

آزمون میان‌ترم مکانیک آماری

۲۵ فروردین ۱۴۰۰

نکات مهم

- الف: آزمون ساعت ۹ صبح چهارشنبه شروع می‌شود و تا ساعت ۹ شب جمعه مهلت دارد و جواب‌ها در CW آپلود شود.
- ب: استدلال‌های خود را به صورت کاملاً مرتب و منظم، بدون خط خوردگی (و بدون آدرس دادن به صفحات دیگر) و به صورت روشن همراه با جملات رابط فارسی بنویسید. اینطور نباشد که صرفاً یک مجموعه از روابط ریاضی به دنبال یکدیگر آورده شوند. انتظار می‌رود که نگارنده‌ی هر مطلب، مفهوم و خط سیر استدلال را روشن سازد.
- ج: روابط ریاضی خود را روی برگه امتحان به شکل منسجم همراه با متن فارسی خوب بنویسید، آن‌ها را صرفاً روی صفحه کاغذ پخش نکنید. برگه امتحانی شما می‌بایست مانند یک اثر هنری کلاسیک باشد نه یک اثر کوبیسم یا پست مدرن. با وجود زیبایی ویژه و به خصوص چنین آثاری، به آن‌ها در این جا نمره‌ای تعلق نخواهد گرفت.
- د: استفاده از کتاب و درسنامه مجاز است.
- ه: آزمون ۱۱۰ امتیاز دارد اما کسب ۱۰۰ امتیاز کافی است.

در انتخاب سوالات سعی شده است که سوالات اهمیت فیزیکی و بار آموزشی داشته باشند. از این فرصت برای نهایت یادگیری استفاده نمایید و از حل سوالات لذت ببرید. موفق باشید!

۱ بررسی آماری نوسانگر ناهماهنگ (۲۰ امتیاز)

انرژی پتانسیلی یک نوسانگر ناهماهنگ یک بعدی را مانند زیر در نظر بگیرید:

$$V(q) = cq^2 - gq^3 - fq^4$$

که در آن c و g و f ثوابتی حقیقی و مثبت اند. البته g و f معمولاً بسیار کوچک در نظر گرفته شوند.

۱. نشان دهید که تا اولین مرتبه از سهمی که جملات اضافه‌ی پتانسیل بالا به ظرفیت گرمایی نوسانگر کلاسیکی می‌دهند

$$C = \frac{3}{2}k_B^2 \left(\frac{f}{c^2} + \frac{5g^2}{4c^3} \right) T$$

هست.

۲. نشان دهید که مقدار متوسط مکان (q) تا همین مرتبه

$$\langle q \rangle = \frac{3gk_B T}{4c^2}$$

هست.

۲ گاز کامل کلاسیکی دو اتمی در حضور میدان مغناطیسی (۲۵ امتیاز)

گاز کلاسیکی کاملی با دو اتم در نظر بگیرید که هر مولکول آن گشتاور مغناطیسی در راستای مولکول به اندازه m دارد. میدان مغناطیسی B را بر سیستم اعمال می کنیم. در نتیجه هر مولکول انرژی پتانسیل $-mB \cos \theta$ می گیرد که θ زاویه ی بین مولکول و میدان مغناطیسی است.

۱. نشان دهید که قسمت مربوط به درجات آزادی چرخشی از تابع پارش $Z = (Z_0)^N$ است که

$$Z_0 = \left(\frac{2I}{\hbar^2 m B \beta^2} \right) \sinh(mB\beta)$$

که I لختی دورانی مولکول هاست و $\beta = 1/k_B T$ دمای ترمودینامیکی سیستم.

۲. مغناطیش متوسط کل سیستم را با محاسبه ی انرژی آزاد هلمهولتز و به کمک رابطه ی $M = -\frac{\partial F}{\partial B}$ بدست آورید و آن را به عنوان تابعی از $mB\beta$ رسم نمایید.

۳. نشان دهید که رفتار مجانبی میانگین انرژی پتانسیل برای $mB\beta$ های بزرگ به شکل زیر است:

$$Nk_B T - NmB(1 + 2e^{-2mB\beta}) + \dots$$

۳ قانون کوری (۱۵ امتیاز)

یک ماده (سه بعدی در نظر بگیرید) پارامغناطیس در میدان خارجی قرار گرفته است. و انرژی آن مطابق رابطه زیر است:

$$E = \sum_{i=1}^N -\vec{\mu}_i \cdot \vec{H} = -\mu H \sum_{i=1}^{3N} S_i, \quad S_i \in \{-1, +1\}$$

می خواهیم سیستم را در هنگرد قانونی کوچک مطالعه کنیم. برای این منظور $\Omega(E)$ را حساب کنید و آن را در حد $N \rightarrow \infty$ ساده کنید و بررسی کنید که آیا قانون کوری به دست می آید؟ اگر $E > 0$ باشد برای دما چه اتفاقی می افتد؟

۴ نوسانگر هماهنگ (۲۰ امتیاز)

دو گوی به جرم m در نظر بگیرید که مطابق شکل با سه فنر به ثابت فنر k متصل شده اند. این سیستم در دمای T نگاه داشته شده است و جرمها نوسان طولی می کنند. با در نظر گرفتن این سیستم به عنوان یک سیستم کلاسیک به سوالات زیر پاسخ دهید.

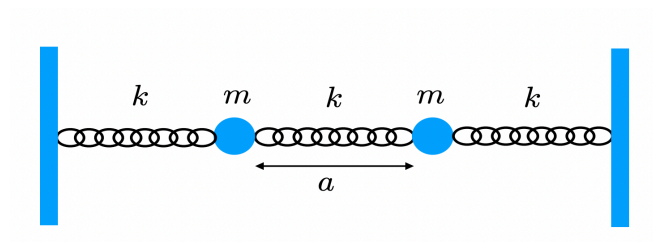
۱. مدهای نوسان طبیعی این سیستم را پیدا کنید.

۲. متوسط انرژی این سیستم را پیدا کنید.

۳. انرژی متوسط هر مود نوسانی را پیدا کنید.

۴. متوسط جابجایی هر کدام از جرمها را پیدا کنید.

شکل ۱: فنر سوال چهار



۵ تابع توزیع ماکسول بولتزمن (۱۵ امتیاز)

در این سوال می‌خواهیم تابع توزیع ماکسول بولتزمن را برای گازی ایده‌آل با جرم ذرات m بدست آوریم.

۱. ابتدا $\Omega(E, N, V)$ تعداد میکروحالت‌های یک گاز کامل در انرژی ثابت E با تعداد ذرات N و حجم V را محاسبه کنید.

۲. بال با توجه به رابطه‌ی زیر، $P(\vec{p})$ احتمال اینکه یک ذره دارای تکانه‌ی \vec{p} باشد را حساب کنید و با استفاده از تقریب استرلینگ برای N های بزرگ جواب نهایی را ساده کنید.

$$P(\vec{p}) = \frac{V \Omega(E - p^2/2m, N - 1, V)}{\Omega(E, N, V)}$$

۶ مکانیک آماری ستارگان (۱۵ امتیاز)

ستاره‌های همگن و هم دما به شعاع R و جرم M ، جرم میانگین ذرات m و با دمای T که در حال تعادل است در نظر بگیرید.

۱. با به کار بردن تحلیل ابعادی رابطه‌ای برای انرژی جنبشی ستاره بر حسب کمیت‌های مذکور به دست آورید.

۲. تعداد میکروحالت‌های متناظر با این ماکروحالت را به دست آورید.

۳. رابطه آنترופی با شعاع ستاره را بیابید.

۴. رمبش یک ستاره زمانی رخ می‌دهد که نیروی ناشی از گرانش از نیروی ناشی از فشار گاز بیشتر باشد. در این صورت بگویید در شرایط رمبش با فرض اینکه طی این فرایند تعداد ذرات درون ستاره ثابت است آنترופی ستاره چه تغییری میکند؟ قانون دوم ترمودینامیک در این باره چه میگوید؟ (امتیازی)

۵. با توجه به آنچه در بخش‌های پیشین به دست آورده اید ظرفیت گرمایی ویژه ستارگان را به دست آورید و در خصوص علامت آن نظر دهید. (امتیازی)