تمرین تحویلی سری ۱ تاریخ تحویل ۹۹/۵/۱۱

۱- معادلات زیر را حل کنید (جواب عمومی معادلات زیر را به دست آورید)

1) $(1+y^2)\cos x\,dx = 2(1+\sin^2 x)\,dy$

2) $y' = x^2 + xe^{-y} - x^2 e^{-y} - x$

3) $xy' - y = 3xe^{-\frac{y}{x}}$

4) $y' = \dfrac{x+y-3}{x-y+1}$

5) $y' = \dfrac{x+2y+1}{2x+4y+3}$

6) $(y + y\cos xy)\,dx + (x + x\cos xy)\,dy = 0$

7) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - 4}$

8) $2(1+x^2)\,yy' + 2x - 3x^2 + y^2 = 0$

۲- با فرض اینکه $Mx + Ny \neq 0$ و $\dfrac{1}{Mx+Ny}$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله همگن $M\,dx + N\,dy = 0$ باشد جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$x^2\,dy + x(3x - y)\,dx = 0$

۳- معادلات زیر را حل کنید.

1) $xy' + y = x^3 y^3$

2) $y' = e^{-x} y^2 + y - e^{x}$ ، $y_1 = e^{x}$ (معادله ریکاتی)

(راهنمایی قسمت دوم سؤال ۳ .

معادله دیفرانسیل زیر را که به معادله ریکاتی معروف است در نظر بگیرید:

$$y' = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 \quad , \quad f_2(x) \neq 0$$

اگر y_1 یکی از جواب ها معادله باشد نشان دهید که تغییر متغیر $y = y_1 + \frac{1}{U}$ معادله را به فرم مرتبه اول خطی تبدیل می کند:

$$y' = y_1' - \frac{U'}{U^2} \Rightarrow y_1' - \frac{U'}{U^2} = f_0(x) + f_1(x)\left(y_1 + \frac{1}{U}\right) + f_2(x)\left(y_1 + \frac{1}{U}\right)^2$$

$$y_1' - \frac{U'}{U^2} = f_0(x) + f_1(x)y_1 + \frac{1}{U}f_1(x) + f_2(x)\left(y_1^2 + \frac{2y_1}{U} + \frac{1}{U^2}\right)$$

$$= f_0(x) + f_1(x)y_1 + \frac{f_1(x)}{U} + f_2(x)y_1^2 + \frac{2y_1 f_2(x)}{U} + \frac{f_2(x)}{U^2}$$

$$\xrightarrow{y_1' = f_0(x) + f_1(x)y_1 + f_2(x)y_1^2} \cancel{y_1'} - \frac{U'}{U^2} = \cancel{y_1'} + \frac{f_1(x)}{U} + \frac{2y_1 f_2}{U} + \frac{f_2}{U^2}$$

$$\Rightarrow -U' = Uf_1(x) + 2y_1 f_2(x)U + f_2(x)$$

$$\Rightarrow U' + U\left(f_1(x) + 2y_1 f_2(x)\right) = -f_2(x)$$

معادله خطی مرتبه اول