

امتحان نهایی ترمودینامیک و مکانیک آماری ۳

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف - بهمن ماه ۱۴۰۰ - مدرس: وحید کریمی پور

۳ بهمن ۱۴۰۰

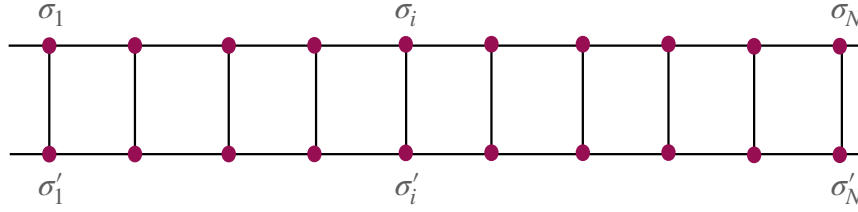
نکات مهم: یک- آخرین زمان تحویل پاسخ نامه ها راس ساعت دوازده روز دوشنبه چهارم بهمن ماه است. لطفاً برگه های خود را تمیز و مرتب بنویسید و از خط خوردگی اجتناب کنید و روابط ریاضی خود را با استدلال های کلامی به هم پیوند دهید. خواننده وظیفه ای برای درک آنچه که شما نزد خود فکر می کرده اید ندارد بلکه این وظیفه شما به عنوان نویسنده است که منظور خود را خیلی روشن برای خواننده توضیح دهید. این نکته در مورد هر نوع نوشته ای در هر زمینه ای درست است.

دو- برگه آزمون هر کدام از دانشجویان به طور جداگانه تصحیح خواهد شد. ارزیابی این برگه ها مبنای تمایز اعضای هر گروه از یکدیگر خواهد بود.

■ مسئله اول: یک گاز غیربرهمکنشی متشکل از N ذره در d بعد، که در یک جعبه به حجم V با انرژی جنبشی که به صورت

$$H = \sum_{i=1}^N A |\vec{p}_i|^s \quad (1)$$

داده می شود، در نظر بگیرید. \vec{p}_i تکانه ذره i ام است. برای این گاز تابع پارش کلاسیک $Z(N, T)$ را در دمای T بر حسب کمیت های داده شده محاسبه کنید (نیازی نیست ثوابت عددی انتگرال ها را محاسبه کنید). سپس فشار و انرژی درونی این گاز را بدست آورید (در نهایت صورت تعمیم یافته قضیه همپاری در نتایج شما ظاهر می شود).



شکل ۱: شکل مربوط به مسئله دوم

■ مسئله دوم: یک مدل آیزینگ روی یک شبکه به شکل زیر و با شرایط مرزی پریودیک و با هامیلتونی

$$H = -J_1 \sum_{i=1}^N (\sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma'_i \sigma'_{i+1}) - J_2 \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma'_i. \quad (۲)$$

الف- انرژی آزاد (یا انرژی هلمهولتز) این سیستم را حساب کنید.

ب- میزان همبستگی $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ را محاسبه کنید.

■ مسئله سوم: مدل آیزینگ دوبعدی را با شرایط مرزی پریودیک و بدون میدان مغناطیسی در نظر بگیرید

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j. \quad (۳)$$

از بسط دمای بالا استفاده کنید و تا رتبه دهم از پارامتر $\tau := \tanh \beta J$ تابع پارش را حساب کنید.

■ مسئله چهارم: یک گاز در نظر بگیرید که پتانسیل بین اتم های آن به شکل زیر است:

$$U(r) = \begin{cases} \infty & , \quad r < r_0 \\ -U_0 & , \quad r_0 < r < r_1 \\ 0 & r_1 < r < \infty. \end{cases} \quad (۴)$$

با استفاده از بسط خوشه ای، اولین تصحیح بر انرژی آزاد هلمهولتز را برای این گاز نسبت به گاز ایده آل بدست آورید و از آنجا کمیت های زیر را حساب کنید:

الف - انرژی آزاد گیس،

ب- انتروپی،

پ- ظرفیت گرمایی ویژه در حجم ثابت.

■ مسئله پنجم: نشان دهید که در دماهای کم برای یک گاز فرمی ضریب تراکم پذیری هم دما κ_T و ضریب تراکم پذیری بی در رو κ_S بسط های زیر را دارند:

$$\kappa_T \approx \frac{3}{2n\epsilon_F} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right] \quad \kappa_S \approx \frac{3}{2n\epsilon_F} \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (۵)$$

■ مسئله ششم: تابع f به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(x, y, z) = x + y + z \pmod{2}, \quad x, y, z = 0, 1. \quad (۶)$$

به عبارت دیگر این تابع سه عدد یک بیتی را به هنگ 2 با هم جمع می کند. یک شبکه عصبی سایرنیتیک با حداقل تعداد نوروں ها بسازید که این محاسبه را انجام دهد.

■ مسئله هفتم: حرکت مهره اسب را در صفحه شطرنج در نظر بگیرید. اسب هر حرکتی را به طور تصادفی و مستقل از گذشته انجام می دهد. ابتدا استدلال کنید که چرا این یک فرایند مارکوفی است؟ سپس فضای حالت این مساله را معین کنید. توزیع پایا را بیابید و یک توضیح فیزیکی برای آن بیان کنید.