

به نام خدا



دانشکده فیزیک

درس مکانیک تحلیلی ۲
نیم سال دوم ۱۳۹۷-۱۳۹۸
دکتر باغرام

امتحان پایان ترم

- لطفا نام، نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را بر روی برگه مرقوم فرمایید.
- ساعت شروع امتحان ۹ صبح است.
- مدت امتحان ۳ ساعت است.
- این امتحان ۷ امتیاز از نمره کل درس را تشکیل می دهد.
- امتحان شامل ۶ سوال است: امتیاز هر سوال در ابتدای آن درج شده است.
- برای دریافت نمره کامل کافی است ۷۰ امتیاز از ۹۰ امتیاز امتحان را کسب کنید.
- جواب قسمت ها را در ادامه سوال داده شده است تا بتوانید مساله را ادامه دهید.

سوال ۱) سوال های کوتاه از مکانیک کلاسیک (۱۲ امتیاز)

- الف) با استفاده از تعریف گروه پواسون ها، معادلات همیلتون را بدست آورید.
- ب) شتاب جاذبه گرانشی موثر در قطب های زمین با استوا چقدر تفاوت دارد؟
- ج) با فرض همگنی زمان و همگنی و همسانگردی فضا، ارتباط بین ویژگی های لاگرانژی سیستم و کمیت های پیوسته را بنویسید.
- د) با استفاده از وردش از کنش $S = \int L(q, \dot{q}) dt$ معادله همیلتون-ژاکوبی را بدست آورید.

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t)$$

سوال ۲) سیالات، محیط های پیوسته و امواج! (۱۶ امتیاز)

- هدف این سوال به دست آوردن معادلات میدان حاکم بر اختلالات در یک سیال (معادله موج) است. در این راستا سیالی را فرض کنید که میدان چگالی آن $\rho(\mathbf{x}, t)$ و میدان سرعت آن $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ باشد.
- الف) نشان دهید که رابطه پایستگی جرم به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}$$

- ب) حال المان حجمی از سیال dV را در نظر بگیرید که به آن نیروی دیفرانسیلی $d\mathbf{F} = (-\nabla p + \rho \mathbf{g})dV$ وارد می شود که p فشار وارد به المان و \mathbf{g} شتاب گرانشی است. با استفاده از قانون دوم نیوتون و تعریف مشتق کامل زمانی نشان دهید که معادله

اویلر برای سیال بدون و شکسانی (viscosity) که معادل حالت خاصی از رابطه Navier-Stokes است به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$$

ج) در نگاهی دیگر سیال را می‌توانیم با کمیت‌های ترمودینامیکی مانند فشار $p(\mathbf{x}, t)$ و دما $T(\mathbf{x}, t)$ توصیف کنیم. در صورتی که سیال مورد بحث تک‌مولفه‌ای باشد (بدین معنی که از یک نوع ماده تشکیل شده باشد) می‌توان از معادله حرکت $p = P(\rho, T)$ نیز برای توصیف سیال و تکمیل معادلات حاکم بر آن استفاده کرد. حال فرض کنید که نیروی گرانش اهمیت نداشته باشد و سیال در نزدیکی حالت تعادل باشد. بدین معنی که چگالی، فشار و سرعت آن را در هر المان از آن به صورت زیر نوشت:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(\mathbf{x}, t); \quad p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(t) + \delta p(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

که $\bar{\rho}(t)$ ، $\bar{p}(t)$ و $\bar{\mathbf{v}}(t) = 0$ چگالی، فشار و سرعت میانگین سیال است و $\delta\rho(\mathbf{x}, t)$ ، $\delta p(\mathbf{x}, t)$ و $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ اختلالات در هر یک از کمیت‌هاست. با توجه به اختلالات بالا و تا مرتبه یک اختلال نشان دهید که معادله پیوستگی و نویر-استوکس به شکل زیر درمی‌آیند:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \bar{\rho}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad \bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \delta p$$

د) حال می‌خواهیم نشان دهیم که اختلالات در چگالی سیال به صورت موج در آن منتشر می‌شود. برای این که معادلات موج را بدست آورید، با استفاده از مشتق زمانی معادله پیوستگی اختلالی و استفاده از معادله نویر-استوکس رابطه زیر را بدست آورید.

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \delta\rho$$

که c سرعت نور است و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

برای تفکر در خانه! جواب به این قسمت الزامی نیست) از آنجایی که در تعریف سرعت صوت در قسمت قبل از مشتق جزئی استفاده کردیم، این سوال مطرح می‌شود که سرعت سیال در چه شرایط ترمودینامیکی تعریف می‌شود. به طور کل دو نوع سرعت: سرعت همدم و سرعت صوت بی‌دررو داریم. در مورد فیزیک هرکدام از این سیال‌ها می‌توان بحث کرد.

سوال ۳) نیروی مرکزی و پراکندگی (۱۰ امتیاز)

الف) لاگرانژی یک جسم را در نیروی مرکزی با مختصات قطبی (r, θ) بدست آورید و انرژی این سیستم E را محاسبه کنید. سپس نشان دهید که معادله حرکت در نیروی مرکزی به صورت زیر است:

$$\theta(r) = \int \pm \frac{l/r^2 dt}{\sqrt{2\mu(E - U(r) - l^2/2\mu r^2)}}$$

که $l = \mu r^2 \dot{\theta}^2$ تکانه زاویه‌ای، μ جرم کاهیده و U پتانسیل مرکزی است.

ب) ذره‌ی آلفا به جرم m که حامل انرژی E است، بر سر راه خود با دو هسته اتمی ثابت پشت سر هم، هر کدام با جرم M مواجه می‌شود. فاصله بین این دو هسته از یکدیگر برابر با d و پارامتر برخورد با هسته اول برابر با b است. فاصله d به اندازه‌ای بزرگ است که ذرات آلفا در آن واحد با حداکثر یکی از دو هسته اتمی برهم‌کنش می‌کنند. سطح مقطع پراکندگی ذرات آلفا از هسته دوم را محاسبه کنید.

راهنمایی: نسبت انرژی جنبشی ذرات خروجی T_1 به انرژی جنبشی اولیه T_0 بصورت زیر است:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{m^2}{(m+M)^2} \left[\cos \psi \pm \sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^2 - \sin^2 \psi} \right]^2$$

که زاویه پراکندگی آلفا با خط برخورد در دستگاه آزمایشگاه ψ با زاویه پراکندگی در دستگاه مرکز جرم θ با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\tan \psi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{m_1}{m_2}}$$

سوال ۴) سیستم‌های جفت شده و فرکانس‌های طبیعی (۱۶ امتیاز)

فرض کنید حلقه‌ای با جرم ناچیز، سه جسم به جرم m را به یکدیگر متصل کرده‌اند. جسم‌ها بر روی حلقه قرار گرفته‌اند و فقط به صورت دایروی و بر روی حلقه می‌توانند حرکت کنند. همچنین بین هر دو جسم فنری با ضریب کشسانی k قرار دارد. این مساله بسیار شبیه مساله مولکول سه اتمی خطی است. (از نیروی گرانش صرف نظر کنید.)
 الف) با این فرض که موقعیت تعادل این سه جسم در زوایای $(0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ است، لاگرانژی این سیستم را بنویسید.
 ب) با استفاده از تعریف انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل بر حسب مختصه‌های تعمیم یافته که در زیر آمده است، عناصر ماتریس $\{m\}$ و $\{A\}$ را بدست آورید.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k$$

ج) با استفاده از معادله مشخصه secular فرکانس‌های طبیعی این سیستم را بدست آورید.
 د) ویژه بردارها (مدهای نرمال) این حرکت را استخراج کنید و درباره فیزیک حرکت مدهای نرمال بحث کنید.

دهانه وردفرت (۲۰ امتیاز)

زمین را در تقریب اول کره‌ای به جرم M_0 و شعاع R و با چگالی یکنواخت در نظر بگیرید که با سرعت زاویه‌ای ω_0 حول محور چرخش خور در گردش است. شهاب‌سنگی به جرم αM_0 به سیاره ما برخورد می‌کند و در زاویه قطبی θ نسبت به محور دوران اولیه به زمین می‌چسبد.
 الف) ابتدا با نوشتن انرژی جنبشی در دستگاه ثابت و ارتباط آن در دستگاه چرخان، نشان دهید که تانسور ممان لختی به صورت زیر بدست می‌آید

$$I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{x}) \left[\delta_{ij} \left(\sum_k x_k^2 \right) - x_i x_j \right] d\mathbf{x}$$

ب) با انتخاب دستگاه مختصات مناسب متصل به جسم، مرکز جرم زمین را پس از برخورد بدست آورید.
 ج) اگر ممان لختی کره توپر با چگالی یکنواخت $I = \frac{2}{5} MR^2$ نسب به مرکز هندسی باشد. در این صورت ممان لختی سیستم زمین-شهاب‌سنگ را در مرکز جرم سیستم بدست آورید. (نکته: می‌توانید از قضیه محورها موازی استفاده کنید.)
 د) از آنجایی که توزیع جرم جدید زمین-شهاب‌سنگ تقارن کروی ندارد، محور دوران شروع به حرکت تقدیمی می‌کند. با استفاده از معادلات اوایلر برای اجسام صلب دوره تناوب حرکت تقدیمی را بر حسب دوره تناوب زمین بدست آورید.
 ه) اثر برخورد شهاب سنگ معروف وردفرت بر حرکت تقدیمی مدار زمین را تقریب بزنید.

سوال ۶) از مکانیک کلاسیک تا ماده چگال نظری (۱۶ امتیاز)

برای بررسی دینامیک شبکه‌های اتمی، در اولین تقریب می‌توان از دیدگاه مکانیک کلاسیک و سپس نظریه میدان کلاسیک استفاده کرد. فرض کنید که می‌خواهید شبکه کریستالی یک بعدی را بررسی کنید. این سیستم متشکل از یون‌های سنگین و الکترون‌های

رسانش است. برای بررسی این سیستم، طبق قاعده باید همیلتونی این سیستم را که متشکل از همیلتونی یون‌ها، همیلتونی الکترون‌ها و همیلتونی اندرکنش یون-الکترون است بنویسیم.

$$H_e = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i < j} V_{ee}(r_i - r_j)$$

$$H_i = \sum_I \frac{P_I^2}{2M} + \sum_{I < J} V_{ii}(R_I - R_J)$$

$$H_{ei} = \sum_{iI} V_{ei}(R_I - r_i)$$

که در رابطه فوق H_e همیلتونی الکترون‌ها (با اندیس موقعیت الکترون. r_i که i شمارنده الکترون‌ها است.)، H_i همیلتونی یون‌ها (با اندیس موقعیت R_I که I شمارنده یون‌ها است.) و H_{ei} همیلتونی اندرکنشی است. V_{ei} ، V_{ii} و V_{ee} پتانسیل‌های اندرکنش الکترون-الکترون، یون-یون و الکترون-یون است.

الف) با ساده‌ترین فرض‌ها نشان دهید که حل مساله دینامیک شبکه یک بعدی از اتم‌ها را می‌توانید با مساله جرم و فنرهای متصل به هم در یک بعد تقریب بزنید.

ب) همیلتونی و لاگرانژی این سیستم را بنویسید.

ج) در فیزیک ماده چگال علاقه‌مند هستیم که ویژگی شبکه انمی را بررسی کنیم که به اندازه عدد آوگادرو اتم در شبکه است. از این رو به صورت طبیعی باید این سیستم را پیوسته در نظر بگیریم. با استفاده از تبدیلات مناسب از حالت گسسته به پیوسته نشان دهید که لاگرانژی یک زنجیره اتمی کلاسیک (در واقعیت اتم‌ها کوانتومی هستند) پیوسته را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$L[\phi] = \int_0^L L(\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi}) dx, \quad L(\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi}) = \frac{m}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{k_s a^2}{2} (\partial_x \phi)^2$$