

آزمون نهایی درس اطلاعات کوانتومی - تیرماه ۱۴۰۰

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲۳ تیر ۱۴۰۰

زمان تحویل سوالات به دانشجویان: پنجشنبه ۲۴ تیرماه ساعت ۹ صبح

زمان تحویل پاسخ سوالات از طرف دانشجویان: جمعه ۹ صبح :

■ مسئله اول: آنتروپی فانو به شکل زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{F}(\rho) = -\log[\text{Tr}(\rho^2)]. \quad (1)$$

نشان دهید که

$$S(\rho) \geq \mathcal{F}(\rho). \quad (2)$$

مقدار بیشینه و کمینه آنتروپی فانو را بدست آورید.

■ مسئله دوم: ترکیب محدب زیر از آنتروپی های فون - نویمان را در نظر بگیرید:

$$S_p = S[p\sigma + (1-p)\rho] - pS[\sigma] - (1-p)S[\rho]. \quad (3)$$

مشتق این عبارت را در $p = 0$ و $p = 1$ محاسبه کنید و نسبت آنها را با آنتروپی های نسبی $S(\rho||\sigma)$ و $S(\sigma||\rho)$ مشخص کنید.

■ مسئله سوم: آنتروپی های $S(A)$, $S(B)$, $S(A, B)$ را برای حالت ورنر

$$\rho_W = \frac{p}{4} I \otimes I + (1-p) |\psi^-\rangle \langle \psi^-| \quad (4)$$

حساب کنید و تعیین کنید که به ازای کدام مقدار از پارامتر p هر کدام از تساوی های زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} S(A, B) &= S(A) + S(B), \\ S(A, B) &= |S(A) - S(B)|. \end{aligned} \quad (5)$$

■ مسئله چهارم: برای حالت ورنر

$$\rho_W = \frac{p}{4} I \otimes I + (1-p) |\psi^-\rangle \langle \psi^-| \quad (6)$$

محدوده ای از پارامتر p را چنان تعیین کنید که رابطه زیر برقرار باشد:

$$S(A, B) \geq \sup(S(A), S(B)). \quad (7)$$

■ مسئله پنجم: حالت ورنر را در نظر بگیرید:

$$\rho_W = \frac{p}{4} I \otimes I + (1-p) |\psi^-\rangle \langle \psi^-|. \quad (8)$$

الف: محدوده ای از پارامتر p را چنان پیدا کنید که این حالت جدایی پذیر باشد.

ب- برای آن محدوده از این پارامتر، حالت ورنر را به صورت صریح به صورت یک حالت جدایی پذیر بنویسید.

■ مسئله ششم: یک کانال کلاسیک سه حرف ورودی (a_1, a_2, a_3) و سه حرف خروجی (b_1, b_2, b_3) دارد. کانال با احتمالات شرطی زیر

تعریف می شود:

$$P(b_1|a_1) = 1$$

$$\begin{aligned} P(b_2|a_2) &= 1 - q = P(b_3|a_3) \\ P(b_2|a_3) &= q = P(b_3|a_2). \end{aligned} \quad (9)$$

الف: ظرفیت کانال را حساب کنید.

ب: برای وقتی که پارامتر q یکی از مقادیر $0, 1/2, 1$ است، نشان دهید که چگونه می توان نرخ مبادله اطلاعات را به ظرفیت کانال رساند.

■ مسئله هفتم: همیشه لازم نیست که تعداد حروف ورودی و خروجی یک کانال کلاسیک با هم برابر باشند. یک کانال کلاسیک در نظر بگیرید که حروف ورودی آن (a_1, a_2) و حروف خروجی آن (b_1, b_2, b_3, b_4) باشند. کانال نیز با احتمالات شرطی زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} P(b_1|a_1) &= P(b_2|a_1) = \frac{1}{3}, \\ P(b_3|a_2) &= P(b_4|a_2) = \frac{1}{3}, \\ P(b_3|a_1) &= P(b_4|a_1) = \frac{1}{6}, \\ P(b_1|a_2) &= P(b_2|a_2) = \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (10)$$

ظرفیت این کانال را حساب کنید.

■ مسئله هشتم:

یک پیام از بلوک های به طول هفت بیت صفر و یک تشکیل شده است. یک کانال به شکل زیر در این پیام اختلال ایجاد می کند: یا هیچ نوع خطایی رخ نمی دهد که احتمال آن $\frac{1}{8}$ است یا با احتمال $\frac{1}{8}$ در یکی از بیت های بلوک خطا ایجاد می کند.

الف: ظرفیت کانال را حساب کنید.

ب: آیا می توان شیوه ای را پیشنهاد کنید که در آن نرخ مبادله اطلاعات با ظرفیت کانال مساوی شود؟

■ مسئله نهم: یک اثبات کلی برای قضیه عدم تکثیر: می خواهیم نشان دهیم که هیچ کانال کوانتومی وجود ندارد که کار زیر را انجام دهد:

$$\mathcal{E}(\rho) = \rho \otimes \rho. \quad (11)$$

نشان دهید که

$$D(\rho, \sigma) \leq D(\rho \otimes \rho, \sigma \otimes \sigma). \quad (12)$$

با توجه به این رابطه و این که هیچ کانال کوانتومی نمی تواند فاصله بین حالت ها را زیاد کند نشان دهید که کانال \mathcal{E} نمی تواند وجود داشته باشد.