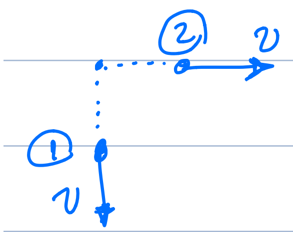
نسبیت خاص - سؤالات پایان ترم

---

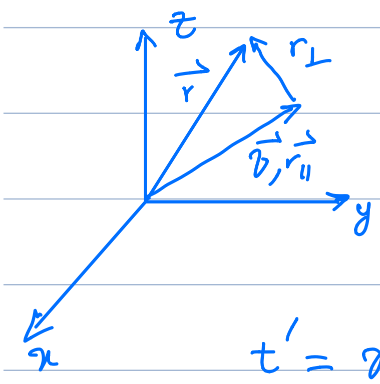
۱) در یک دستگاه لخت، دو ذره هم زمان در دو جهت عمود بر هم از یک نقطه با سرعت $v$ شلیک می‌شوند.

سرعت هر ذره را نسبت به دیگری بیابید.




تبدیلات سرعت را در دستگاه های لخت می‌توان بدست آورد.

بدین منظور ابتدا تبدیلات برداری را برای پیکربندی غیر استاندارد می‌نویسیم:




$$\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp \quad , \quad \vec{r}_\parallel = (\vec{v}\cdot\vec{r})\frac{\vec{v}}{v^2}$$

$$t' = \gamma\left(t - \vec{v}\cdot\vec{r}_\parallel / c^2\right) \quad , \quad \vec{r}\,'_\parallel = \gamma(\vec{r}_\parallel - \vec{v}t) \quad , \quad \vec{r}_\perp = \vec{r}\,'_\perp$$

که معادلات بالا را از تبدیلات لورنتز می‌دانیم. ضمناً:

$$t' = \gamma\left(t - \vec{r}\cdot\vec{v}/c^2\right) \quad , \quad \vec{r}\,' = \vec{r} + (\gamma - 1)\frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2} - \gamma\vec{v}t$$

$$= \vec{r} + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v} - \gamma\vec{v}t$$

$$\longrightarrow \vec{r}\,' = \gamma(\vec{r} - \vec{v}t) + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{r})$$

اکنون نوبت آن است که تبدیلات سرعت را بدست آوریم:

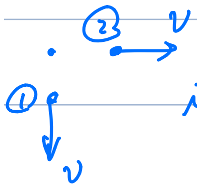
$$d\vec{r}\,' = \gamma(d\vec{r} - \vec{v}dt) + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}\vec{v}\times(\vec{v}\times d\vec{r})$$

$$dt' = \gamma(dt - d\vec r\cdot\vec v/c^2) = \gamma dt\,(1-\vec u\cdot\vec v/c^2)$$

که در واقع $\vec u$ سرعت ذره‌ای است که در دستگاه S است و S' دستگاهی است که با سرعت $\vec v$ حرکت می‌کند.

$$\vec u' = \frac{\vec u-\vec v}{1-\vec u\cdot\vec v/c^2} + \frac{\gamma}{c^2(1+\gamma)}\,\frac{\vec v\times(\vec v\times\vec u)}{1-\vec v\cdot\vec u/c^2}$$

حال که توانستیم تبدیلات را به صورت کلی داشته باشیم می‌توانیم برای این مسأله خاص تبدیلات را بنویسیم: از دستگاه ناظر آزمایشگاه دو ذره با سرعت $v$ عمود بر هم شلیک می‌شوند




بنابراین برای دستگاه ساکن ① داریم:

$$\vec u_2 = \frac{v\hat x-(-v\hat y)}{1+(v\hat x)\cdot(v\hat y)/c^2} + \frac{\gamma}{c^2(1+\gamma)}\,\frac{-(v\hat y)\times(-v\hat y\times v\hat x)}{1+(v\hat x)\cdot(v\hat y)/c^2}$$

$$= (v\hat x+v\hat y) + \frac{\gamma}{c^2(1+\gamma)}\,v\hat y\times(v\hat y\times v\hat x)$$

$$= v(\hat x+\hat y) + \frac{\gamma v^3}{c^2(1+\gamma)}\hat x = \hat x\, v\left(1+\frac{\gamma v^2}{c^2(1+\gamma)}\right) + \hat y\, v$$

برای دستگاه ساکن ② داریم:

$$\vec u_1 = \frac{-v\hat y - v\hat x}{1+(v\hat x)\cdot(v\hat y)/c^2} + \frac{\gamma}{c^2(1+\gamma)}\,\frac{(v\hat x)\times(v\hat x\times -v\hat y)}{1+(v\hat x)\cdot(v\hat y)/c^2}$$

$$= -v(\hat x+\hat y) + \frac{\gamma v^3}{c^2(1+\gamma)}\hat y = -\hat x\, v + \hat y\, v\left(-1+\frac{\gamma v^2}{c^2(1+\gamma)}\right)$$

۲) تقدیم توماس با رابطه روبرو داده می‌شود:
$$\vec{\omega}_T = \frac{-\gamma^2}{1+\gamma} \vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

الف) رابطه بالا را توضیح دهید یعنی ماهیت تقدیم توماس را شرح دهید.

ب) برای یک حرکت دایره‌ای یکنواخت فرمول تقدیم توماس را حساب کنید.

الف) از جبر تبدیلات لورنتز می‌دانیم که این تبدیلات یک گروه جابجایی نیستند. ضمناً از تجزیه در قطبی به گروه لورنتز می‌دانیم که هر تبدیل لورنتز را می‌توان به دو ماتریس دوران و خیز تجزیه کرد و نوشت و این خاصیت عدم جابجایی را در یک پدیده‌ای به نام تقدیم توماس می‌توانیم مشاهده کنیم.

در سال ۱۹۲۶ میلادی، دانشمندان توانستند برای الکترون مفهوم اسپین را معرفی کنند و
الکترون
نشان دادند که g-factor آن حدود ۲ است که می‌توانست اثر زیمن را توجیه کند.

اما این مفهوم اسپین از نظر مکانیک کلاسیک قابل توجیه نبود و در معادلات دستی وارد می‌کردند تا این که دیراک توانست با نسبیتی کردن معادله شرودینگر و خطی کردن معادله کلاین گوردون، اسپین و g-factor را توجیه کند. از طرفی توماس در سال ۱۹۲۷ نشان داد که می‌توان چگونه

هم‌زمان پدیده زیمن و Fine Structure را توجیه کرد. ضمناً مقدار توماس می‌توانست برهم‌کنش اسپین - اوربیتال صفحه اتم را توضیح دهد. برای بدست آوردن معادلات ابتدا گوئیم رفتار و کنیم که گشتاور مغناطیسی الکترون را می‌توان نوشت:

$$\vec{\mu} = \frac{ge}{2mc}\vec{S}$$

که فاکتور g برابر ۲ است. فرض کنید که یک الکترون با سرعت $\vec{v}$ در میدان خارجی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ حرکت می‌کند. بنابراین داریم:

$$\left(\frac{d\vec{S}}{dt}\right)_{\text{ناظر ساکن}} = \vec{\mu}\times\vec{B}'$$

که $\vec{B}'$ میدان مغناطیسی در دستگاه ساکن است. از طرفی حدوداً تبدیلات میدان‌ها مادامی گونه است.

$$\vec{B}' \simeq \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}\right)$$

که از مرتبه $\frac{v^2}{c^2}$ صرف نظر شده است. بنابراین:

$$\left(\frac{d\vec{S}}{dt}\right)_{\text{ناظر ساکن}} = \vec{\mu}\times\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}\right)$$

بنابراین انرژی آن نیز این گونه خواهد بود:

$$U' = -\vec{\mu}\cdot\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}\right)$$

در یک اتم کمیت $e\vec{E}$ حدوداً با منفی گرادیان پتانسیل متقارن کروی $-\nabla V(r)$ داده می‌شود

پس:

$$e\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r}\frac{dV}{dr}$$

بنابراین انرژی برهمکنش اسپین را می‌توان نوشت :

$$U' = -\frac{ge}{2mc}\,\vec{S}\cdot\vec{B} + \frac{g}{2m^2c^2}(\vec{S}\cdot\vec{L})\,\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}$$

که $\vec{L} = m(\vec{r}\times\vec{v})$ تکانه زاویه‌ای الکترون است. با چرخش اسپین برای هر $\vec{G}$ داریم:

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{بدون دوران}} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{ناظر ساکن}} + \vec{\omega}_T\times\vec{G}$$

که $\vec{\omega}_T$ سرعت زاویه‌ای دوران توماس نامیده می‌شود. با استفاده از تبدیلات لورنتز می‌توان

ارتباط بین مختصات الکترون در دستگاه ساکن و آزمایشگاه را در زمان $t$ بدست آورد.

$$x' = \Lambda_{\text{خیز}}(\beta)\, x$$

و در زمان $t+\delta t$ داریم:

$$x'' = \Lambda_{\text{خیز}}(\beta+\delta\beta)\, x$$

که در تمامی محاسبات $v=\beta c$. ما می‌خواهیم ارتباط بین مختصات را در حالت کلی و

نه فقط تبدیلات خیز ببینیم بنابراین می‌نویسیم

$$x'' = \Lambda_T\, x'$$

که

$$\Lambda_T = \Lambda_{\text{خیز}}(\beta+\delta\beta)\,\Lambda_{\text{خیز}}^{-1} = \Lambda_{\text{خیز}}(\beta+\delta\beta)\,\Lambda_{\text{خیز}}(-\beta)$$

از طرفی برای تبدیلات خیز ماتریس صورت زیر را داریم:

$$\Lambda(-\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & & \\ \gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

ضمناً می‌توان بدست آورد:

$$\Lambda_{\text{خیز}}(\beta+\delta\beta)=\begin{pmatrix} \gamma+\gamma^3\beta\,\delta\beta_1 & -(\gamma\beta+\gamma^3\delta\beta_1) & -\gamma\delta\beta_2 & 0 \\ -(\gamma\beta+\gamma^3\delta\beta_1) & \gamma+\gamma^3\beta\,\delta\beta_1 & \frac{(\gamma-1)}{\beta}\delta\beta_2 & 0 \\ -\gamma\delta\beta_2 & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین با کمی محاسبه داریم:

$$\Lambda_T=\begin{pmatrix} 1 & -\gamma^2\delta\beta_1 & -\gamma\delta\beta_2 & 0 \\ -\gamma^2\delta\beta_1 & 1 & \frac{\gamma-1}{\beta}\delta\beta_2 & 0 \\ -\gamma\delta\beta_2 & -\left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

این محاسبات را می‌توان با استفاده از ماتریس‌های $K$ و $S$ نمایش داد.

$$\Lambda_T = I-\left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}\right)(\vec{\beta}\times\delta\vec{\beta})\cdot\vec{S}-(\gamma^2\delta\vec{\beta}_{\parallel}+\gamma\,\delta\vec{\beta}_{\perp})\cdot\vec{K}$$

که $\delta\vec{\beta}_{\parallel}$ و $\delta\vec{\beta}_{\perp}$ مولفه‌های موازی و عمودی $\delta\vec{\beta}$ نسبت به $\vec{\beta}$ هستند. اگر

مرتبه اول را نگاه داریم: $\Lambda_T=\Lambda_{\text{خیز}}(\Delta\vec{\beta})\,R(\Delta\Omega)=R(\Delta\Omega)\,\Lambda_{\text{خیز}}(\delta\vec{\beta})$

که $\Lambda_{\text{خیز}}(\Delta\vec{\beta})=I-\Delta\vec{\beta}\cdot\vec{K}$, $R(\Delta\Omega)=I-\Delta\vec{\Omega}\cdot\vec{S}$

به این‌ها خیزها و دوران‌های بسیار ریز جابجاپذیر می‌گویند که سرعت این‌گونه است:

$$\Delta\vec{\beta}=\gamma^2\delta\vec{\beta}_{\parallel}+\gamma\,\delta\vec{\beta}_{\perp}$$

وگشت زاویه‌ای

$$\Delta\Omega = \frac{\gamma-1}{\beta^2}\vec{\beta}\times\delta\vec{\beta} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\times\delta\vec{\beta}$$

بنابراین در نهایت می‌توان نوشت

$$\vec{\omega}_T = -\lim_{\delta t\to 0}\frac{\Delta\Omega}{\delta t} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\vec{a}\times\vec{v}}{c^2}$$

ب) برای یک ذره در حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌توان نوشت:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\Longrightarrow \vec{a}\times\vec{v} = \left(\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right)\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\Longrightarrow \omega_T = \frac{1-\frac{\omega^2R^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\omega^2R^2}{c^2}}+1}\,\omega^3R^2$$

۳) تبدیلات لورنتز را برحسب توابع هذلولوی بازنویسی کنید.

برای تبدیلات لورنتز داریم:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

اگر فرض کنیم $\beta = \tanh\phi$ داریم:

$$L_{\text{فیز}} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

از طرفی می‌توان برای توابع هذلولوی نوشت:

$$\tanh(\phi_1+\phi_2) = \frac{\tanh\phi_1+\tanh\phi_2}{1+\tanh\phi_1\tanh\phi_2}$$

بنابراین:

$$\tanh(\phi_1+\phi_2) = \beta$$

$$\sinh\phi = \frac{e^{\phi} + e^{-\phi}}{2}, \quad \cosh\phi = \frac{e^{\phi} + e^{-\phi}}{2}$$

با کمی محاسبه داریم :

$$\cosh\phi\,(1 + \tanh\phi) = \gamma(1+\beta)$$

$$\longrightarrow \phi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{c+v}{c-v}\right)$$

$$\longrightarrow \phi_3 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{c+w}{c-w}\right)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{c+u}{c-u}\right)$$

$$\phi_3 = \phi_1 + \phi_2 \longrightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$\longrightarrow 1+w = \frac{1+v}{1-v} \times \frac{1+u}{1-u}(1-w) = \frac{1+v}{1-v} \times \frac{1+u}{1-u} - \omega\left(\frac{1+v}{1-v} \times \frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$\longrightarrow \omega = \frac{\frac{1+v}{1-v} \times \frac{1+u}{1-u} - 1}{\frac{1+v}{1-v} \times \frac{1+u}{1-u} + 1} = \frac{(1+v)(1+u) - (1-v)(1-u)}{(1+v)(1+u) + (1-v)(1-u)}$$

$$\longrightarrow \omega = \frac{v+u}{1+uv} \xrightarrow{c \neq 1} w = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}}$$

۴) تبدیل پوانکاره با نماد $(a,L)$ تعریف می‌شود. ضرب در این تبدیل به این صورت است:

$$(a',L')(a,L) = (a'+L'a,\ L'L)$$

بردار جابجایی فضا زمان

الف) درستی این ضرب را تحقیق کنید.

ب) نشان دهید تبدیل پوانکاره با این ضرب یک گروه می‌سازد.

الف) باید نشان دهیم که تحت ضرب مجموعه بسته است.

$a$ یک بردار و $L$ یک ماتریس است. ضمنا می‌دانیم که ضرب ماتریس در بردار باز برداری می‌دهد. از طرفی

جمع دو بردار نیز بردار است بنابراین عضو اول بردار است. ضرب دو ماتریس هم ماتریس است

بنابراین عضو دوم نیز صحیح است. بنابراین بسته بودن ثابت می‌شود.

ب) می‌خواهیم نشان دهیم که تبدیل پوانکاره یک گروه می‌سازد. بنابراین:

1) شرکت‌پذیری: برای بررسی درستی این ضرب انتظار داریم $(a'',L'')(a',L')(a,L)$ یکتا باشد

$$(a'',L'')(a',L')(a,L) \xrightarrow{1} (a'',L'')(a',L') = (a''+L''a',\ L''L')$$

$$\Rightarrow (a''+L''a',\ L''L')(a,L) = (a''+L''a'+L''L'a,\ L''L'L)$$

$$(a'',L'')(a',L')(a,L) \xrightarrow{2} (a',L')(a,L) = (a'+L'a,\ L'L)$$

$$\Rightarrow (a'', L'')(a' + L'a, L'L) = (a'' + L''a' + L''L'a, L''L'L)$$

$$\rightarrow \big((a'',L'')(a',L')\big)(a,L) = (a'',L'')\big((a',L')(a,L)\big) \checkmark$$

۲) عضو همانی: معرفی می‌کنیم $I = (0,1)$ آنگاه

$$I(a,L) = (0,1)(a,L) = (0+1\times a, L) = (a,L) \checkmark$$

$$(a,L)I = (a,L)(0,1) = (a+0\times L, L) = (a,L) \checkmark$$

۳) عضو معکوس: برای هر $(a,L)$ وجود دارد $(a,L)^{-1}$ بطوریکه ضرب آنها همانی شود

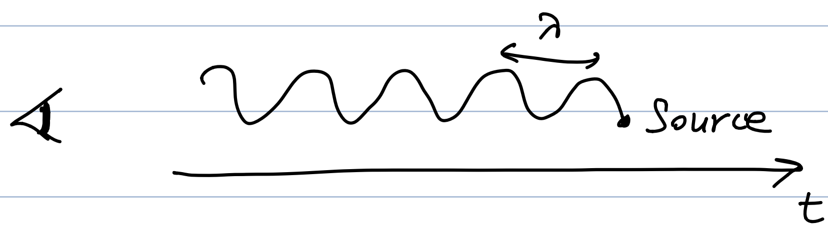
$$(a',L')(a,L) = (a'+L'a, L'L) = (0,1) \rightarrow \begin{cases} a'+L'a=0 \\ LL'=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow L' = L^{-1}, \quad a' = -L^{-1}a \checkmark$$

$$(a,L)(a',L') = (a+La', LL') = (0,1) \rightarrow \begin{cases} a+La'=0 \\ LL'=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow L' = L^{-1}, \quad a' = -aL^{-1} \checkmark$$

۵) در دستگاه لخت S، مجموعه‌ای از موج تخت نوری با طول موج $\lambda$ به سمت منفی x جهت مشاهده‌گر در حال حرکت است.



مکان قله طول موج در رابطه $x = -ct + n\lambda$ $(n = \text{integer})$

مکان این قله ها را در فضا-زمان مینکوفسکی رسم کنید و با استفاده از تبدیل فعال لورنتز

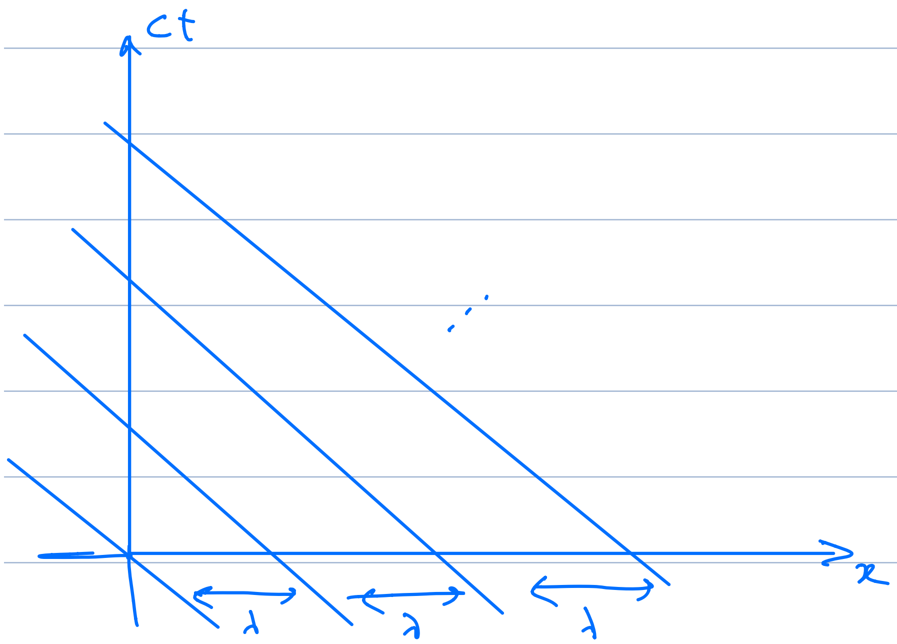
در دستگاه $S'$ ، طول موج از رابطه زیر داده می‌شود. این رابطه اثر دوپلر نسبی است.

$$\lambda' = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\,\lambda$$

تبدیل فعال :

$$\begin{cases} \xi = (t+x)/\sqrt{2} \\ \xi' = e^{-\phi}\xi \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \eta = (t-x)/\sqrt{2} \\ \eta' = e^{\phi}\eta \end{cases}$$

در فضای مینکوفسکی می‌توان رسم کرد :




با استفاده از تبدیلات فعال داریم :

$$\xi = (ct+x)/\sqrt{2} \quad , \quad \eta = (ct-x)/\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\,ct = (\xi+\eta) \longrightarrow ct = \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}\,x = (\xi-\eta) \longrightarrow x = \frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}$$

از رابطه $x = -ct + n\lambda$ داریم:

$$\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}} = -\left(\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}\right) + n\lambda$$

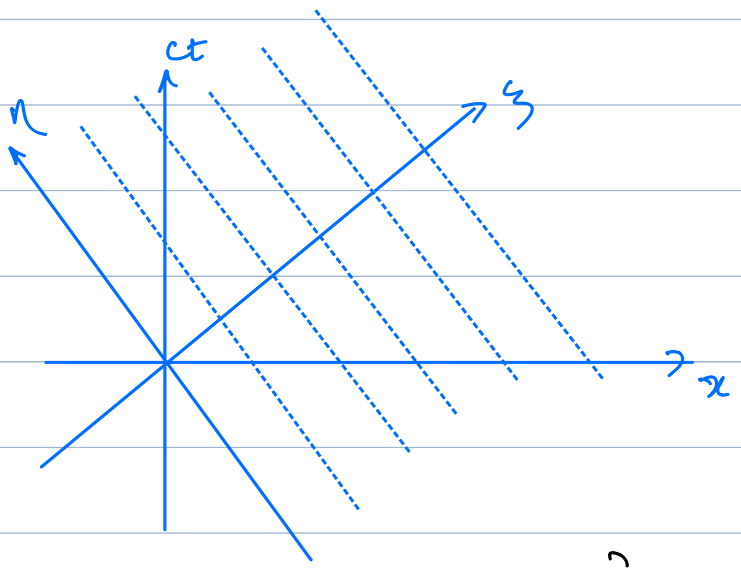
$$\rightarrow 2\xi = +n\sqrt{2}\lambda \rightarrow n\lambda = \sqrt{2}\xi$$

تحت تبدیل داریم:

$$\xi' = e^{-\phi}\xi \rightarrow n\lambda' = \sqrt{2}\xi' = \sqrt{2}e^{-\phi}\xi = e^{-\phi}n\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda' = \lambda e^{-\phi} \qquad e^{-\phi} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

اکنون نمودار light-cone را رسم می‌کنیم.




۶) جهان خط یک ناظر در راستای چاربردار $u^\mu$ است. نشان دهید هر رویداد $x^\mu$ و $y^\mu$ تنها

هنگامی هم‌زمانند که $u\cdot(x-y) = 0$.

چاربردار سرعت را این گونه تعریف می‌کنیم: $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. اکنون نشان می‌دهیم به مولفه‌های این چاربردار

از قبل داشتیم. $v^\mu = \left(\frac{d(ct)}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)$. از طرفی $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$. از طرفی چاربردار سرعت نورگونه است زیرا:

$$v^\mu = \frac{dt}{d\tau}\left(c, \frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \gamma(c, v) \rightarrow v^\mu v_\mu = -c^2 < 0$$ چون [illegible] نورگونه است

اگر $v$ زمان‌گونه باشد، هر برداری مثل بردار $A$ بر $v$ عمود است تنها اگر $B$ فضاگونه باشد.

اثبات: فرض کنید $v$ و $A$ عمود باشند آنگاه $v^0 A^0 = \vec{v}\cdot\vec{A}$ و $|v^0| > \|\vec{v}\|$

در نتیجه $|v^0 A^0| = |\vec{v}\cdot\vec{A}| \le \|\vec{v}\|\,\|\vec{A}\|$ اما $|v^0| > \|\vec{v}\|$ بنابراین $|A^0| < \|\vec{A}\|$

پس $A$ فضاگونه است. می‌دانیم $x^\mu$ و $y^\mu$ دو رویداد هستند و برای اینکه هم‌زمان باشند

باید حتماً فضاگونه باشند و در این صورت حکم برقرار است.

۷) در یک برخورد دو ذره با تکانه‌های $q_1$ و $q_2$ قبل از برخورد و $p_1$ و $p_2$ بعد از برخورد می‌توان

دو کمیت ناوردای زیر را تعریف کرد:

$$\begin{cases} A = (q_1 + q_2)^2 \\ B = (q_1 - p_1)^2 \end{cases}$$

معنای هر کدام را در دستگاه آزمایشگاه $q_2^\mu = m_0 = 0$ و نیز در دستگاه مرکز جرم بیان کنید.

در دستگاه مرکز جرم:
$$A = (q_1 + q_2)^2 = (p_1 + p_2)^2$$

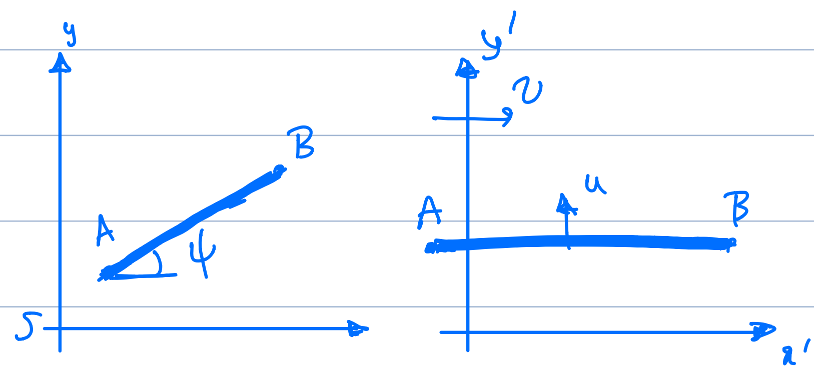
$$q_1 = \left(\frac{E_1}{c}, \vec{q}_1\right), \quad q_2 = \left(\frac{E_2}{c}, \vec{q}_2\right)$$

در دستگاه مرکز جرم بدیهتاً $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0$ بنابراین $\vec{q}_1 = -\vec{q}_2$

$$\longrightarrow A = \left(\frac{E_1 + E_2}{c}, \vec{q}_1 + \vec{q}_2\right)^2 =$$

۸) دو دستگاه $S$ و $S'$ در پیکربندی استاندارد قرار دارند. در دستگاه $S'$، میله‌ای موازی محور $x'$ در جهت $y'$ با سرعت $u$ حرکت می‌کند. نشان دهید که در دستگاه $S$، میله نسبت به محور $x$ زاویه‌ای $\phi$ درست می‌کند که $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\gamma u v}{c^2}\right)$.

شکل مسئله بدین گونه است:




از تبدیلات لورنتز داریم:

$$\begin{cases} y'_A = y'_0 + ut' \\ x'_A = \text{const.} \end{cases} \qquad \begin{cases} y'_B = y'_0 + ut' \\ x'_B = \text{const.} \end{cases}$$

بنابراین از تبدیلات لورنتز داریم:

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\rightarrow x_A = \gamma(x'_A + vt) \quad , \quad x_B = \gamma(x_B + vt)$$

$$\begin{cases} y_B = y_0 + ut' = y_0 + u\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_B\right) \\ y_A = y_0 + u\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_A\right) \end{cases}$$

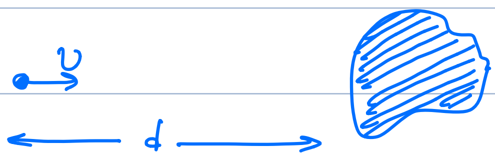
$$\rightarrow \tan\phi = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{u\gamma \frac{v}{c^2}(x_A - x_B)}{x_A - x_B} = \frac{-u\gamma v}{c^2}$$

۹) سفینه‌ای با سرعت نسبی $v$ در دستگاه لخت $S$ حرکت می‌کند. دقیقاً در مسیر این سفینه، سیارکی در سکون نسبت به دستگاه لخت قرار دارد. فاصله بین سفینه و سیارک در زمان $t=0$ در دستگاه لخت، $d$ است و زمان ویژه واکنش خلبان $\tau$ است.

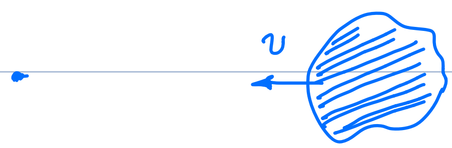
الف) در صورتی که خلبان سفینه هیچ واکنشی نشان ندهد، زمان برخورد از دید ناظر لخت چقدر است؟

ب) در صورتی که زمان برخورد طولانی‌تر از زمان واکنش خلبان باشد، امکان نجات وجود دارد. زمان برخورد را از دید سفینه بدست آورید.

ج) نتایج قسمت "ب" را براساس اتساع زمان و انقباض طول توضیح دهید.



الف) زمان برخورد: $\Delta T = d/v$



ب) $\Delta T = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x)$

$= \gamma \Delta t \Longrightarrow \frac{\Delta T}{\gamma} = \frac{d}{v\gamma} = \Delta t$

ج) با استفاده از انقباض طول داریم $d' = \frac{d}{\gamma}$ بنابراین $\Delta t = \frac{d}{\gamma v}$.

۱۰) میدان الکترومغناطیسی $\vec{E}(x^\mu)$ و $\vec{B}(x^\mu)$ را در یک نقطه فضا-زمان در نظر بگیرید.

کمیت های ناوردا زیر تعریف می‌شوند:

$$I_1 = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \overset{*}{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\vec{E}\cdot\vec{B}$$

نشان دهید الف) اگر $I_2=0$ و $I_1 \neq 0$ بسته به علامت $I_1$ می‌توان به دستگاهی رفت

که در آن یا $\vec{B}=0$ و یا $\vec{E}=0$.

ب) اگر $I_2 \neq 0$ ولی $I_1 = 0$، می‌توان به دستگاهی رفت که در آن $\vec{E} \propto \vec{B}$.

الف) اگر در دستگاهی $I_2 = 0$ آنگاه $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$ بنابراین در تمامی دستگاه ها نیز متعامدند

فرض کنید در دستگاهی $I_1 > 0$ یعنی $|\vec{E}|/c > |\vec{B}|$ پس می‌توان دستگاهی یافت که $\vec{E}$ صفر

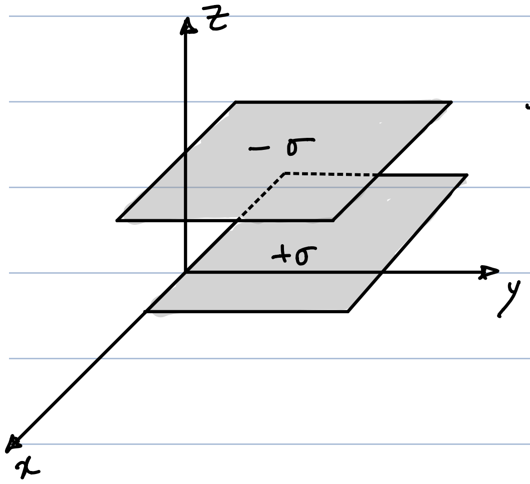
باشد ولی $\vec{B}$ صفر نباشد. برعکس اگر $I_1 < 0$ یعنی $|E|/c < |B|$ آنگاه می‌توان

دستگاهی یافت که $\vec{B}$ صفر باشد ولی $\vec{E}$ نباشد. بنابراین حکم ثابت می‌شود.

ب) اگر $I_1 = 0$ آنگاه $|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$ ولی اگر $I_2 \neq 0$ آنگاه $\vec{E}\cdot\vec{B} \neq 0$ بنابراین

با انتخاب دستگاهی مناسب می‌توان به حالتی رسید که $\vec{E} \propto \vec{B}$.

۱۱) خازنی را در نظر بگیرید که از دو صفحه تخت موازی با چگالی بار سطحی $\sigma$ و $-\sigma$ تشکیل شده است. ناظر ساکن نسبت به خازن میدان الکتریکی $\vec{E}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}_z$ را اندازه می‌گیرد که در آن $\hat{n}_z$ بردار یکه موازی محور $\hat{z}$ است. محورهای مختصات ناظر $S'$ موازی محورهای ناظر $S$ است و با سرعت $v$ نسبت به راستای محور $x$ حرکت می‌کند.




این ناظر چه میدان الکتریکی یا مغناطیسی را اندازه‌گیری می‌کند؟

الف) مقدار میدان $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را از روی تبدیلات لورنتس بدست آورید.

ب) همین مقدارها را با شهود فیزیکی و با استفاده از اثرهای نسبیتی مانند انقباض طول بدست آورید.

الف) از تبدیلات لورنتس داریم:

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel} & \vec{E}'_{\perp}=\gamma(\vec{E}_{\perp}+\vec{v}\times\vec{B}) \\ \vec{B}'_{\parallel}=\vec{B}_{\parallel} & \vec{B}'_{\perp}=\gamma(B_{\perp}-\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}) \end{cases}$$

برای ناظر $S$ می‌دانیم $\vec{B}=0$ , $\vec{E}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}_z$ بنابراین

$$\vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel}=0 \quad , \quad \vec{E}'_{\perp}=\gamma(\vec{E}_{\perp})=\frac{\gamma\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}_z$$

$$\vec{B}'_{\parallel}=\vec{B}_{\parallel}=0 \quad , \quad \vec{B}_{\perp}=-\frac{\gamma}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}=\mu_0\sigma\gamma v\,\hat{n}_y$$

ب) می‌دانیم تحت تبدیلات بار الکتریکی ثابت باقی می‌ماند. از طرفی سطح تغییرها می‌دهد به همین

دلیل چگالی بار سطحی تغییر می‌کند. از طرف دیگر حرکت چارچوب باعث می‌شود که صفحه را با جریان ببینیم

که میزان متناظری ایجاد کرده است. چارچوبی که در جهت $x$ حرکت می‌کند مساحت سطح را در جهات $y$ و

$z$ یکسان می‌بیند اما در جهت $x$ یک انقباض $\gamma$ دارد.

$$\sigma = \sigma'\frac{1}{\gamma} \rightarrow \sigma' = \gamma\sigma$$

$$= \frac{\gamma\sigma}{\varepsilon_0}, \quad B' = \mu_0 n I = \mu_0 \sigma \gamma v$$

۱۲) تحت تبدیلات $U(1)$ داریم $\phi \rightarrow \phi e^{i\alpha}$. با فرض کوچک بودن $\alpha$، جریان نوتر و بار پایستهٔ

مربوط به آن را برای هر لاگرانژی زیر بدست آورید.

الف) لاگرانژی کلاین گوردون حقیقی:
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m \phi^2$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m \phi^* \phi$$

الف) فرض کنید تحت تبدیلات داشته باشیم
$$\phi \rightarrow \bar{\phi} = \phi e^{i\alpha} \quad (\alpha \ll 1)$$

بنابراین
$$\phi \rightarrow \bar{\phi} \simeq \phi(1 + i\alpha)$$

از طرفی تحت تبدیلات باید کنش پایسته باشد:
$$\int_V \bar{\mathcal{L}}(x)\, d^4x = \int_V \mathcal{L}(x)\, d^4x$$

$$\longrightarrow \quad 0 = \int_V \left(\bar{\mathcal{L}}(x) - \mathcal{L}(x)\right) d^4x$$

تعریف می‌کنیم وردش را که این‌گونه باشد:

$$\delta\mathcal{L} \equiv \bar{\mathcal{L}}(x) - \mathcal{L}(x)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta(\partial_\mu \phi)$$

از طرفی طبق معادله اویلر-لاگرانژ داریم:

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta\phi_\alpha)$$

بنابراین

$$\Longrightarrow \quad \delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu \delta\phi = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right)$$

که وردش $\delta\phi$ تابع توسعه است به صورت زیر است:

$$\delta\phi \equiv \bar{\phi}(x) - \phi(x) = \phi(1+i\alpha) - \phi = i\alpha\phi$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \alpha \int d^4x\, \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} i\phi\right)$$

بنابراین انتگرال‌ده همواره صفر است در نتیجه

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

و جریان نوتری تعریف می‌شود:

$$J^\mu = i\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$$

$$\longrightarrow \quad J^\mu = i\phi \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m\phi^2\right)$$

$$= i\phi\,\partial^\mu\phi$$

ب) مانند بخش الف است با این تفاوت که داریم:

$$\delta\mathcal{L} \equiv \bar{\mathcal{L}}(x) - \mathcal{L}(x)$$

$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta(\partial_\mu\phi^*)$$

بنابراین معادله $J^\mu$ اینگونه است:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} i\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} i\phi^*$$

$$= i\phi\,\partial^\mu\phi^* - i\phi^*\partial^\mu\phi$$

۱۳) چگالی لاگرانژی الکترومغناطیس را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu$$

الف) با حرکت از این لاگرانژی نسبت به $A^\mu$ معادلات ناهمگن ماکسول را بدست آورید.

ب) با استفاده از این لاگرانژی، هامیلتونی الکترومغناطیس را بدست آورید. برای سادگی فرض کنید پتانسیل خارجی صفر است.

الف)

$$\delta\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} - \mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\mu}\delta A^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\mu)}\delta(\partial_\mu A^\mu)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ , \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

بنابراین برای چگالی لاگرانژی داریم:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu$$

برای معادله اویلر-لاگرانژ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial A_\mu/\partial x^\nu)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right) + J_\mu A^\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial A_\mu/\partial x^\nu)}\right) = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial A_\mu/\partial x^\nu)}\left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\sigma}\right)\left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\sigma}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial A_\mu/\partial x^\nu)}\left(2\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\lambda} - 2\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\sigma}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right) = -F_{\nu\mu} = F_{\mu\nu}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = J_\mu$$

ب) برای بدست آوردن هیلیتونی می‌توان از تعریف استفاده کرد:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial A_\mu/\partial t)} \frac{\partial A_\mu}{\partial t} - \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial A_\mu/\partial x^0)} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^0}$$

در بالا حساب کردیم که $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial A_\mu/\partial x^\nu)} = F_{\mu\nu}$ بنابراین:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial A_\mu/\partial x^0)} = F_{\mu 0} \longrightarrow \mathcal{H} = F_{\mu 0}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^0} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

اکنون نوبت جایگذاری است:

$$\mathcal{H} = F_{\mu 0}\left(F_{0\mu} + \frac{\partial A_0}{\partial x^\mu}\right) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$= -F_{0\mu}\left(F_{0\mu} + \frac{\partial A_0}{\partial x^\mu}\right) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$= -F_{0\mu}F_{0\mu} - F_{0\mu}\frac{\partial A_0}{\partial x^\mu} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$= E^2 - F_{0i}\frac{\partial A_0}{\partial x^i} + \frac{1}{2}(B^2 - E^2)$$

$$= \frac{1}{2}(E^2 + B^2) + E_i\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

۱۴) معادله حرکت یک متحرک با شتاب ثابت در نسبیت خاص را به‌دست آورید. سپس نشان دهید که

در حد $c \to \infty$، معادله حرکت تبدیل به $x = \frac{1}{2}at^2$ می‌شود.

در این سؤال می‌خواهیم به بررسی حرکت شتاب‌دار از دیدگاه نسبیت خاص بپردازیم. از معادلات لورنتز داریم:

$$dx' = \gamma(dx - v\,dt) \qquad dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \longrightarrow \frac{dx'}{dt'} = \frac{dt\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\gamma\, dt\left(1 - v\frac{dx}{dt}\frac{1}{c^2}\right)}$$

$$\longrightarrow u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \quad u_y' = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}, \quad u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}$$

همچنین تعریف می‌کنیم:

$$D = 1 - \frac{v u_x}{c^2}$$

حال از سرعت در راستای $x$، دیفرانسیل‌گیری می‌کنیم. داریم:

$$du_x' = \frac{du_x D - \left(-\frac{v}{c^2}du_x\right)(u_x - v)}{D^2} = \frac{(du_x)D + \frac{v}{c^2}(u_x - v)du_x}{D^2}$$

$$dt' = \gamma\, dt\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right) = \gamma D\, dt$$

$$\longrightarrow a_x' = \frac{1}{\gamma D^3}\left(\frac{du_x}{dt}D + \frac{v}{c^2}(u_x - v)\frac{du_x}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma D^3}a_x\left(D + (u_x - v)\frac{v}{c^2}\right) \longrightarrow a_x' = \frac{1}{\gamma^3 D^3}a_x$$

همین کار را برای $a_y$ و $a_z$ انجام می‌دهیم. آنگاه:

$$a_y' = \frac{1}{\gamma^2 D^2}a_y + \frac{a_x u_y v}{c^2\gamma^2 D^3}, \quad a_z' = \frac{1}{\gamma^2 D^2}a_z + \frac{a_x u_z v}{c^2\gamma^2 D^3}$$

حال فرض کنید که دستگاه $O'$ را بر روی یک ذره شتابدار قرار می‌دهیم. دراین دستگاه از پیکربندی استاندارد پیروی می‌کند. بنابراین:

$$D = 1 - \left.\frac{vu_x}{c^2}\right|_{u_x=v} = \gamma^{-2}$$

درنتیجه،

$$a_x' = \left.\frac{a_x}{\gamma^3 D^3}\right|_{u_x=v} = \gamma^3 \frac{du_x}{dt} = \gamma^3 \frac{dv}{dt}$$

حال داریم:

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma(v)\, v\right) = \gamma^3 \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} v\right) = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{2}{c^2}\frac{dv}{dt}\right)v^2 + \frac{dv}{dt}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\gamma(v)\, v\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left(\frac{v^2}{c^2}\frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dt} - \frac{v^2}{c^2}\frac{dv}{dt}\right) = \gamma^3 \frac{dv}{dt}$$

درنتیجه:

$$\alpha = \gamma^3 \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\gamma(u)\, u\right)$$

اگر $\alpha$ ثابت باشد داریم:

$$\alpha t = \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} u$$

$$\rightarrow \alpha^2 t^2 = \frac{u^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} \rightarrow \alpha^2 t^2 - \frac{\alpha^2 t^2 u^2}{c^2} = u^2$$

$$\rightarrow u^2\left(1+\frac{\alpha^2 t^2}{c^2}\right) = \alpha^2 t^2 \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha t}{\left(1+\frac{\alpha^2 t^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\rightarrow x = \int \frac{\alpha t\, dt}{\left(1+\frac{\alpha^2 t^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{c\to\infty} x = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

۱۵) فرض کنید متحرکی در مسیر $x^2 - c^2t^2 = X^2 = cte$ حرکت می‌کند. در صورتی که سرعت: $u$،

تندی $\phi$، زمان همراه $\tau$ و شتاب همراه: $\alpha$ باشد. روابط زیر را اثبات کنید.

$$u = \frac{c^2 t}{x} \qquad \gamma(u) = \frac{\alpha x}{c^2} \quad , \quad \phi(u) = \alpha\tau/c$$

$$u/c = \tanh\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) \quad , \quad \gamma(u) = \cosh\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right)$$

$$\frac{\alpha t}{c} = \sinh\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right) \quad \text{و} \quad \frac{\alpha x}{c^2} = \cosh\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right)$$

می‌دانیم که $x^2 - c^2t^2 = X^2$ بنابراین با مشتق‌گیری داریم: $2x\frac{dx}{dt} - 2c^2t = 0$

بنابراین داریم: $\rightarrow u = \frac{c^2 t}{x}$

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{\alpha x}{c^2} \rightarrow \frac{c^3}{\sqrt{c^2-u^2}} \overset{?}{=} \alpha x$$

کافیست نشان دهیم تساوی آخر برقرار است.

$$\alpha = \gamma^3 \frac{du}{dt} = \gamma^2 \gamma \frac{du}{dt} = \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} \times \frac{c}{\sqrt{c^2-u^2}} \frac{d}{dt}\left(\frac{c^2 t}{x}\right) = \frac{c^3}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\sqrt{c^2-u^2}} \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{x}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2}u = \frac{1}{x} - \frac{u}{x^2}\frac{xu}{c^2} = \frac{1}{x} - \frac{u^2}{xc^2} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)$$

$$\rightarrow \alpha x = \frac{c^3}{\sqrt{c^2-u^2}} \checkmark$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{d\phi}\frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{\gamma}\frac{d\phi}{d\tau}\frac{du}{d\phi}\rightarrow \alpha=\gamma^3\frac{du}{dt}=\gamma^2\frac{d\phi}{d\tau}\frac{du}{d\phi}$$

$$\tanh\phi=\frac{u}{c}\rightarrow \frac{du}{d\phi}=c(1-\tanh^2\phi)=c\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=\frac{c}{\gamma^2}$$

$$\rightarrow \alpha=c\frac{d\phi}{d\tau}\rightarrow \frac{\alpha}{c}=\frac{d\phi}{d\tau}\rightarrow \phi=\int\frac{\alpha}{c}d\tau=\frac{\alpha\tau}{c}\qquad \underline{\underline{\alpha=\text{Const}}}\ \checkmark$$

تعریف

$$\rightarrow \tanh\phi=\frac{u}{c}\rightarrow \tanh\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right)=\frac{u}{c}\ \checkmark$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\phi}}=\cosh\phi\rightarrow \gamma=\cosh\left(\frac{\alpha\tau}{c}\right)\ \checkmark$$

$$\cosh^2(\phi)-1=\sinh^2\phi\rightarrow \gamma^2-1=\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}-1=\frac{c^2}{c^2-u^2}-1=\frac{u^2}{c^2-u^2}$$

$$\rightarrow \sinh\phi=\frac{u}{\sqrt{c^2-u^2}}=\frac{u}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{u\gamma}{c}=\frac{\alpha x}{c^2}\cdot\frac{c^2t}{cx}=\frac{\alpha t}{c}\ \checkmark$$

۱۶) حرکت ذره باردار، از معادله های زیر پیروی می‌کند.

$$\begin{cases} f^\mu=m\dfrac{du^\mu}{ds}=\dfrac{dp^\mu}{ds}\\ f^\mu=qF^{\mu\nu}u_\nu\end{cases}$$

اگر $F^{\mu\nu}$ یک میدان ثابت باشد، انتگرال حرکت از معادله های بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$u(s)=\exp\left(\frac{q}{m}Fs\right)u(0)$$

نشان دهید که $\exp\left(\frac{q}{m}\cdot \tilde{F} s\right)$ ماتریس یک تبدیل لورنتس است. $m$ جرم ذره و $q$ بار آن است.

$$\sum_\nu q F^{\mu\nu} u_\nu = m \frac{du^\mu}{ds} \longrightarrow \sum_\nu \frac{q}{m} F^{\mu\nu} u_\nu = \frac{du^\mu}{ds}$$

$$\frac{q}{m}\begin{pmatrix} & \tilde{F} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است یعنی حدس می‌زنیم:

$$\longrightarrow u(s) = \exp(\tilde{\alpha} s)\, u(0)$$

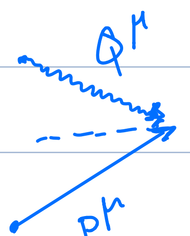
$$\longrightarrow \frac{q}{m}\left(\tilde{F}\right)\left[u(0)\right] = \left[\tilde{\alpha}\right]\left[u(0)\right] \longrightarrow \tilde{\alpha} = \frac{q}{m}\tilde{F}$$

$$\Longrightarrow u(s) = \exp\left(\frac{q}{m}\tilde{F} s\right) u(0) \quad \checkmark$$

17) پروتونی با مشخصات $m_p \simeq 1\,GeV, \gamma = 100$ با زاویه $45^\circ$ با یک فوتون برخورد می‌کند.

طبق واکنش روبرو $\gamma + p \longrightarrow p + \pi^0$ در اثر واکنش یک پیون با جرم سکون $m_\pi$

تولید می‌شود. انرژی آستانه فوتون را برای انجام واکنش حساب کنید. $\left(m_\pi = m_p/6\right)$




از پایستگی تکانه خطی داریم: $p^\mu + Q^\mu = p'^\mu$

از قبل می‌دانیم: $p^\mu p_\mu = -m_p^2 c^2, \quad p'^\mu p'_\mu = -(m_p + m_\pi)^2 c^2$

$$Q_\mu Q^\mu = 0$$

انرژی آستانه، انرژی است که در آن ذرات خروجی از برهم کنش، باهم حرکت کنند.

$$\begin{cases} q^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)(1, \cos\theta, \sin\theta, 0) \\ p^\mu = (\gamma m_p c, m\gamma v\cos\theta, m\gamma v\sin\theta, 0) \end{cases}$$

$$\rightarrow (p^\mu + q^\mu)(p_\mu + q_\mu) = p'^\mu p'_\mu = -(m_p+m_\pi)^2 c^2$$

$$p^\mu p_\mu + q^\mu q_\mu + p^\mu q_\mu + q^\mu p_\mu = -(m_p+m_\pi)^2 c^2$$

$$= -m_p^2 c^2 + 0 + (\gamma m_p c, m\gamma v\cos\theta, m\gamma v\sin\theta, 0)\frac{E}{c}\begin{pmatrix}1\\ \cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

$$+\frac{E}{c}\begin{pmatrix}1 & \cos\theta & \sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma m_p c\\ \gamma m v\cos\theta\\ \gamma m v\sin\theta\\ 0\end{pmatrix} = -(m_p+m_\pi)^2 c^2$$

$$\rightarrow 2\frac{E}{c}\left(-\gamma m_p c + m_p\gamma v\cos^2\theta + m_p\gamma v\sin^2\theta\right) = [m_p^2 - (m_p+m_\pi)^2]c^2$$

$$\rightarrow E_{\text{آستانه}} = \frac{(m_p^2 - (m_p+m_\pi)^2)c^3}{2(m_p\gamma v - \gamma m_p c)} = \frac{[-m_p^2 + (m_p+m_\pi)^2]c^2}{2m_p\gamma(c-v)}$$

حال چون $\gamma$ داریم جایگذاری می‌کنیم

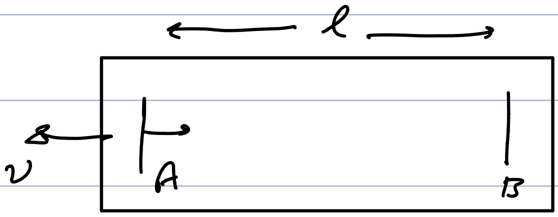
$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{v^2}{c^2} \rightarrow v = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \rightarrow E_{\text{آستانه}} = \frac{[-m_p^2 + (m_p+m_\pi)^2]c^2}{2m_p\gamma c\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\right)}$$

۱۸) یک پتانسیل کپلری به شکل $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ را در نظر بگیرید. مسأله حرکت ذره ای به جرم $m$ در این پتانسیل را به طور کامل با استفاده از دینامیک نسبیتی مورد بحث قرار دهید. در این راستا معادله مسیر مربوطه در مختصات قطبی، مکان ذره بعنوان تابعی از زمان و از جمله انرژی کل و تکانه زاویه ای را محاسبه کنید.

۱۹) فرض کنید اتاقی وجود داشته باشد. در زمان $t=0$ ناظر $A$ یک سیگنال به ناظر $B$ که در فاصله

$l$ قرار دارد ارسال می‌کند. $B$ زمان ورود سیگنال را ثبت می‌کند. فرض کنید سیستم با سرعت $v$ نسبت




به اتر در جهت نشان داده شده حرکت می‌کند.

اکنون فرض کنید که آزمایشگاه نسبت به سرعت $180^\circ$ دوران کند طوری که جای $A$ و $B$

عوض شود. در زمان $t=T$، $A$ سیگنال دومی به $B$ ارسال می‌کند.

الف) نشان دهید که بازه بین دو سیگنال از ناظر $B$ برابر با $T+\Delta T$ باشد. اگر تا مرتبه

$(\frac{v}{c})^2$ خواهیم داشت:
$$\Delta T = \frac{2lv}{c^2}$$

ب) فرض کنید که آزمایش بین یک ساعت روی زمین و ساعتی در ماهواره در مدار زمین انجام می‌گیرد.

برای مداری با دوره تناوب 24 ساعت داریم $l=\frac{5}{6}R_e$ که $R_e$ شعاع زمین است.

کم‌ترین مقدار $v$ که در این آزمایش با چنین ساعتی قابل آشکارسازی است چقدر است؟ دقت

ساعت اتمی $\underline{1}$ در $\underline{10^{14}}$ است.

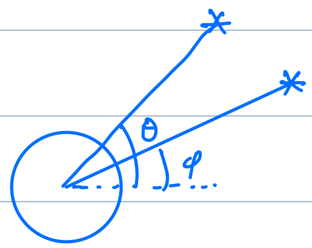
الف)

$$\Delta T = \frac{l}{c-v} - \frac{l}{c+v} = \frac{2lv}{c^2-v^2} = \frac{2lv}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} = \frac{2lv}{c^2} + \frac{2lv^3}{c^3} = \Delta T$$

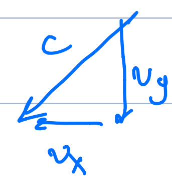
ب)

$$l = \frac{5}{6}R_e \longrightarrow v = \frac{c^2\Delta T}{2l} = \frac{3c^2\Delta T}{5R_e}$$

۲۰) نشان دهید جرم خورشید $M$ با رابطه $M = \frac{\alpha^2 c^2 R_\oplus}{G}$ به زاویه ابیراهی $\alpha$ ربط دارد. $R_\oplus$ شعاع زمین است. مقدار عددی جرم خورشید را با این رابطه بدست آورید.




$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \longrightarrow v_x = c\sin\theta \ , \ v_y = c\cos\theta$$




اکنون تبدیلات لورنتز را اعمال می‌کنیم:

$$v_x' = v_x + v \ , \ v_y' = v_y \longrightarrow \tan\varphi = \frac{v_y'}{v_x'} = \frac{c\sin\theta}{c\cos\theta + v} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{v}{c}}$$

در مسأله ابیراهی خاصتاً $\theta \simeq \frac{\pi}{2}$ بنابراین:

$$\cot\theta \simeq \frac{v}{c} \rightarrow \tan(\theta-\varphi) \simeq \frac{v}{c}$$

$$v \ll c \rightarrow \theta - \varphi \simeq \frac{v}{c} \simeq \alpha$$

حال نوبت آن است که نشان دهیم که رابطه سؤال برقرار است:

$$\frac{GmM_\odot}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \rightarrow v^2 = \frac{GM_\odot}{R} \longrightarrow \frac{\alpha^2 c^2 R}{G} = M_\odot$$

۲۱) سفینه‌ای با طول همراه $L$ با سرعت $v$ در حال حرکت است. شخصی جلوی سفینه کنار ساعتی که زمان صفر را نشان می‌دهد ایستاده است. با توجه به عقب افتادن ساعت‌های جلویی می‌دانیم عقب سفینه زمان $\frac{Lv}{c^2}$ را نشان می‌دهد. نظر شما در مورد گزاره زیر چیست؟

« در دستگاه سفینه شخص از جلوی سفینه به عقب سفینه می‌رود طوری که قبل از اینکه ساعت عقب به زمان $\frac{Lv}{c^2}$ برسد عقب سفینه باشد. در نتیجه شما روی زمین می‌بینید که زمانی که ساعت جلوی صفر و ساعت عقب $\frac{Lv}{c^2}$ را نشان می‌دهد، شخص هم زمان هم جلوی سفینه هم عقب سفینه حضور دارد. »

در بخشی از جمله بالا آمده است که قبل از آن ساعت عقب به $\frac{Lv}{c^2}$ برسد فرد به آن رسیده است

یعنی به عبارتی: $\frac{L}{u} < \frac{Lv}{c^2} \rightarrow \frac{c^2}{v} < u$

که واضحاً امکان پذیر نیست چرا که $u \not< c$.

۲۲) قطار اول با طول همراه $L$ با سرعت $v$ به سمت راست و قطار دوم با طول همراه $2L$ با سرعت $v$ به چپ حرکت می‌کند. چقدر طول می‌کشد تا از هم عبور کنند؟

الف) از دید قطار اول ب) از دید قطار دوم ج) در دستگاه زمین

د) نشان دهید که ویژه زمان در سه چارچوب بالا یکی است.

الف) از رابطه جمع سرعت نسبی داریم:

$$u = \frac{v+v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

از طرفی طول انقباض طول $\frac{2L}{\gamma(u)}$.

$$\rightarrow \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}$$

$$\rightarrow \Delta t_1 = \frac{L + \frac{2L}{\gamma(u)}}{u} = L\left(\frac{3-v^2}{2v}\right)$$

ب) در این بخش مانند بخش قبلی است با این تفاوت که:

$$\Delta t_2 = \frac{2L + \frac{L}{\gamma(u)}}{u} = L\left(\frac{3+v^2/c^2}{2v}\right)$$

ج)

$$\Delta t_3 = \frac{3L/\gamma(u)}{v+v} = \frac{3L}{2v\gamma(u)}$$

د) اینشتین فواصل ویژه زمان را بدست آوریم. می دانیم:

$$\Delta \tau^2 = \Delta t^2 - \frac{1}{c^2}\Delta x^2$$

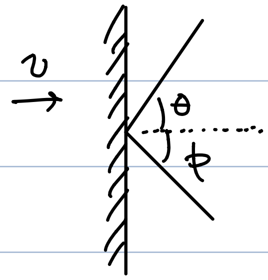
$$\Delta x_1 = L, \quad \Delta x_2 = 2L, \quad \Delta x_3 = \left|\frac{L}{\gamma(v)} - v\Delta t_3\right| = \left|\frac{L}{\gamma(v)} - \frac{3L}{2\gamma(v)}\right|$$

$$= \left|\frac{L}{2\gamma v}\right|$$

با کمی محاسبه می توان نشان داد که $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2 = \Delta\tau_3$

۲۳) آینه‌ای تخت در جهت عمود بر صفحه‌اش با سرعت $v$ در حال حرکت است. پرتوی نوری با فرکانس $\nu_1$

و زاویه تابش $\theta$ به آینه برخورد می‌کند. سپس با زاویه بازتاب $\phi$ و فرکانس $\nu_2$ بازتاب می‌شود.




نشان دهید رابطه زیر بین زاویه تابش و بازتاب برقرار است:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{c+v}{c-v}\tan\frac{\phi}{2}$$

همچنین بین فرکانس‌ها رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{c+v\cos\theta}{c-v\cos\phi} = \frac{c\cos\theta+v}{c\cos\phi-v}$$

در دستگاه آینه زاویه ورودی و خروجی یکسان است.

پرتوی ورودی

$$\vec{u}_i = -\cos\phi\,\hat{x} - \sin\phi\,\hat{y} \quad , \quad \vec{u}_f = \cos\phi\,\hat{x} - \sin\phi\,\hat{y} \longrightarrow$$ پرتوی خروجی

اکنون طبق قانون جمع سرعت داریم:

$$u'_{x_i} = \frac{-\cos\phi + v}{1-\frac{v}{c}\cos\phi} \quad , \quad u'_{x_f} = \frac{\cos\phi + v}{1+\frac{v}{c}\cos\phi}$$

$$u'_{y_i} = \frac{-\sin\phi}{\gamma(1-\frac{v}{c}\cos\phi)} \quad , \quad u'_{y_f} = \frac{-\sin\phi}{\gamma(1+\frac{v}{c}\cos\phi)}$$

$$\rightarrow \vec{u}_i{}' = u'_{x_i}\hat{x} + u'_{y_i}\hat{y} \quad , \quad \vec{u}_f{}' = u'_{x_f}\hat{x} + u'_{y_f}\hat{y}$$

$$= -\cos\theta\,\hat{x} - \sin\theta\,\hat{y} \qquad\qquad = \cos\phi\,\hat{x} - \sin\phi\,\hat{y}$$

$$\rightarrow \cos\theta = \frac{\cos\psi - v/c}{1-\frac{v}{c}\cos\psi} \quad , \quad \sin\theta = \frac{\sin\psi}{\gamma(1-\frac{v}{c}\cos\psi)}$$

$$\cos\phi = \frac{\cos\psi + v/c}{1+\frac{v}{c}\cos\psi} \quad , \quad \sin\phi = \frac{\sin\psi}{\gamma(1+\frac{v}{c}\cos\psi)}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta+1} = \frac{\frac{\sin\psi}{\gamma(1+\frac{v}{c}\cos\psi)}}{1+\frac{\cos\psi-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}\cos\psi}} \leftarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+1}$$ از طرفی داریم

$$\rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\gamma(1-\frac{v}{c})}\tan\frac{\psi}{2}$$

$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{\sin\phi}{1+\cos\phi} = \frac{\sin\psi/\gamma(1+\frac{v}{c}\cos\psi)}{1+\frac{\cos\psi+v/c}{1+\frac{v}{c}\cos\psi}} = \frac{1}{\gamma(1+\frac{v}{c})}\tan\frac{\phi}{2}$$

$$\rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\gamma(1+\frac{v}{c})}\cdot\frac{1+v}{1-v}\tan\frac{\phi}{2} = \frac{1+v}{1-v}\tan\frac{\phi}{2}$$

از پایستگی تکانه داریم :

$$h\nu_1\sin\theta = h\nu_2\sin\phi \rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{1+v/c\cos\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}$$

$$\frac{c+v\cos\theta}{c-v\cos\phi}=\frac{1+\frac{v}{c}\,\dfrac{\cos\phi-v/c}{1-v/c\,\cos\phi}}{1-v\,\dfrac{\cos\phi+v/c}{1+\frac{v}{c}\cos\phi}}=\frac{1+\frac{v}{c}\cos\phi}{1-\frac{v}{c}\cos\phi}=\frac{\nu_1}{\nu_2}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\frac{c\cos\theta+v}{c\cos\phi-v}=\frac{v+\dfrac{\cos\phi-v/c}{1-\frac{v}{c}\cos\phi}}{-v+\dfrac{\cos\phi+v/c}{1+\frac{v}{c}\cos\phi}}=\frac{1+\frac{v}{c}\cos\phi}{1-\frac{v}{c}\cos\phi}=\frac{\nu_2}{\nu_1}$$

۲۴) یک الکترون سریع با جرم سکون $m$ و سرعت $u$ به سمت هسته‌ای ساکن با جرم سکون $M$ شلیک می‌شود.

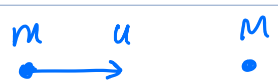
درنتیجه این برخورد یک فوتون با فرکانس $\nu$ تابش می‌شود. نشان دهید بیشینه انرژی که فوتون حاصل

می‌تواند داشته باشد برابر است با:

$$h\nu=\frac{mMc^2(\gamma(u)-1)}{M+m\gamma(u)(1-u/c)}$$

و زمانی رخ می‌دهد که الکترون و هسته پس از برخورد نسبت به هم سرعتی نداشته باشند و فوتون در

جهتی که الکترون قبل از برخورد حرکت داشت، تابش کند.




$$P_e^{\mu}+P_n^{\mu}=Q^{\mu}+P_e'^{\mu}+P_n'^{\mu}$$

$$P_e^{\mu}P_{e\mu}=P_e'^{\mu}P'_{e\mu}=-m^2c^2$$

$$P_n^{\mu}P_{n\mu}=P_n'^{\mu}P'_{n\mu}=-M^2c^2$$

$$Q^{\mu}Q_{\mu}=0$$

$$\rightarrow \quad P_e^{\mu}+P_n^{\mu}-Q^{\mu} = P_e'^{\mu}+P_n'^{\mu}$$

اکنون دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$(P_e^{\mu}+P_n^{\mu}-Q^{\mu})(P_{e\mu}+P_{n\mu}-Q_{\mu}) = (P_e'^{\mu}+P_n'^{\mu})(P'_{e\mu}+P'_{n\mu})$$

اکنون در معادله بالا، معادله‌های روبرو را جایگذاری می‌کنیم:

$$P_e^{\mu} = \gamma m(c, v) \quad , \quad P_n^{\mu} = M(c,0), \quad Q^{\mu} = \frac{h\nu}{c}(1, \hat{n})$$

با کمی محاسبه داریم:

$$h\nu = \frac{mMc^2(\gamma-1)}{M+m\gamma-\gamma m\frac{\vec{u}\cdot\hat{n}}{c}}$$

وقتی مخرج کمینه گردد، $\nu$ بیشینه می‌شود بنابراین:

$$h\nu = \frac{mMc^2(\gamma-1)}{M+m\gamma(1-\frac{u}{c})}$$

۲۵) سیم پیچی طولانی با تعداد دور سیم بر واحد طول $n$ و جریان $I$، در دستگاه مختصات $F$ به شکل زیر وجود دارد. اگر سیم پیچ در جهت مثبت محور $x$ با سرعت $v$ در حال حرکت باشد، میدان الکتریکی و مغناطیسی درون این سیم پیچ را در دستگاه $F$ و دستگاه سکون سیم پیچ بیابید

جواب در صفحه الکترودینامیک وبسایت گریفیث موجود است.

۲۶) در حالت کلی لاگرانژی $\mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\alpha \phi^\alpha)$ می‌تواند تقارنی داشته باشد که تحت

تبدیلات آن ناوردا نباشد بلکه مشتق کامل شود. یعنی تحت تبدیلات

$$\delta\phi^\alpha = \epsilon^i h_i^\alpha(\phi)$$

تغییرات لاگرانژی مشتق کامل شود:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}(\epsilon^i \Lambda_i^\alpha)$$

که $\Lambda_i^\alpha$ تابعی است که می‌توان آن را از میدان مشتق آن و مختصات مستقیم یافته محاسبه کرد.

نشان دهید جریان پیوسته‌ای وجود دارد که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\epsilon^i j_i^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^\alpha)}\delta\phi^\alpha - \epsilon^i \Lambda_i^\alpha$$

به عبارتی برای مسئله داریم: $\phi^\alpha(x^\mu) \longrightarrow \bar{\phi}^\alpha(x^\mu) = \phi^\alpha(x^\mu) + \epsilon^i h_i^\alpha(x^\mu)$

تحت تبدیل کنش ناورداست بنابراین:

$$\int_V \bar{\mathcal{L}}(x)\, d^4x = \int_V \mathcal{L}(x)\, d^4x$$

که $V$ حجم فضا-زمان است.

$$\rightarrow 0 = \int_V \left[ \bar{\mathcal{L}}(x) - \mathcal{L}(x) \right] d^4x$$

$$\delta\mathcal{L} \equiv \bar{\mathcal{L}}(x) - \mathcal{L}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha}\delta\phi^\alpha(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^\alpha)}\delta\left(\partial_\alpha \phi^\alpha(x)\right)$$ تعریف می‌کنیم:

$$\delta(\partial_\alpha \phi^\alpha) = \partial_\alpha(\delta\phi^\alpha)$$ از جابجایی اوپراتورها می‌توان نوشت:

بنابراین:

$$\delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^\alpha)}\right)\delta\phi^\alpha(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^\alpha)}\partial_\mu\left(\delta\phi^\alpha(x)\right)$$

$$= \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^\alpha)}\delta\phi^\alpha(x)\right)$$

از طرفی

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\alpha\left(\epsilon^i \Lambda_i^{\ \alpha}\right) = \partial_\alpha\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^\alpha)}\delta\phi^\alpha\right)$$

$$\rightarrow \delta\phi^\alpha(x) = \bar{\phi}^\alpha(x) - \phi^\alpha(x) = \epsilon^i h_i^{\ \alpha}$$

$$\rightarrow \partial_\alpha\left(\epsilon^i h_i^{\ \alpha}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^\alpha)}\right) = \delta\mathcal{L} = \partial_\alpha\left(\epsilon^i \Lambda_i^{\ \alpha}\right)$$

$$\partial_\alpha\left(\epsilon^i\left(-\Lambda_i^{\ \alpha} + h_i^{\ \alpha}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^\alpha)}\right)\right) = 0 \,, \quad \partial_\alpha\left(\epsilon^i J_i^{\ \alpha}\right) = 0$$

پیوستگی جریان

$$\longrightarrow \quad J_i^{\alpha} = h_i^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^{\alpha})} - \Lambda_i^{\alpha}$$