

به نام او، برای او

فرصت پاسخ‌گویی: پایان روز ۲ تیر

۲ تیر ۱۴۰۰

امتحان پایان‌ترم آمار

در صورت امکان پاسخ‌های خود را تایپ کنید و فایل PDF پاسخ‌هایتان را در بخش هر سوال بارگذاری کنید. اگر سوالتان را تایپ نکردید از پاسخ هر سوال عکسی با کیفیت با نرم‌افزاری مانند camscanner بگیرید و آن را مرتب کنید و عکس را بارگذاری کنید. دقت کنید که هر سوال را در بخش همان سوال بارگذاری کنید. بارگذاری اشتباه یک سوال در جای سوال دیگر و یا بارگذاری فایل Word یا Latex می‌تواند منجر به عدم تصحیح پاسختان شود.

در مورد سوالات می‌توانید با دوستانتان مشورت کنید و یا به جزوه، کتاب، اینترنت مراجعه کنید. ولی پاسخ هر سوال را باید خودتان بنویسید. نوشتن پاسخ از روی پاسخ دوستان، کتاب، جزوه و اینترنت مجاز نیست و تقلب محسوب خواهد شد. اگر دوستانتان از شما خواستند که پاسختان را به آن‌ها نشان دهید این کار را انجام ندهید. احراز تخلف از این قوانین ممکن است منجر به کسب نمره‌ی مردودی در درس شود.

سوالات مفهومی

۱. هدف از انجام یک آزمایش تصادفیده و روش انجام آن را به دقت توضیح دهید.
۲. چرا در حالی که تخمین عددی از یک پارامتر داریم، برای آن بازه‌ی اطمینان می‌سازیم؟ به طور دقیق در مورد «دقت» و «اطمینان» در یک بازه‌ی اطمینان توضیح دهید.
۳. روش ساخت بازه‌ی اطمینان برای اختلاف میانگین دو نمونه‌ی جفت شده را به دقت توضیح دهید. فرض کنید مقادیر به دست آمده از این دو نمونه

$$X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n$$

باشند.

۴. به طور شهودی و یا هندسی (بدون استفاده از فرمول) توضیح بدهید که در رگرسیون خطی $Y \sim \alpha + \beta X$ اگر واریانس X_i ها صفر باشد، چرا نمی‌توانیم تخمینی از β داشته باشیم.
۵. فرض کنید که در رگرسیون ساده‌ی خطی نمرات درس ریاضی عمومی بر حسب درصد ادبیات کنکور، p - مقدار به مراتب کمتر از مقدار مشابه در رگرسیون ساده‌ی خطی نمرات درس ریاضی عمومی بر حسب درصد عربی کنکور باشد. از طرفی می‌دانیم در رگرسیون چندگانه نمرات ریاضی عمومی بر حسب درصد دروس فیزیک، عربی و ادبیات، p - مقدار درصد ادبیات نشان می‌دهد که ضریب ادبیات بی‌معنی است. در حالی که p - مقدار درصد عربی مقدار کوچکی است که حاکی از معنادار بودن درصد عربی است. با دانستن این شرایط اگر ضرایب رگرسیون‌های گفته شده را داشته باشید و فقط درصد عربی و ادبیاتش را داشته باشید چگونه نمره‌ی ریاضی عمومی یک نفر را پیش‌بینی می‌کنید؟ چرا؟

مسائل

۶. فرض کنید x_1, \dots, x_n نمونه‌هایی مستقل از متغیری تصادفی مانند X با میانگین μ باشند.
- (آ) هر گاه برای اعداد حقیقی $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ داشته باشیم $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ، نشان دهید که $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ یک تخمین‌گر ناریب از μ است.
- (ب) اعداد $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ را چگونه انتخاب کنیم که برآوردگرمان بیشترین کارایی را داشته باشد؟ توضیح دهید چرا جوابتان درست است.
۷. فرض کنید n نمونه‌ی مستقل از یک متغیر تصادفی یکنواخت روی بازه‌ی $[0, a]$ ، که در آن a عددی مجهول است، داریم. می‌خواهیم تخمینی از عدد a به دست آوریم. برآوردگر بیشترین درست‌نمایی از a را \tilde{a} می‌نامیم.
- (آ) \tilde{a} را به دست آورید.
- (ب) اگر $\epsilon \in [0, 1]$ باشد، $\mathbb{P}[|\tilde{a} - a| > \epsilon a]$ را به دست آورید.
- (ج) به کمک دو قسمت قبل بازه‌ی اطمینانی با احتمال خطای q برای مقدار $\frac{\tilde{a}}{a}$ درست کنید.
- (د) به کمک قسمت قبل بازه‌ی اطمینانی با احتمال خطای q برای مقدار a درست کنید. به علاوه توضیح دهید این بازه یک طرفه است یا دو طرفه. چرا؟
۸. فرض کنید داده‌های زیر از یک مدل رگرسیونی به صورت

$$y_i \sim \alpha x_i^2 + \beta x_i + \gamma + \epsilon_i$$

به دست آمده‌اند که در آن α, β و γ اعداد ثابتند و ϵ_i ها متغیرهای نرمال مستقل و هم‌توزیع با میانگین صفر و واریانس مجهول σ^2 هستند. برآوردگر درست‌نمایی بیشینه برای α, β و γ را بیابید.

۲	۱	۰	-۱	-۲	x
۳	۴	۳	۲	۲	y

برای تفکر بیشتر (نیازی به پاسخ در برگه نیست): آیا می‌توانید برآوردگر درست‌نمایی بیشینه برای σ را هم بیابید؟

۹. فرض کنید ۵ متغیر پیشگوی زیر داده شده است.

• X_1 : معدل

• X_2 : IQ

• X_3 : جنسیت (۱ برای خانم‌ها و ۰ برای آقایان)

• X_4 : $X_1 X_2$

• X_5 : $X_1 X_3$

متغیر پاسخ میزان حقوق بعد از فارغ‌التحصیلی است.

فرض کنید نتیجه‌ی برازش کمترین مربعات ضرایب را به صورت زیر داده باشد:

β_5	β_4	β_3	β_2	β_1	β_0
-۱۰	۰٫۰۱	۳۵	۰٫۰۷	۲۰	۵۰

که در آن β_0 عرض از مبدأ و β_i ضریب متغیر X_i است. توضیح دهید برای مقدار مشخص IQ و معدل، حقوق خانم‌ها از آقایان بیشتر است یا حقوق آقایان از خانم‌ها؟ جواب خود را به دقت توضیح دهید و اگر نیاز به فرض بیشتری برای پاسخ به سوال دارید آن را به دقت توضیح دهید.

در این امتحان و در تمام مراحل زندگی موفق باشید.