assicura che esiste sempre un ricoprimento finito tramite insiemi aperti. In particolare, $\exists \delta \in \mathbb{N}^+$ numero minimo di aperti con cui generare tale ricoprimento. La partizione di uno spazio è ricoprimento *minimale*², motivo per cui il numero di atomi della partizione satura la disuguaglianza del teorema, $\delta = n$. Una volta stabilito l'esistenza di δ e avendone calcolato il risultato, poniamo l'entropia topologica pari al logaritmo naturale di δ

$$H_T(\alpha) = \ln(\delta) = \ln(n) \quad (1.1.4)$$

Nei casi in cui non vi sia una naturale metrica sullo spazio \mathbf{M} , la definizione topologica può essere utile per cercare una misura più intrinseca dell'informazione contenuta nella partizione. Tuttavia, non esiste una definizione di entropia condizionale per H_T e per definire la distanza di Rohlin utilizziamo la sua definizione in termini di prodotto tra partizioni.

Si vede come H_T è un buon funzionale entropia, infatti se $\alpha < \beta$, allora $H_T(\alpha) < H_T(\beta)$, in quanto una partizione strettamente più fine ha banalmente un numero maggiore di atomi. Da questa condizione si ha che per il prodotto

$$\alpha \vee \beta \geq \alpha \implies H_T(\alpha \vee \beta) \geq H_T(\alpha)$$

per α, β generici e la distanza di Rohlin risulta definita positiva.

¹Addirittura \mathbf{M} nel nostro caso è discreto, per cui la compattezza è equivalente all'essere finito.

²Nulla vieta di avere altri ricoprimenti perfettamente ridondanti, ma sempre con un numero finito di aperti

1.2 Riduzione

L'essenziale dissimilarità tra due partizioni potrebbe essere confusa ed indebolita dalla presenza di un fattore comune ampio, come ad esempio accade se gli atomi della partizione hanno lunghezza media molto breve, nel qual caso la maggioranza dei confini risulta essere la stessa. Si cerca quindi di eliminare fattori comuni il più possibile, con una *riduzione* che ci si aspetta aumenti la distanza relativa. Tuttavia questa operazione, analoga alla riduzione in minimi termini per frazioni, non è unicamente definita, in quanto le partizioni, a differenza degli interi, non ammettono una univoca fattorizzazione in fattori primi. Il ruolo dei fattori primi (ovvero fattori irriducibili) è giocato dalle sottopartizioni *dicotomiche*, che sono tuttavia ancora estremamente ridondanti ($2^{n-1} - 1$ per partizioni con n atomi).

A partire dalla partizione $\alpha \equiv (A_1, \dots, A_n)$, definiamo quindi una famiglia ristretta $\mathbf{E}(\alpha)$ di *fattori dicotomici elementari* $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$ con le seguenti caratteristiche:

1. $\mathbf{E}(\alpha)$ deve essere ben definita per ogni $\alpha \in \mathcal{Z}$
2. $\mathbf{E}(\alpha)$ non deve contenere più di n (il numero di atomi in α) fattori elementari
3. $\bigvee_{k=1}^n \tilde{\alpha}_k = \alpha$

Una scelta universale consiste nel prendere come fattori dicotomici $\tilde{\alpha}_k \equiv (A_k, A_k^c)$ le partizioni formate dai singoli atomi e dai loro complementi in \mathbf{M} . Fattori di questo tipo sono chiamati *universali semplici*.

Una volta che per due partizioni α e β le famiglie di fattori dicotomici $\mathbf{E}(\alpha)$ e $\mathbf{E}(\beta)$ sono state definite, abbiamo diversi possibili processi di riduzione.

Definizione 1. Riduzione tramite partizione comune

1. Si definisce il massimo fattore comune $\sigma = \alpha \wedge \beta$
2. Si tralasciano da $\mathbf{E}(\alpha)$ e $\mathbf{E}(\beta)$ i fattori che **non** sono relativamente primi con σ , e indichiamo i fattori rimanenti come $\hat{\alpha}_k$ e $\hat{\beta}_k$ rispettivamente. Questo vuol dire che $\hat{\alpha}_k \wedge \sigma = \hat{\beta}_j \wedge \sigma = \nu$.

Definizione 2. Riduzione con eliminazione atomi in comune

1. Si tralasciano da $\mathbf{E}(\alpha)$ e $\mathbf{E}(\beta)$ i fattori che compaiono in entrambe le partizioni. Se indichiamo i fattori rimanenti come $\hat{\alpha}_k$ e $\hat{\beta}_k$ rispettivamente, questo vuol dire che $\forall A_k, \nexists B_j \in \beta | A_k = B_j$ e viceversa.

Definizione 3. Riduzione con eliminazione fattori simili

1. Si tralasciano da $\mathbf{E}(\alpha)$ e $\mathbf{E}(\beta)$ i fattori che hanno un corrispondente “simile” nell'altra partizione. Questo vuol dire che scartiamo da $\hat{\alpha}$ il fattore

$$A_k \text{ se } \exists B_j \in \beta, \text{ tale che } \mu(A_k \triangle B_j) \leq \epsilon$$

e viceversa da $\hat{\beta}$ il fattore

$$\beta_k \text{ se } \exists A_j \in \alpha, \text{ tale che } \mu(B_k \triangle A_j) \leq \epsilon$$

Il simbolo $A_k \triangle B_j$ indica la differenza simmetrica tra i due atomi, ovvero i siti che appartengono ad un atomo ma non all'altro.

Alla fine, per tutti i tipi di riduzione, definiamo le partizioni ridotte come $\hat{\alpha} = \bigvee_k \hat{\alpha}_k$ e $\hat{\beta} = \bigvee_k \hat{\beta}_k$, ovvero il prodotto dei fattori dicotomici “sopravvissuti”. Nel capitolo sugli algoritmi presenteremo metodi ottimali per il calcolo dei fattori dicotomici per ogni criterio presentato, che presentano una notevole complessità se eseguiti nel modo naïve.

Per il resto della sezione concentreremo la nostra attenzione sulla riduzione tramite fattore comune massimo. Si motiva la scelta del confronto con il fattore comune poichè vi sono casi in cui le partizioni non hanno atomi in comune, ma ciononostante si ha che $\sigma \neq \nu$. Questo accade, per esempio, quando $\alpha < \beta$ strettamente e non vi sono fattori comuni elementari. In questo caso allora $\sigma = \alpha$ e $\hat{\alpha} = \nu$ con questo metodo di riduzione, mentre $\hat{\alpha} = \alpha$ tralasciando i fattori comuni. Può capitare inoltre che anche se le partizioni sono già ridotte, non sono prime tra di loro. In particolare, $H(\sigma)$ è una misura di similarità tra le partizioni.

Osservazione La mappa simmetrica definita dalla distanza tra sequenze ridotte

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto d_R(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \end{aligned}$$

non definisce una distanza su \mathcal{Z} . Infatti il passaggio $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ dipende strettamente da β e viceversa, non è quindi possibile scrivere

$$d_R(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \hat{d}_R(\alpha, \beta)$$

con \hat{d}_R una distanza.

1.2.1 Amplificazione

Il processo di riduzione porta alla definizione di partizioni con complessità possibilmente inferiore, ovvero $H(\hat{\alpha}) \leq H(\alpha)$. Questo va nel verso opposto quando si considera l'effetto sulla distanza, che invece aumenta.

Il rapporto di *amplificazione* R misura quanto la riduzione ha messo in risalto la differenza tra partizioni. Ne dimostriamo la caratteristica fondamentale:

$$R = \frac{d_R(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{d_R(\alpha, \beta)} \geq 1$$

Proposizione. $d_R(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \geq d_R(\alpha, \beta)$

Dimostrazione. Ricordando che $\sigma = \alpha \wedge \beta$ possiamo scrivere $\alpha = \sigma \hat{\alpha}$ e $\beta = \sigma \hat{\beta}$: infatti σ contiene tutti i fattori tralasciati durante la riduzione. Utilizzando ora l'idempotenza del prodotto, $\sigma = \sigma \sigma$, possiamo riscrivere la tesi utilizzando l'equazione (1.1.3)

$$2H(\sigma \hat{\alpha} \hat{\beta}) - H(\sigma \hat{\alpha}) - H(\sigma \hat{\beta}) \leq 2H(\hat{\alpha} \hat{\beta}) - H(\hat{\alpha}) - H(\hat{\beta})$$

scambiando l'ordine dei termini si ottiene

$$2H(\sigma \hat{\alpha} \hat{\beta}) - 2H(\hat{\alpha} \hat{\beta}) \leq H(\sigma \hat{\alpha}) - H(\hat{\alpha}) + H(\sigma \hat{\beta}) - H(\hat{\beta})$$

e sfruttando la formula (1.1.2) per l'entropia condizionata, la tesi si riduce a

$$2H(\sigma|\hat{\alpha}\hat{\beta}) \leq H(\sigma|\hat{\alpha}) + H(\sigma|\hat{\beta})$$

ma questo è chiaramente vero, in quanto

$$H(\sigma|\hat{\alpha}\hat{\beta}) \leq H(\sigma|\hat{\alpha}) \quad \text{e} \quad H(\sigma|\hat{\alpha}\hat{\beta}) \leq H(\sigma|\hat{\beta})$$

per le proprietà dell'entropia, poichè il termine condizionante è sicuramente maggiore, ovvero

$$\hat{\alpha}\hat{\beta} \geq \hat{\alpha} \quad \text{e} \quad \hat{\alpha}\hat{\beta} \geq \hat{\beta}$$

□

Da notare che la dimostrazione vale per la distanza di Rohlin definita sia tramite H_S che H_T .

Risulta importante la scelta della famiglia di fattori dicotomici $\mathbf{E}(\alpha)$, che è dettata dalla topologia e geometria dello spazio delle configurazioni. La scelta della famiglia di fattori dicotomici universali semplici è sempre possibile, poichè la determinazione di A_k^c a partire da A_k è un'operazione ben definita in qualunque spazio topologico. Prendere come fattori elementari la parte interna di contorni di cluster ad esempio, richiede un concetto di orientabilità e la possibilità di definire contorni, ovvero insiemi con codimensione 1 su varietà – mentre vorremmo estendere l'analisi anche a grafi generici, privi di strutture geometriche predefinite. Già nel caso lineare è possibile prendere fattori dicotomici diversi e algoritmicamente più performanti, a patto di restringere lo studio alle partizioni con atomi formati da cluster connessi.

1.3 Possibili tipi di partizionamento

L'applicabilità dei metodi discussi è assolutamente generica, estendibile a qualunque spazio di probabilità finito si voglia considerare, vediamo dunque di dare esempi dei possibili spazi \mathbf{M} su cui abbiamo lavorato, con i relativi fattori dicotomici e conseguenze computazionali.

Essendo lo studio svolto su calcolatore, lo spazio \mathbf{M} e la sua σ -algebra sono finiti e discreti. I siti appartenenti ad \mathbf{M} possono essere sempre numerati ordinati in modo opportuno $x_i, i \in \{1, \dots, L\}$, dove L è il numero totale di siti, che si tratti di un reticolo o di un grafo. Poichè la partizione induce una relazione di equivalenza sull'insieme \mathbf{M} , indichiamo che due siti sono equivalenti se appartengono allo stesso atomo

$$i \sim j \iff \exists A_k \text{ tale che } i \in A_k, j \in A_k$$

Per partizionare i siti in atomi disgiunti, richiediamo che la *configurazione* (o *stato*) \mathcal{C} , associ ad ogni sito una lettera dell'alfabeto \mathbb{K} , considerato finito, $|\mathbb{K}| < \infty$. Il simbolo associato al sito i -esimo, non essendovi ambiguità, sarà d'ora in poi indicato con $f(i)$. Se lo stato del sistema è descritto con variabili continue (o vi è un numero enorme di possibili lettere nell'alfabeto, si pensi ad una variabile a 64 bit rappresentante un numero reale), si può sempre ridurre l'alfabeto ad un insieme $\{k_j\}$ discretizzando i valori della configurazione con il criterio:

$$f(i) := \bar{k} \quad \text{tale che} \quad |f(i) - \bar{k}| = \min_{k_j \in \mathbb{K}} |f(i) - k_j|$$

oppure mettendo nello stesso atomo siti vicini che hanno valori distanti meno di ϵ :

$$i \sim j \iff |f(i) - f(j)| \leq \epsilon$$

1.3.1 Sequenze lineari connesse

Consideriamo sequenze lunghe L , provenienti da due casi:

- Problemi di meccanica statistica, in cui la configurazione è una variabile aleatoria, generata algoritmicamente da una catena di Markov in base al modello di Ising monodimensionale, nel qual caso l'alfabeto corrisponde a $\{-1, +1\}$.
- Sequenze di origine biologica, in particolare sequenze di amminoacidi (proteine), in cui $|\mathbb{K}| = 22$.

Lo studio delle sequenze è solitamente svolto con la distanza di Hamming d_H che tuttavia è molto sensibile a variazioni puntuali dei valori in \mathcal{C} . I siti che compongono la sequenza non si influenzano, una variazione su un sito può solo variare di $\{-1, 0, +1\}$ la distanza totale.

Ad ogni configurazione possiamo associare una partizione in \mathcal{Z} , in cui gli atomi sono formati dai cluster, cioè sottoinsiemi connessi di \mathbf{M} a valori omogenei in \mathbb{K} . Questo stabilisce una mappa $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Z}$ da ogni configurazione ad una partizione corrispondente, rendendo possibile il confronto tra $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ in \mathcal{C} e $d_R(\alpha, \beta)$ in \mathcal{Z} , dove $\alpha = \Phi(\mathbf{a})$ e $\beta = \Phi(\mathbf{b})$. La relazione è chiaramente del tipo multi-a-uno, infatti assegnando ad un segmento di lettere omogeneo in \mathcal{C} un diverso simbolo, non cambia la partizione corrispondente. In simboli, esprimiamo la relazione come

$$i \sim j \iff j = i + 1, f(i) = f(j)$$

È evidente quindi che variazioni locali, ad esempio il cambiamento di un singolo simbolo, possono non modificare affatto la partizione

$$\{\dots, T, T, C, A, A, \dots\} \stackrel{\Phi}{\equiv} \{\dots, T, T, M, A, A, \dots\}$$

che presenta sì una perdita di informazione, ma permette quindi anche di filtrare molto “rumore” e si è dimostrata una ottima scelta nel caso biologico e una necessità nello studio di sequenze di Ising – la hamiltoniana del sistema non distingue i valori associati ai singoli siti, ma solo differenze tra siti vicini. La suddivisione in partizioni si comporta nello stesso modo, estraendo quindi solo informazioni fisicamente rilevanti.

Esempio. Supponiamo di aver partizionato una stringa come $\{A, A, A, B, B, C, C, D, D, D\}$ o $\{+, +, +, -, -, +, +, -, -, -\}$, aventi la stessa partizione

$$\alpha = \{(1, 2, 3), (4, 5), (6, 7), (8, 9, 10)\}$$

il calcolo esplicito dell'entropia è il seguente:

$$\begin{array}{ll} A_1 = (1, 2, 3) & \mu(A_1) = \frac{3}{10} \\ A_2 = (4, 5) & \mu(A_2) = \frac{2}{10} \\ A_3 = (6, 7) & \mu(A_3) = \frac{2}{10} \\ A_4 = (8, 9, 10) & \mu(A_4) = \frac{3}{10} \end{array}$$

Ora, $H_S(\alpha) = -2(0.3) \ln(0.3) - 2(0.2) \ln(0.2) \simeq 1.36$, mentre $H_T(\alpha) = \ln(4) \simeq 1.38$. Come si vede i valori sono abbastanza simili.

Fattori dicotomici nel caso lineare connesso

Per una partizione $\alpha \equiv (A_1, \dots, A_n)$, definiamo i fattori dicotomici $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n \in \mathbf{E}(\alpha)$ nel modo seguente:

$$\tilde{\alpha}_k = \left\{ \bigcup_{j=1}^k A_j, \bigcup_{j=k+1}^n A_j \right\}$$

dove ricordiamo che n è il numero di atomi. In termini di siti quindi, il fattore dicotomico k -esimo corrisponde alla partizione con tutti i siti corrispondenti ai primi k atomi presi insieme, ed il complementare corrispondente ai siti a partire dall'atomo $(k+1)$ -esimo fino ad L , come mostrato in figura 1.3.1.

Con questa particolare scelta, resa possibile dalla topologia connessa e ordinata, poichè abbiamo l'ordine ereditato da \mathbb{N} , il processo di riduzione è estremamente semplificato ed efficiente. Partendo da una partizione α , la partizione ridotta $\hat{\alpha}$ è quella in cui sono stati rimossi i bordi in comune tra α e σ , come si vede in figura 1.3.2

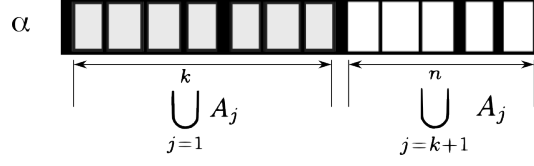


Figura 1.3.1: Fattori dicotomici lineari

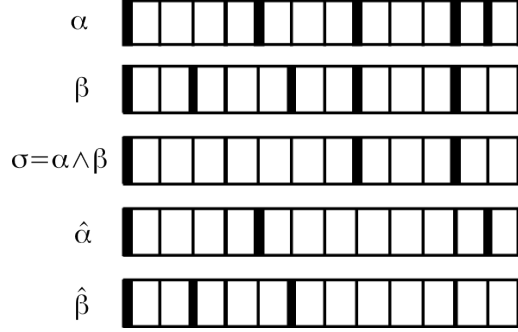


Figura 1.3.2: Riduzione nel caso di sequenze lineari. La riga spessa indica la separazione tra atomi. Si nota come i bordi della partizione comune siano quelli comuni sia ad α che a β , mentre nelle partizioni ridotte non compaiono più i bordi esistenti anche in σ

1.3.2 Sequenze non connesse

Lo studio delle sequenze biologiche, in cui vi è una notevole frammentazione, dovuta alla bassa probabilità di avere molti simboli consecutivi uguali, ha motivato la ricerca di diversi criteri di partizionamento. Il più semplice è considerare come appartenenti allo stesso atomo siti con lo stesso simbolo, non adiacenti ma con la possibilità di saltare al massimo n_s siti in avanti

$$i \sim j \iff |j - i| \leq n_s, f(i) = f(j)$$

In questo caso, la topologia nello spazio \mathcal{Z} non è più connessa, per cui l'utilizzo dei fattori dicotomici lineari non è possibile. Un'alternativa è quella di prendere per l'atomo $A_k = \{n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_n}\}$ una partizione dicotomica costituita da tutti i siti tra il primo e l'ultimo appartenente a A_k e dal complementare, sconnesso, A_k^c

$$\hat{\alpha}_k = \left\{ \bigcup_{i=n_{k_1}}^{n_{k_n}} n_i, \left(\bigcup_{i < n_{k_1}} n_i \right) \cup \left(\bigcup_{i > n_{k_n}} n_i \right) \right\}$$

Dati gli scarsi vantaggi di questo approccio, si è scelto tuttavia anche in questo caso di utilizzare i *fattori universali semplici*. Una volta venuta a meno la connessione degli atomi, questo tipo di partizionamento presenta le complessità e caratteristiche di un criterio arbitrario su grafo generico – si veda il prossimo paragrafo per le illustrazioni delle operazioni tra partizioni di questo tipo.

1.3.3 Sequenze su reticoli multidimensionali e grafi

In questo caso, si considera le partizioni in cui fanno parte dello stesso atomo siti con lo stesso simbolo, ma con il vincolo che devono essere *primi vicini* sul reticolo

$$i \sim j \iff d(i, j) = 1, f(i) = f(j)$$

dove la distanza indica il numero di passi sul reticolo. Possiamo tuttavia generalizzare arbitrariamente la condizione di vicinanza, per includere secondi vicini, siti con lo stesso simbolo arbitrariamente posti, ecc.

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Figura 1.3.3: Mappa in memoria di un reticolo bidimensionale. In grigio e bianco sono evidenziati i valori dalla configurazione, mentre i numeri nell'angolo rappresentano l'ordine dei siti.

1	1	3
2	4	3
2	2	4

1	1	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

$\bar{3}$	$\bar{3}$	3
$\bar{3}$	$\bar{3}$	3
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$

$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
2	$\bar{2}$	$\bar{2}$
2	2	$\bar{2}$

$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	4	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	4

Figura 1.3.4: Partizione con 4 atomi e i 4 fattori dicotomici universali semplici corrispondenti. I numeri indicano l'etichetta corrispondente ad ogni atomo, scelto arbitrariamente.

Illustriamo le possibili operazioni con un reticolo bidimensionale, che tuttavia generalizza immediatamente al grafo arbitrario. In particolare numeriamo anche in questo caso i siti, cosa necessaria per mappare nella memoria di un computer la configurazione. La mappatura in memoria (figura 1.3.3) comporta necessariamente la disposizione di siti “vicini” sul reticolo su posizioni in cui non risultano più contigue in memoria³. Nel caso della figura la partizione corrispondente è

$$A = \{(1, 4, 5, 6, 8, 9), (2, 4), (7)\}$$

evidentemente non-connessa. In questo caso i fattori dicotomici anche risultano sconnessi, come nell'esempio di un reticolo 3x3 in figura 1.3.4, in cui si è preso come atomi i siti con lo stesso valore indipendentemente dalla loro posizione.

Nel caso in cui gli atomi sconnessi il prodotto tra partizioni rimane banale da implementare mentre l'intersezione è estremamente complicata – un'implementazione ottimale è data nel capitolo sugli algoritmi.

³Ricordiamo la convenzione “per colonne” di rappresentazione di una matrice bidimensionale nella maggior parte dei linguaggi di programmazione, a partire dal Fortran in poi

1.3.4 Grafi arbitrari

L'insieme dei siti in questo caso è sempre ordinabile con $i \in \{1, \dots, L\}$. Definiamo la *matrice di adiacenza* A_{ij}

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se i siti sono connessi} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che ci permette di dare la relazione di equivalenza come

$$i \sim j \iff A(i, j) = 1, f(i) = f(j)$$

In questo modo ci si slega completamente da qualunque nozione di vicinanza geometrica. In linea di principio, è possibile rimuovere anche la condizione $f(i) = f(j)$, e lasciare alla matrice di adiacenza l'implementazione della relazione di equivalenza. Non vi sono condizioni da porre su A_{ij} , qualunque scelta è accettabile e va a modificare il partizionamento, senza che questo risulti mai incoerente.

Capitolo 2

Algoritmi

Dopo aver visto i possibili tipi di partizione, mostriamo come calcolare qualunque quantità richiesta in modo ottimale. Definiamo prima le operazioni limitate a partizioni con atomi connessi, sia per la loro minore complessità, sia perché nel caso generico si sfrutta la riduzione al caso più semplice già trattato.

2.1 Partizioni connesse

Nel caso monodimensionale è sufficiente identificare il *bordo sinistro* di ogni atomo, per ricostruire completamente la partizione. Partendo da una sequenza in un array (o segmento unidimensionale finito) $S[i]$ lungo L , definiamo l'array binario della partizione $B[i]$, lungo L , con indici che vanno da 0 a $L-1$

$$B[i] = \begin{cases} 1 & \text{il sito } i \text{ identifica un nuovo atomo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

algoritmicamente si procede in due step:

1. il primo sito sicuramente inizia un atomo, quindi $B[0]=1$;
2. iterando su i , poniamo $B[i] = (S[i] \neq S[i-1])$; infatti un nuovo atomo corrisponde ad un valore della sequenza *diverso* dal precedente

Ogni partizione espressa in termini binari ha sempre 1 come primo elemento.

Facendo un esempio, ad una stringa possiamo semplicemente far corrispondere l'array binario corrispondente

```
S=AAAABBBAAAACCCDDDD
B=100010010001001000
```

Avendo un array che indica esattamente dove si trovano i bordi dei vari atomi, le operazioni di intersezione e prodotto sono immediate. Il prodotto corrisponde alla partizione che contiene i bordi di entrambe le partizioni (OR binario); l'intersezione ha un bordo quando compare contemporaneamente nelle due partizioni (AND binario); il prodotto ridotto contiene invece ogni bordo di una e una sola delle partizioni (XOR binario) – se il bordo appartiene ad entrambe, appartiene al fattore comune, che è stato ridotto.

In tabella 2.1 sono mostrate tutte le sequenze generabili a partire da due partizioni binarie A e B , con le rispettive entropie, che adesso mostriamo come calcolare.

Vettore	Risultato	Codice C	H_S	H_T
α	101100011001101101	$A[] = \{1, 0, 1, 1, \dots\};$	2.16	2.30
β	100010010011001000	$B[] = \{1, 0, 0, 0, \dots\};$	1.73	1.79
$\sigma = \alpha \wedge \beta$	100000010001001000	$C[i] = A[i] \ \& \ B[i];$	1.33	1.39
$\alpha \vee \beta$	101110011011101101	$P[i] = A[i] \ \ B[i];$	2.40	2.49
$\hat{\alpha} \vee \hat{\beta}$	101110001010100101	$Prid[i] = A[i] \ \wedge \ B[i];$	2.09	2.19
$\hat{\alpha}$	101100001000100101	$Arid[i] = A[i] \ \wedge \ C[i];$	1.80	1.94
$\hat{\beta}$	100010000010000000	$Brid[i] = B[i] \ \wedge \ C[i];$	1.06	1.09

Tabella 2.1: Rappresentazione delle operazioni a partire da partizioni binarie. In rosso gli elementi riconducibili a partizioni di α , in blu quelli dovuti a β , in verde gli elementi di σ . Nel prodotto si vede l'effetto sovrapposto di blu e rosso. Nelle partizioni ridotte in verde sono stati evidenziati gli zeri dovuti alla riduzione, ovvero in corrispondenza agli atomi (1 verdi) di σ .

Entropia di una partizione binaria

Il calcolo più semplice è quello dell'entropia topologica, H_T . Avendo un vettore che indica esattamente l'inizio di ogni atomo, basta contare il numero di 1 presenti nel vettore e farne il logaritmo¹.

Per l'entropia di Shannon H_S la cosa è leggermente più complicata²:

1. si trovano tutte le posizioni i_k degli 1 nel vettore dato
2. si fa la differenza degli interi così trovati, $\mu_k = i_k - i_{k-1}$
3. l'insieme $\{\mu_k\}$ rappresenta le lunghezze degli atomi, ovvero gli intervalli tra 1 e l'ultimo 0 (se esiste) dello stesso atomo

Per l'ultimo atomo ci vuole un trattamento speciale, $\mu_{end} = L - i_{end}$, ovvero si calcola la differenza tra la lunghezza della sequenza e l'ultimo 1 nel vettore. Il calcolo dell'entropia del vettore $\{\mu_m\} = \{\mu_k\} \cup \mu_{end}$ è molto semplice:

$$L = \sum_m \mu_m$$

$$H = - \frac{\sum_m \mu_m \ln \mu_m}{L} + \ln L$$

la formula utilizzata permette di non dover dividere ogni μ_k per L , e di eseguire un'unica divisione alla fine. L'utilizzo delle misure nonnormalizzate degli atomi consente anche di poter precalcolare tutti i logaritmi necessari, in quanto $0 \leq \mu_k \leq L$ – consente ciò di velocizzare l'esecuzione del programma del 600%.

L'algoritmo presenta complessità $\mathcal{O}(L)$ in quanto si scorre l'array completo, anche se una volta sola: chiaramente non si può far di meglio.

Distanza di Rohlin

Una volta che si è in grado di fare il prodotto, la riduzione e il calcolo dell'entropia, si può immediatamente calcolare la distanza di Rohlin. Per questo motivo è necessario calcolare anche le partizioni ridotte, che sono superflue per il calcolo del prodotto ridotto, ma nella distanza entrano in gioco le entropie dei fattori.

La tabella 2.2 calcola, sfruttando solamente i numeri calcolati nell'esempio precedente, le 4 possibili distanze date le due partizioni binarie.

¹in Matlab è immediato: $H_{top} = \log(\text{sum}(B));$

²In codice Matlab, si definisce prima $H = \text{H}(a) = -\text{sum}(a .* \log(a)) / \text{sum}(a) + \log(\text{sum}(a));$
Avendo il vettore binario A, l'entropia cercata è: $H(\text{diff}(\text{find}(A, 1))));$

Distanza	Formula	Valore	R
Nonridotta, Shannon	$2H_S(\alpha \vee \beta) - H_S(\alpha) - H_S(\beta)$	0.93	-
Ridotta, Shannon	$2H_S(\hat{\alpha}\hat{\beta}) - H_S(\hat{\alpha}) - H_S(\hat{\beta})$	1.33	1.46
Nonridotta, topologica	$2H_T(\alpha \vee \beta) - H_T(\alpha) - H_T(\beta)$	0.87	-
Ridotta, topologica	$2H_T(\hat{\alpha}\hat{\beta}) - H_T(\hat{\alpha}) - H_T(\hat{\beta})$	1.35	1.53

Tabella 2.2: Tutte le possibili distanze ricavate a partire dalla tabella, con relativo fattore di amplificazione 2.1

2.2 Partizionamento generico

Nel caso generico non basta indicare l'inizio di ogni atomo, poichè questi possono avere forma (e buchi) di ogni tipo. È necessario etichettare ogni sito con un numero naturale, indicando con $\lambda_\alpha(i)$ l'etichetta corrispondente al sito i -esimo nella partizione α . Ogni etichetta identifica l'atomo di appartenenza:

$$i \sim j \iff \lambda(i) = \lambda(j)$$

Non si possono fare ipotesi sulla posizione relativa dei siti nè sulle etichette, che formano un vettore di lunghezza L .

2.2.1 Struttura dei vicini

Abbiamo definito il criterio di partizionamento come una relazione di equivalenza *globale*, che non dipende dalla relativa posizione dei singoli siti. In pratica, spesso andiamo a ricostruire la relazione a partire da equivalenze *locali*, definite tra siti “vicini”³, mettendo nello stesso atomo siti “lontani” che sono equivalenti tra di loro tramite una sequenza di equivalenze locali.

Il metodo per partizionare una configurazione generica sullo spazio M consiste nel raccogliere tutta l'informazione in una matrice dei vicini NNB, concettualmente la versione ridotta (ad un numero opportuno di vicini) e *sparse* della matrice di adiacenza, per poi usare un algoritmo generale di clustering.

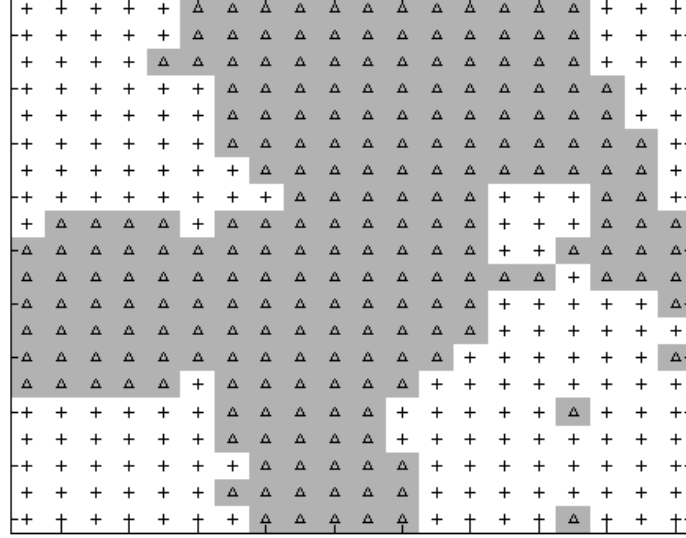
In linea di principio, il numero dei vicini per sito non è costante — associamo un vettore di lunghezza variabile sito per sito, a seconda della geometria e configurazione. Per reticoli regolari chiaramente possiamo fissare il numero massimo dei vicini⁴, per ottimizzare il codice, indicando eventualmente con un simbolo convenzionale la fine del vettore (ad es. ci si ferma quando si trova -1). A seconda dell'input, possiamo distinguere vari casi:

- abbiamo in partenza la configurazione completa \mathcal{C} su un reticolo regolare, consideriamo come collegati al sito i -simo tutti i primi vicini j aventi lo stesso simbolo, cioè

$$d(i, j) = 1, f(i) = f(j)$$

e li aggiungiamo al vettore $NNB[i][k++] = j$, dove i indica la colonna, k cresce con il numero di j trovati. A questo caso appartiene ad esempio lo studio delle distanze tra reticoli con configurazioni di Ising: si considerano solo i primi vicini aventi lo stesso spin

- nel caso delle partizioni con salto, aggiungiamo a NNB solo il primo sito distante meno di n_s avente lo stesso simbolo, non serve collegare i più lontani (saranno già vicini del precedente)
- non guardiamo affatto le configurazioni, e i vicini sono dati interamente dalla matrice di adiacenza: $NNB[i] = \text{nonzero}(A[i])$

Figura 2.2.1: Reticolo semplice con $|\mathbb{K}| = 2$

Il caso in cui associamo insieme tutti i simboli dello stesso tipo presenti sul grafo, non è più rappresentabile tramite un elenco di vicini⁵. Quindi si utilizza un diverso algoritmo, una variante del sort descritto a pagina 20.

Scorriamo poi tutto lo spazio M raggruppando i siti a partire dall'elenco dei loro vicini, qualunque esso sia, e otteniamo una partizione. I reticoli regolari di dimensione d sono generati da d vettori ad entrate intere: per controllare tutti i possibili vicini di ogni sito del reticolo è quindi sufficiente esaminarne d , invece del numero di coordinazione $z = 2d$. Se invece considerassimo solo un sottoinsieme dello spazio M per avere tutti i collegamenti bisogna effettivamente analizzare z primi vicini..

Facciamo l'esempio del reticolo bidimensionale ai primi vicini, come si vede in figura 2.2.1. Scorrendo il reticolo in modo ordinato, dall'alto verso il basso, da sinistra verso destra, ovvero secondo la naturale disposizione dei siti in memoria, si vede che per allargare progressivamente (a macchia d'olio) le partizioni, è conveniente considerare i siti vicini già visitati. Per il sito i -esimo si guarda quindi il vicino in alto (*nearest neighbour up*, nnu) e quello a sinistra (*nearest neighbour left*, nnl). In figura 2.2.2 sono disegnate le linee che collegano ciascun sito con il corrispettivo nnl e nnu. Avere un collegamento tra due siti è una relazione simmetrica, per cui non è necessario controllare in entrambi i versi.

Problema. Qual è la struttura ottimale (minima) di vicini per riottenere la partizione data?

Basta unire uno-per-uno i siti all'interno di ogni atomo. Ovvero ogni sito ha un solo vicino, il sito che lo precede facente parte dello stesso atomo (o se stesso, se è il primo o unico). Questo è chiaramente sufficiente per ottenere di nuovo la partizione, si può scrivere come un vettore lungo L , indipendentemente dalla geometria del sistema e dal numero effettivo di vicini: è un modo estramamente comodo ed efficiente di catturare le informazioni a partire da NNB, necessarie per la riduzione, ma che possono occupare molto spazio in memoria. Denominiamo l'array contenente il vicino precedente come `previous[i]`.

³Si intende qui nel senso più generale possibile, indipendentemente dalla posizione effettiva, ma legati da una qualunque relazione. Non vi è quindi alcuna perdita di generalità.

⁴Sia per primi vicini, che per un numero allargato, questo è costante.

⁵Volendo si può, ed è utile per l'intersezione tra partizioni definite in questo modo. Dovremmo prima trovare tutti i siti collegati ma l'elenco è più semplice da compilare dopo aver partizionato in altro modo.

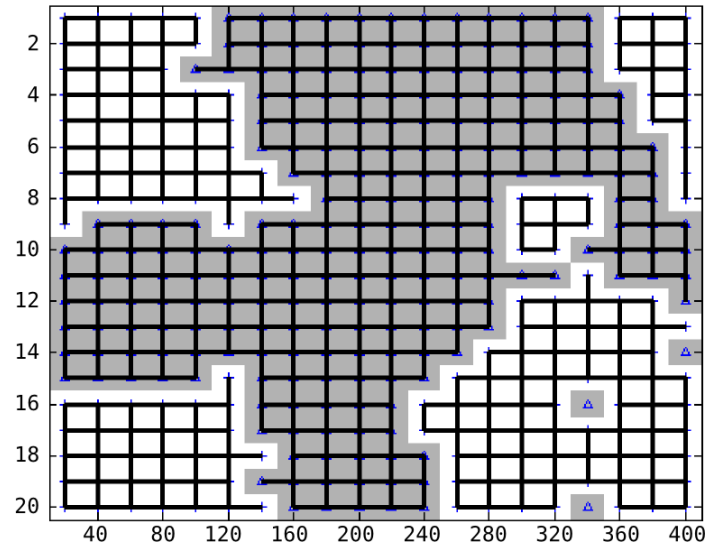


Figura 2.2.2: Collegamento dei siti con stesso simbolo, solo tramite vicino up e vicino left, essendo sufficienti a completare tutti i collegamenti (condizioni al contorno nonperiodiche).

2.2.2 Partizionamento

Una volta completato l'elenco essenziale dei vicini, si procede al partizionamento. L'algoritmo è noto in letteratura come algoritmo di Hoshen-Kopelman, di cui utilizziamo la versione ottimizzata da Mark Newman. Il problema trattato di *clustering* è equivalente a molti altri: bond-percolation, colorazione di grafo generico, ecc.

Per il procedimento si crea un array `labels[]`, lungo L , che alla fine dell'algoritmo è codificato nel seguente modo:

`labels[i] < 0` i è la *root* o *radice* del suo cluster, e $-\text{labels}[i]$ rappresenta la dimensione del cluster – ovvero quanti siti vi appartengono in totale

`labels[i] > 0` il sito punta ad un altro cluster, con *root* alla posizione `labels[i]`

L'array è un insieme di radici e di puntatori ad altri siti – rappresenta cioè un albero, con collegamenti da ogni foglia (sito), alla radice corrispondente, che contiene il numero di siti che le appartengono. Per sapere a che cluster appartiene un qualunque sito, definiamo la funzione `findroot`:

```
int findroot(int i, int labels[]) {
    if (labels[i] < 0) return i;
    return labels[i] = findroot(labels[i], labels);
}
```

definita ricorsivamente sull'albero. Se il sito ha un label negativo, allora è radice. Altrimenti, risaliamo al sito a cui punta e reitero il procedimento. Ad ogni passo si esegue la *path compression*: ogni sito su cui si passa è aggiornato per puntare direttamente alla radice – in questo modo la volta successiva il percorso non deve essere ricostruito.

L'algoritmo è il seguente:

1. ad ogni sito si associa l'atomo banale, formato dal sito stesso, `labels[i] = -1`. In questo modo da subito ad ogni sito corrisponde un cluster, che verrà eventualmente allargato unendolo con i suoi vicini.
2. per ogni sito i , in ordine crescente, controlliamo (fino ad esaurimento) il vettore `NNB[i]`.

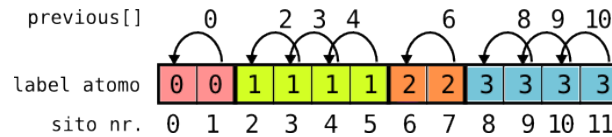


Figura 2.2.3: Per ogni sito è stato indicato l'atomo di appartenenza, sotto l'indice, sopra il valore del vettore che punta al sito precedente appartenente allo stesso atomo.

- cerchiamo il cluster di appartenenza, $ri = \text{findroot}(i, \text{labels})$
- per ogni vicino j , identifichiamo a sua volta il cluster, $rj = \text{findroot}(j, \text{labels})$
- se la radice è la stessa, ovvero appartengono già allo stesso cluster, non si fa nulla
- se le radici sono diverse, si uniscono i cluster. C'è sicuramente un cluster più grosso (o uguale) e uno più piccolo, rispettivamente di radice r_{\max} e r_{\min} . Per fare il numero minimo di cambiamenti, si aggiunge alla radice il numero di siti accorpati

```
labels[rmax] += labels[rmin]
```

e si trasforma r_{\min} in una foglia del cluster più grosso:

```
labels[rmin] = rmax
```

La volta successiva che si cerca la root dei siti che appartenevano al cluster più piccolo, si risalirà fino alla nuova radice — il cluster è stato effettivamente assimilato, semplicemente cambiando il valore di un puntatore.

- alla fine tutti i siti sono stati controllati, $r = \text{findroot}(i, \text{labels})$ punta alla radice di appartenenza, lo spazio è partizionato, l'intero r identifica in maniera univoca le classi di equivalenza.

L'algoritmo è ottimale, con runtime $\mathcal{O}(L \ln L)$ e senza bisogno di memoria aggiuntiva. Il fattore logaritmico è dovuto alla fase di unione dei cluster, che in generale richiede $\mathcal{O}(\ln L)$ passi per sito per trovare la radice di appartenenza.

2.2.3 Relabeling

Una volta che abbiamo il vettore `labels[]`, si può utilizzare le informazioni ivi contenute. Si costruisce un vettore di atomi, definendo per ciascuno una struttura che contiene informazioni quali le dimensioni, dove inizia, dove finisce, il *hash* corrispondente.

Per avere il numero degli atomi e inizializzare il vettore corrispondente basta contare quanti siti hanno `labels[i] < 0`. Contemporaneamente possiamo associare ad ogni atomo le sue dimensioni, `-labels[i]`, il suo sito di inizio i , e l'ultimo sito trovato, temporaneamente i . Ogni elemento del vettore `labels` punta ad un sito (o indica lo stesso come radice) per cui è contenuto nell'intervallo $[0, \dots, L]$ ed è possibile tenere conto di ogni atomo che si incontra scorrendo tutti i siti e utilizzare questo contatore come nuova etichetta: non più la radice, ma il numero dell'atomo corrispondente in $[0, \dots, n]$.

Avendo un elenco di atomi contente le dimensioni di ciascuno, si calcola l'entropia della partizione in modo diretto, sommando le dimensioni dei vari atomi moltiplicate per il loro logaritmo e normalizzando.

Generiamo inoltre il vettore ottimale dei vicini: `previous[]`. Per ogni sito i , conosciamo infatti l'atomo di appartenenza e il precedente sito trovato appartenente allo stesso atomo: `previous[i]` conterrà proprio questo dato. Aggiorniamo poi il puntatore all'ultimo sito trovato con i stesso. Andando a leggere il vettore `previous[]` in modo ordinato, abbiamo una lista ordinata, che ad ogni intero associa un numero strettamente minore o uguale (se il sito non ha un precedente).

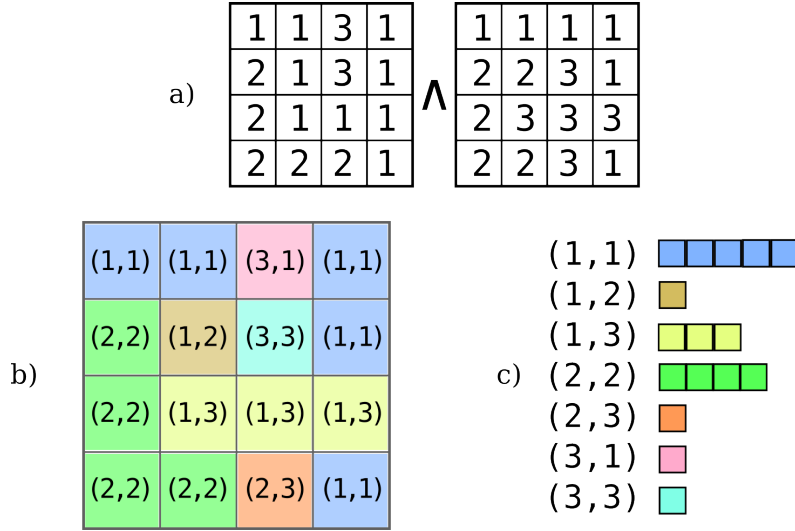


Figura 2.3.1: Calcolo di un prodotto tra partizioni. a) partizioni di partenza; b) partizione prodotto; c) lunghezze degli atomi ordinati del prodotto, al fine di calcolare l'entropia

2.3 Operazioni tra partizioni generiche

2.3.1 Prodotto

Dovendo ragionare sui label assegnati ai siti, cerchiamo un modo di labellare in modo univoco i siti nella partizione prodotto, con un'operazione sito per sito, ovvero locale. Dalla definizione si ottiene che un sito i appartiene all'atomo $(\alpha \vee \beta)_{jk}$ se appartiene a $A_j \cap B_k$, ovvero se ha $\lambda_\alpha(i) = j$ e $\lambda_\beta(i) = k$.

Il prodotto deve mantenere la topologia, quindi prendendo due siti “vicini”, ovvero appartenenti allo stesso atomo in entrambe le partizioni, devono rimanere nello stesso atomo del prodotto

$$m, n \in A_j \text{ e } m, n \in B_k \implies m, n \in (\alpha \vee \beta)_{jk}$$

ma i siti m, n hanno label $\lambda_\alpha(m) = \lambda_\alpha(n) = j$ e $\lambda_\beta(m) = \lambda_\beta(n) = k$ rispettivamente per le due partizioni — devono avere lo stesso label nel prodotto, che può dipendere solo dal label degli atomi di partenza. L'unica scelta possibile è assegnare label (j, k) (o equivalente) ad ogni sito del prodotto, ovvero la coppia (ordinata) dei label di partenza. Una volta eseguito l'assegnamento, gli atomi sono riconosciuti cercando label dello stesso valore. Tutto il procedimento è illustrato in figura 2.3.1.

Se i label sono rappresentati da interi a 32bit, la coppia può essere rappresentata da un intero a 64bit, avente nei primi 32bit il valore del primo label, e negli ultimi quello del secondo: in questo modo tutte le operazioni sono atomiche su un moderno processore.

Ricapitolando: al sito i -esimo, partendo da $\lambda_\alpha(i) = j$ e $\lambda_\beta(i) = k$, si assegna nel prodotto $\lambda_{\alpha \vee \beta}(i) = (j, k)$:

$$\text{prod}[i] = \text{alpha}[i] \ll 32 \mid \text{beta}[i];$$

come si vede dalla formula esplicita, $(j, k) \neq (k, j)$ in quanto gli indici identificano atomi appartenenti a partizioni diverse, con siti in genere diversi — se al posto del OR binario si volesse usare un'altra operazione, ne va cercata una asimmetrica nei due indici, per non unire atomi distinti. Ad esempio una partizione con labels $\{1, 2\}$ è equivalente a $\{2, 1\}$ (sempre due atomi distinti); il prodotto è ancora una partizione con due atomi, ma le etichette del prodotto sono: $\{(1, 2), (2, 1)\}$ — devono essere chiaramente diverse.

A1 = {9, 8, 5, 4, 1, 0}	
A2 = {8, 7, 5, 4, 2, 1}	
allineamento1	9 8 - 5 4 3 - 1 0
allineamento2	- 8 7 5 4 - 2 1 -
differenza?	+ . + . . + + . + -> 5

Figura 2.3.2: Differenza simmetrica tra insiemi ordinati, rappresentata testualmente

Anche in questo caso il prodotto comporta un numero di operazioni sito-per-sito, con complessità $\mathcal{O}(L)$.

2.3.2 Entropia

Per calcolare il numero di siti di un atomo, ovvero corrispondente ad ogni etichetta univoca, bisogna innanzitutto scorrere l'elenco per cercare tutte le etichette e ogni volta che se ne trova una non precedentemente catalogata, scorrere l'intero array in avanti e contare quante volte appare. Questa è chiaramente un'operazione con complessità

$$\sum_{i=1}^L (L - i) = \mathcal{O}(L^2)$$

Ma si può fare meglio. Infatti non è necessario scorrere N volte l'intero elenco dei labels. Si può riordinare questo elenco tramite un'operazione di *sort*⁸. L'andamento asintotico è noto in letteratura essere $\mathcal{O}(L \log_2 L)$ nel numero di siti, con una costante di proporzionalità dipendente dall'algoritmo, ma non particolarmente onerosa.

Ordinando l'elenco delle etichette (non importa neanche se in ordine crescente o decrescente) si ottiene un array in cui sicuramente tutti gli elementi uguali sono consecutivi – si procede a questo punto al calcolo dell'entropia come se si trattasse di una sequenza unidimensionale.

L'altro metodo, computazionalmente più semplice, $\mathcal{O}(L)$ sia in runtime che in memoria, che consiste nel numerare temporaneamente tutti i label trovati in ordine crescente e rietichettarli con la successione $\{1, 2, \dots\}$ non è gestibile, in quanto i label possono essere distribuiti in modo “sparso” nello spazio delle coppie (j, k) . In generale vi possono essere al massimo L atomi nel prodotto, ma $L \times L$ coppie, quindi sicuramente non tutte sono realizzate. La complessità dell'organizzarle in qualche altro modo, ad esempio in un albero binario bilanciato o un hash – tutte superano in fretta la semplicità del *sort* e anche nel caso migliore hanno lo stesso andamento asintotico. In pratica l'andamento è polinomialmente peggiore, per motivi di mal gestione della cache L1 e L2 del processore, in quanto sia gli alberi che i hash risultano nonlocali, mentre un *sort* sposta gli elementi in modo ordinato e accede alla memoria in modo più lineare.

Una volta calcolata l'entropia di ogni partizione, sia di Shannon che topologica, la distanza di Rohlin segue immediatamente dalla formula 1.1.3 a pagina 4, senza nessuna modifica.

2.3.3 Differenza simmetrica

Per calcolare la differenza tra due atomi, illustriamo come calcolare in modo efficiente la differenza simmetrica tra due insiemi.

Dati due insiemi ordinati di dimensione n e m , è possibile calcolare la differenza simmetrica in modo lineare, con al massimo $2(n + m + 1)$ operazioni, mentre per due insiemi disordinati sono necessarie $\mathcal{O}(nm)$ operazioni. Il procedimento è illustrato in figura 2.3.2.

⁸Nello specifico ci affidiamo al *quicksort* delle librerie glibc

La prima fase è quella di allineamento, ovvero si scorrono i due array rappresentanti gli insiemi, aggiungendo spazi all'uno o all'altro, in maniera tale che i valori nonvuoti siano uguali nelle due righe. Successivamente si contano le differenze tra le due stringhe di simboli allineati.

Chiaramente si possono fare entrambe le operazioni contemporaneamente, contando +1 ogni volta che si aggiunge uno spazio. Quando si vuol sapere se due atomi hanno al massimo n_e siti diversi, ci si può fermare dopo aver inserito n_e spazi. Non è poi neanche necessario rappresentare gli spazi in memoria, basta scorrere in avanti il puntatore corrispondente per allinire al volo intanto che si leggono gli insiemi stessi.

L'operazione è estremamente efficiente se si ha l'elenco corrispondente ai siti dei due insiemi. Nel nostro caso, a partire da un qualunque sito, è sufficiente usare il vettore `previous[]` per ottenere il sito precedente, sicuramente ordinato.

2.3.4 Intersezione

Definiamo ora il modo operativo di calcolare la partizione comune, $\sigma = \alpha \wedge \beta$. Descriviamo il processo prima in termini di atomi, poi in termini di siti, per arrivare all'algoritmo ottimale.

La partizione intersezione, σ essendo la partizione più fine tale che $\sigma \leq \alpha$ e $\sigma \leq \beta$, ha atomi formati dall'unione minimale di atomi sia di α che di β . Ovvero ogni atomo $C_k = \cup_j A_j = \cup_m B_m$. Chiaramente andare a cercare le combinazioni di A_j e B_m necessarie è un'impresa disperata.

In termini di siti, vediamo che ogni atomo C_k collega siti appartenenti a diversi atomi di α se questi sono collegati in β . Questo corrisponde già ad un utile criterio:

$$i \sim j \text{ in } \sigma \iff i \sim j \text{ in } \alpha \vee i \sim j \text{ in } \beta \quad (2.3.1)$$

che diventa ancora più utile se ci si ricorda che la relazione di equivalenza tra siti è mantenuta a livello locale dalla struttura NNB precedentemente introdotta. Ovvero possiamo esprimere la relazione di equivalenza 2.3.1 a livello locale, sito per sito, ottenendo la corretta partizione globale alla fine!

La partizione σ ha anch'essa una struttura di vicini corrispondenti:

- i è vicino di j anche se è solo vicino in α
- i è vicino di j anche se è se è vicino in β

la partizione σ sarà quindi ricostruita tramite un'opportuna struttura NNB, che ha in generale il doppio dei vicini $\tilde{z}(\sigma) = \tilde{z}(\alpha) + \tilde{z}(\beta)$, ovvero sito-per-sito l'unione dei vicini di α e β .

- $\text{NNB}_\sigma[i][2k] = \text{NNB}_\alpha[i][k]$
- $\text{NNB}_\sigma[i][2k+1] = \text{NNB}_\beta[i][k]$

dove per NNB_α si intende ad esempio la struttura corrispondente utilizzata per il partizionamento di α .

Una volta definita la struttura dei vicini, si partiziona l'array contenente tutti i siti con l'algoritmo descritto a pagina 16.

Ottimizzazione Non è in realtà necessario aggiungere i vicini di ogni sito, come definiti originariamente dalla struttura NNB corrispondente. Poichè esiste un vettore di vicini ottimale, che ricostruisce esattamente le partizioni originarie: `previous[]`.

Il problema dell'intersezione è quindi ridotto a considerare 2 vicini per ogni sito, invece che $2d$ senza quest'ottimizzazione! Per un qualunque sito definiamo quindi

- $\text{NNB}_\sigma[i][0] = \text{previous}_\alpha[i]$
- $\text{NNB}_\sigma[i][1] = \text{previous}_\beta[i]$

2.4 Riduzione

Una volta che si è in grado di calcolare l'intersezione, è possibile calcolare le partizioni ridotte. Vediamo ora come implementare i diversi criteri esposti a pagina 5. Lo scopo principale è quello di evitare la costruzione, il prodotto e l'intersezione dei fattori dicotomici, per motivi di tempo e occupazione in memoria.

Visto che le partizioni ridotte servono solo al calcolo del loro prodotto, costruiremo per ciascuno i giusti labels. Non serve costruire i vettori `previous[]`, nè le strutture degli atomi, ma solo calcolare l'entropia a partire dai labels con il metodo presentato a pagina a pagina 20 visto che è necessaria per la distanza di Rohlin.

2.4.1 Confronto con l'intersezione

Per ridurre due partizioni α e β definiamo innanzitutto l'intersezione $\sigma = \alpha \wedge \beta$ calcolata con l'algoritmo appena presentato. In generale per fare molti confronti, sarà necessario usare una variabile temporanea che contenga l'intersezione di volta in volta.

Costruiamo le partizioni dicotomiche semplici, ovvero a partire da ogni atomo $A_k \in \alpha$, definiamo $\hat{\alpha}_k = \{A_k, A_k^c\}$:

Costruzione in memoria si tiene l'elenco degli atomi, ovvero un array di strutture `atomi[]`, su cui possiamo scorrere. Per ogni atomo (ad esempio il k -esimo) conosco il sito finale, `atomi[k].end`, ricostruisco gli altri siti appartenenti tramite iterazione del vettore `previous[atomi[k].end]`. Ho inoltre il sito di inizio, `atomi[k].start`.

Confrontiamo ogni partizione dicotomica $\hat{\alpha}_k$ con l'intersezione, $\rho = \hat{\alpha}_k \wedge \sigma$. Se $\rho \neq \nu$, la partizione banale, scarto la partizione dicotomica $\hat{\alpha}_k$. Si hanno i possibili casi:

Intersezione nonbanale $\exists C_m \in \sigma$ tale che $A_k = C_m$: in questo caso l'atomo di α corrisponde esattamente ad un atomo di σ , ovvero hanno tutti i siti in comune. La loro intersezione conterrà almeno l'atomo $\hat{\alpha}_k$, per cui sarà non banale \implies scarto A_k .

Intersezione banale Se A_k non corrisponde esattamente a un qualche C_m , allora σ unisce più atomi di α . In questo caso, la partizione σ collega siti di A_k con siti del suo complementare, banalizzando l'intersezione con la partizione dicotomica $\implies \hat{\alpha}_k \wedge \sigma = \nu$.

Come si calcola se esiste esattamente un atomo C_m corrispondente? Visto che stiamo iterando sull'elenco degli atomi di α , conosciamo sicuramente un sito appartenente ad A_k che chiamiamo j , $j = \text{atomi}[k].\text{end}$ e l'atomo corrispondente al sito j nella partizione σ , tramite il vettore delle etichette di σ . Fatto questo, abbiamo le strutture degli atomi corrispondenti al sito j per entrambe le partizioni, per cui conosciamo il *hash* corrispondente a C_m e a A_k . Se il *hash* è uguale, allora gli atomi sono uguali! Per il confronto del fattore dicotomico generato dall'atomo A_k abbiamo quindi in totale fatto 4 operazioni veloci:

1. Dall'indice k si trova la struttura contenente un sito j e il *hash*, `atomi[k]` — 1 lookup
2. Si cerca l'indice dell'atomo corrispondente in σ , `labels $_{\sigma}$ [j]` — 1 lookup
3. Si trova la struttura corrispondente all'atomo in σ e si legge il *hash* — 1 lookup
4. Si confrontano i due *hash* — 1 confronto

Rimane da moltiplicare insieme tutte le partizioni dicotomiche rimaste, per ottenere la partizione ridotta $\hat{\alpha} = \bigvee_k \hat{\alpha}_k$. Numeriamo i fattori dicotomici rimasti con un indice crescente, a partire da 2. Vediamo come in ogni partizione dicotomica vi sia un

atomo della partizione originaria e il suo complementare: gli atomi sono disgiunti, per cui il prodotto dei singoli atomi risulta vuoto. Rimangono da moltiplicare tutti i complementari dei fattori rimasti: genero nuovamente esattamente gli atomi che non ho scartato nella riduzione e un ulteriore atomo (generalmente sconnesso) composto dall'unione di tutti gli atomi scartati.

Ricostruzione Creiamo una partizione banale con tutti i label pari a 1. Mettiamo un label $k \geq 2$ ai siti di ogni atomo A_k che non è stato scartato nel confronto. Questo è semplice, basta porre uguali a k tutti i siti partendo da $j=\text{atoms}[k]$.end e iterando tramite $j=\text{previous}[j]$ fino a che non arriviamo all'inizio dell'atomo. Alla fine abbiamo una partizione in cui l'atomo sconnesso con gli scarti ha label 1, mentre gli altri siti hanno label numerati a partire da 2. Il processo è chiaramente proporzionale al numero di siti che abbiamo dovuto riscrivere, quindi

$$\mathcal{O}(L) + \mathcal{O}\left(\sum_k \mu(A_k)\right) = \mathcal{O}(L)$$

Abbiamo costruito in tempo lineare la partizione ridotta, in quanto per ogni atomo c'è un confronto atomico e il relabeling del risultato corrispondente.

2.4.2 Confronto diretto

In questo tipo di riduzione, confrontiamo direttamente gli atomi di due partizioni, α e β , scartando le partizioni dicotomiche corrispondenti, nel caso in cui gli atomi soddisfino il criterio prescelto.

Per evitare problemi di definizione, consideriamo la partizione β fissata, costruendo $\hat{\alpha}$ a partire dal confronto di α e β .⁹

Abbiamo due criteri di confronto:

1. Scartiamo l'atomo A_k se è uguale a $B_m \in \beta$ definito sugli stessi siti (usando il confronto tra hash)
2. Scartiamo l'atomo A_k se differisce da $B_m \in \beta$ corrispondente meno di ϵ in misura:

$$\mu(A_k \triangle B_m) \leq \epsilon$$

Si procede molto similmente al caso del confronto con σ , in quanto iteriamo su tutti gli atomi di α , troviamo i siti corrispondenti all'atomo cercato, da questi gli atomi di β sopra quei siti e eseguiamo il confronto.

La differenza simmetrica è stata definita in termini di numero di siti diversi n_ϵ , mentre sopra in termini della misura normalizzata che deve essere $\leq \epsilon$, definiamo dunque:

$$\epsilon = \frac{n_\epsilon}{L}$$

La partizione $\hat{\alpha}$ è ricostruita a partire dagli atomi rimasti come spiegato nella sezione precedente. L'unica differenza è insomma che il confronto viene fatto con gli atomi corrispondenti di β e non di σ e che il criterio non è l'uguaglianza, ma l'uguaglianza a meno di ϵ (che può essere 0).

⁹Poi si fa il contrario, tenendo fisso α , generando $\hat{\beta}$.