Subject:
Date

هر feasible point در (*) یک feasible point برای $P\{a^T x \leq b\} \geq 1-\varepsilon$

با قیود P1 , P2 می‌باشد.

اثبات به سادگی با ترکیب دو قضیه قبلی صورت می‌پذیرد.

خلاصه: برای مسئله chance constraint ، $P\{a^T x \leq b\}$ یک نامساوی پیدا کردیم که

جواب آن ، جواب معادل آن است. همچنین نشان دادیم که این نامساوی (*) در

واقع معادل R.C. برای مسئله مطرح شده Box + Ball نیز هست.

جلسه دهم: دوشنبه ۱۴۰۳/۰۱/۲۰ 2024_04_08

ابتدا مرور مسئله Chance Constraint را بررسی کردیم $a^T x + b \leq 0$

$$[a;b] = [a^0;b^0] + \sum_{l=1}^{L} z_l [a^l;b^l]$$

find x such that: $P(a^T x \leq b) \geq 1-\varepsilon$ → feasible for chance-constraint

گفتیم که این حالت $z_l \in [-1,1]$ ، $E\{z_l\}=0$ ، z_iها مستقل، حالت (I):

معادل است با RC برای Ω Ball به ازای ε خیلی کوچک ، شرط Chance-Constraint

معادل است با Box_1 که بررسی کردیم به ازای Ω های مختلف کدام حل این ساده‌تر است.

PAPCO

triple $2 \times 3 \times 11 = 66$

Subject:
Date

حالت (II): P.1) $z_\ell \ , \ \ell = 1, \dots, L$ مستقل

$$\text{P.2)} \quad \int e^{ts} \, d\underbrace{P_\ell}_{z_\ell \text{ توزیع}}(s) \leqslant \exp\left\{ \max\left[\mu_\ell^+ t, \mu_\ell^- t\right] + \frac{1}{2} \sigma_\ell^2 t^2 \right\}$$

$\mu_\ell^+, \mu_\ell^-, \sigma_\ell$ معلوم
known

نامعادله فوق باید $\forall t$ برقرار باشد.

یعنی لازم نیست توزیع P_ℓ را کامل بدانیم و فقط سه تا پارامتر و نامساوی فوق را بدانیم کافی است.

$$P(v) = \text{Prob}\left\{ v_0 + \sum v_\ell z_\ell > 0 \right\} \quad \text{s.t.} \quad v_\ell = (a^\ell)^T x - b^\ell \quad \ell = 0, \dots, L$$

باید کران بالا برای $P(v)$ پیدا کنیم و کمتر از ε قرار دهیم تا تخمین آن مسئله را بیابیم

$$\Phi(w_1, \dots, w_L) \triangleq \sum_{\ell=1}^{L} \max\left[\mu_\ell^- w_\ell, \mu_\ell^+ w_\ell\right] + \frac{1}{2} \sigma_\ell^2 w_\ell^2$$

$$E\left\{\exp\left\{\sum z_\ell w_\ell\right\}\right\} \overset{\text{چون } z_\ell \text{ها مستقل اند}}{=} \prod_{\ell=1}^{L} E\left\{e^{z_\ell w_\ell}\right\} \overset{\text{طبق شرط P.2}}{\leqslant}$$

$E\{e^{z_\ell w_\ell}\}$ را از کران گذاریم

$$\prod \exp\left\{\max(\mu^+ \dots] + \frac{1}{2} \sigma_\ell^2 w_\ell^2 \right\} = \exp\left\{\Phi(w_1, \dots, w_L)\right\}$$

این را داشته باشیم. از طرف دیگر می‌خواهیم v هایی را پیدا کنیم که:

$$v_0 + \sum v_\ell z_\ell > 0 \longleftrightarrow \alpha\left(v_0 + \sum v_\ell z_\ell\right) > 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$\longleftrightarrow \forall \alpha > 0 : \exp\left\{\alpha\left(v_0 + \sum v_\ell z_\ell\right)\right\} \geqslant 1$$

$$\longrightarrow E\left\{\exp\left\{\alpha\left(v_0 + \sum z_\ell v_\ell\right)\right\}\right\} \geqslant P(v) \quad \forall \alpha > 0$$

Subject:
Date

چرا رابط آخر را می‌توانیم بنویسیم؟ حس ϵ می‌شود: $f_1 P_1 + f_2 P_2 + \dots + f_k P_k$

برای سادگی گسسته در نظر گرفتیم: برای آن‌هایی که شرط $v_0 + \sum z_l v_l \geq 0$ برقرار است

$$\geq P_1 + \dots + P_j + \text{باقی}$$

این رابط را با ≥ 0 است چون $P(v)$ به خاطر تعریف

ضرب را در احتمال‌ها درگذاشتیم

$$\Rightarrow \epsilon\{\cdot\} \geq P_1 + \dots + P_j = P(V)$$

رابط قبلی که $\leq \exp\{\phi\}$

سه تا کاملی می‌کنیم و برای این که $\exp$ برود $\ln$ هم می‌گیریم. می‌شود:

$$\ln(P(V)) \leq \dots \leq \alpha v_0 + \Phi(\alpha v_1, \dots, \alpha v_L) \quad \forall \alpha > 0$$

$$\text{if } \exists \alpha > 0 : \alpha v_0 + \Phi(\alpha v_1, \dots, \alpha v_L) \leq \ln(\epsilon) \rightarrow$$

پس این شرط یک safe approx. برای $\text{Prob}(v_0 + \sum z_l v_l) \leq \epsilon$ باشد.

$$V_\epsilon^\circ = \{ v = [v_1, \dots, v_L] : \exists \alpha > 0 : \alpha v_0 + \Phi(\alpha v_1, \dots, \alpha v_L) \leq \ln(\epsilon) \}$$

$\subseteq$ Feasible set ChanceConst.

قبلاً گفته بودیم که اگر می‌توان نشان داد

$\Longrightarrow$ Closed

یک مجموعه‌ای در feasible set باشد آن مجموعه هم در feasible set خواهد بود $\Rightarrow V_\epsilon = \text{closed } V_\epsilon^\circ = Cl\, V_\epsilon^\circ$

هم یک safe approx. است

در ادامه می‌خواهیم شرط را کمی ساده‌تر بنویسیم.

$$v \in V_\epsilon^\circ : \exists \alpha > 0 : \alpha v_0 + \Phi(\alpha v_1, \dots, \alpha v_L) \leq \ln(\epsilon)$$

$$= \underbrace{\alpha \left[v_0 + \sum \max[\mu_l^- v_l, \mu_l^+ v_l] \right] + \frac{\alpha^2}{2} \sum \sigma_l^2 v_l^2}_{f_v(\alpha)} \leq \ln(\epsilon)$$

dual $2^2 \times 17 = 68$

می‌خواهیم ببینیم به ازای چه v هایی، α وجود دارد که نامساوی برقرار باشد. براساس α

مرتب کردیم. برای این که حل کنیم، $f_v(\alpha) = \alpha\, a(v) + \frac{\alpha^2}{2} b(v)$

کافی $\min f_v(\alpha)$ را حساب کنیم و بگذاریم. چون کافی است α را پیدا کنیم، اگر به ازای

min برقرار نباشد که حتماً α ای وجود ندارد. از رابطه معلوم است $b(v) \geq 0$ است.

دو حالت می‌کنیم:

(i) $b(v) > 0 \longrightarrow a(v) \geq 0 \longrightarrow \min @ \alpha = 0$ به درد نمی‌خورد

می‌شود $= 0$

$\quad\quad\ \ \longrightarrow a(v) < 0 \longrightarrow \min = -\frac{1}{2} \frac{a^2(v)}{b(v)}$

$@ \alpha = \frac{-a(v)}{b(v)}$

$$a(v) + \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot b(v)} \leqslant 0$$

(ii) $b(v) = 0 \longrightarrow a(v) \geq 0 \longrightarrow \min = 0$ به درد نمی‌خورد

$@ \alpha = 0$

$\quad\quad\ \ \longrightarrow a(v) < 0 \longrightarrow \alpha \to \infty : \min = -\infty$ و رابطه

برقرار می‌شود حتماً.

- توضیح: شروط مقابل یک تضمین امن برای مسئلهٔ Chance Constraint

با قیود P.1 و P.2 هستند

① $b(v) = 0,\ a(v) < 0$

② $b(v) > 0,\ a(v) + \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\sqrt{b(v)} < 0$

(69) = 3×23 dual

Subject:
Date

قضیه: z_ℓ ها مستقل و شرط P.2 را ارضا نمایند. برای هر سری بردار $v_1, \dots, v_L$ و هر ثابت Ω داریم:

$$P\left\{\sum z_\ell v_\ell > \sum \max\left[\mu_\ell^- v_\ell, \mu_\ell^+ v_\ell\right] + \Omega\sqrt{\sum \sigma_\ell^2 v_\ell^2}\right\} \leq \exp\left(\frac{-\Omega^2}{2}\right)$$

اثبات:

$$\varepsilon = \exp\left(\frac{-\Omega^2}{2}\right)$$ در قضیه قبل قرار دهیم:

$$V_0 = -\sum \max\left[\mu_\ell^- v_\ell, \mu_\ell^+ v_\ell\right] + \Omega\sqrt{\sum \sigma_\ell^2 v_\ell^2}$$

کامل کنیم

این جوری نوشتیم که شبیه Ω Ball شود. یعنی معادل سازی را میخواهیم در ادامه بگوییم.

$$V = \left\{\eta \in \mathbb{R}^L, \exists u \in \mathbb{R}^L, \mu_\ell^- \leq \eta_\ell - u_\ell \leq \mu_\ell^+, \sqrt{\sum_{\ell=1}^{L} \frac{u_\ell^2}{\sigma_\ell^2}} \leq \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right\}$$

شبیه معادل بیضی گون است.

$$V = \left\{\eta = u + v, \mu_\ell^- \leq v_\ell \leq \mu_\ell^+, \sqrt{\sum \frac{u_\ell^2}{\sigma_\ell^2}} \leq \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right\}$$

$$\max_{\eta \in V} \eta^T y = \sum \max\left[\mu_\ell^- y_\ell, \mu_\ell^+ y_\ell\right] + \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\sqrt{\sum \sigma_\ell^2 y_\ell^2}$$

triple $2 \times 5 \times 7 = 70$

Subject:
Date

تمرین: فرض کنید برای مسئله P1 و P2، Chance Constr. $a^T x \leq b$ برقرار باشد،

علاوه بر آن RC برای $a^T x \leq b$ روی مجموعه اغتشاش V را هم در نظر بگیرید.

RC برای مسئله مورد اشاره، به شکل زیر است:

$$(a^0)^T x - b^0 + \sum \max\left[\mu_\ell^- \left([a^\ell]^T x - b^\ell\right), \mu_\ell^+ \left((a^\ell)^T x - b^\ell\right)\right]$$

$$+ \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \sqrt{\sum \sigma_\ell^2 \left((a^\ell)^T x - b^\ell\right)^2} \leq 0$$ و هر نقطه feasible

برای رابطه بالا، یک نقطه feasible برای Chance-Const می‌باشد.

دیگر را می‌توانیم بسازیم.

این حالت، حالت کلی‌ای است و با انتخاب مناسب $\mu_\ell^+, \mu_\ell^-, \sigma_\ell$ می‌توان

Bounded ~~Constraint~~ Perturbation Set

حالت بعدی

شروط P1، P2،
$$-\infty < \alpha_\ell^- \leq z_\ell \leq \alpha_\ell^+ < +\infty$$

فرض می‌کنیم معلوم هستند.

یک جورهایی انگار ترکیب دو حالت قبل است.

روند اثبات شبیه حالت شروط P1، P2 است. دیگر نمی‌گوییم.

تمرین: فرض کنید اغتشاش به فرم بالا مسئله Chance Constraint را تحت تأثیر

قرار دهد $\alpha_\ell^- \leq \mu_\ell^- \leq \mu_\ell^+ \leq \alpha_\ell^+$ ← $\mu_\ell^{\pm}$ تخمین کران بالا و پایین برای میانگین z_ℓ

است گویا و فرض منطقی این است که بین کران بالا و پایین z_ℓ باشد.

Subject:
Date

و فرض کنید فضای اغتشاش برای RC مسئله Robust به شکل زیر باشد

$$V = \left\{ \eta \in R^L ,\ \exists u \in \mathbb{R}^L ,\ \mu_l^- \leqslant \eta_l - u_l \leqslant \mu_l^+ \right.$$

این شرط جدید نسبت به حالت قبل اضافه شد $\alpha_l^- \leqslant \eta_l \leqslant \alpha_l^+$

$$\left. \sqrt{\sum \frac{u_l^2}{\sigma_l^2}} \leqslant \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right\}$$

RC رشود:

a) $(a^l)^T x - b^l = u_l + v_l$

b) $u_0 + \sum \max\left[\alpha_l^- u_l , \alpha_l^+ u_l\right] \leqslant 0$

c) $v_0 + \sum \max\left[\mu_l^- v_l , \mu_l^+ v_l\right] + \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \sqrt{\sum \sigma_l^2 v_l^2} \leqslant 0$

هر (x,u,v) که یک نقطه شدنی برای شروط a,b,c باشد، x یک نقطه شدنی برای Chance Constraint بالاست.

گویا تصویر نقطه شدنی در فضای (x,u,v) میشود یک نقطه شدنی در فضای x.

مسئله Linear Program با عدم قطعیت، یا از مرجع با عدم قطعیت یا مسئله فیزیکی که عدم قطعیت در آن معنا داشته باشد. ایمیل کنید. نقش تمرین دارد.

کتابخانه های مسائل Netlib را میتوانید نگاه کنید. بازهم هست.

dual $2^3 \times 3^2 = 72$

Subject:
Date

جلسه یازدهم   شنبه   ۱۴۰۳/۰۱/۲۵   2024-04-13

برای پروژه، Constraint کافی است linear با عدم قطعیت باشد و تابع هزینه نیازی نیست خطی باشد و Convex باشد کافی است (البته نباید نایقینی داشته باشد)

باید مسئله معادل فیزیکی داشته باشد و توضیح دهید که پارامترهای مدل نوشته شده چه ارتباطی با مسئله فیزیکی دارد و نایقینی در پارامترهای مدل، معادل چه نایقینی در مسئله فیزیکی است.

وارد دنیای integer نشده‌ایم چون دنیای متفاوتی است و ابزارهای متفاوتی هم دارد که اکثراً بر مبنای search است و پیوسته نیست که بتوان مشتق گرفت.

تحلیل حساسیت خیلی مربوط نیست چون ادبیات متفاوتی با Robust دارد. در تحلیل حساسیت، تحلیل پسین و بعد از حل مسئله است. در Robust، قبل از حل مسئله است. البته ربط دارند.

مسئله های کنترل خطی NetLib را می‌توان به بهینه سازی متعادل تبدیل کرد.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = kx \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = (A + Bk)u \xRightarrow{\text{لیاپانوف}} (A + Bk)^T P + P(A + Bk) \leq I$$

$$Q = P^{-1}, \quad kQ = L \Rightarrow (AQ + BL) + (AQ + BL)^T \leq I$$

$k = LQ^{-1}$ بعد

که یک مسئله خطی در L, Q است و حل می‌شود.

Subject:
Date

Normalization

چگونه حدود را به $[-1,1]$ تبدیل کنیم؟

$$V_0 + \sum V_\ell z_\ell \geqslant 0 \qquad z_\ell = \alpha_\ell + \beta_\ell \hat{z}_\ell \qquad \beta_\ell , \alpha_\ell$$ معلوم

به گونه‌ای که $-1 \leqslant \hat{z}_\ell \leqslant 1$ شود.

بعد از اعمال تبدیل z_ℓ به $\hat{z}_\ell$ $\longrightarrow$ $\hat{V}_0 + \sum \hat{V}_\ell \hat{z}_\ell \geqslant 0$

$$\text{s.t.} \quad \hat{V}_0 = V_0 + \sum \alpha_\ell V_\ell \ , \quad \hat{V}_\ell = \beta_\ell V_\ell$$

$$\text{then: } \operatorname{Prob}\left\{ V_0 + \sum V_\ell z_\ell \geqslant 0 \right\} = \operatorname{Prob}\left\{ \hat{V}_0 + \sum \hat{V}_\ell \hat{z}_\ell \geqslant 0 \right\}$$

$$z_\ell \longrightarrow P.1, P.2 \longrightarrow \mu_\ell^{\pm}, \ \sigma_\ell \xrightarrow{\text{for } \hat{z}_\ell} \begin{cases} \mu_\ell^{\pm} = \alpha_\ell + \beta_\ell \hat{\mu}_\ell^{\pm} \\ \sigma_\ell = \beta_\ell \hat{\sigma}_\ell \end{cases}$$

با این نوع تغییر متغیر، همیشه می‌توان شرط محدوده‌ی z_ℓ را به بازه $[-1,1]$ تبدیل کرد.

یکی از مراحل حل، پیدا کردن پارامترهای $\mu_\ell^{\pm}, \sigma_\ell$ در شرط P.2 می‌باشد.

چند مثال، اول. مثال ۱) اغتشاش گوسی: ① z_ℓ ها مستقل $\Leftarrow$ شرط P.1

z_ℓ ها میانگین μ_ℓ و واریانس S_ℓ دارند که نامعلوم است ولی گوییم:

می‌دانیم $\mu_\ell \in [\mu_\ell^-, \mu_\ell^+]$ ، $S_\ell^2 \leqslant \sigma_\ell^2$ که $\mu_\ell^{\pm}$ ، σ_ℓ^2 را می‌دانیم.

شرط P.2 را می‌خواهیم بررسی کنیم ببینیم برقرار است یا خیر.

dual $2 \times 37 = 74$

Subject:
Date

شرط P.2 را برای z گوسی فرض می‌کنیم

$N(\mu,\sigma^2)$ گوسی

$$E\left[\exp(tz)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int e^{ts}\exp\left(-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)ds$$

$r \triangleq s-\mu$

$$= e^{t\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int e^{tr}\exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right)dr$$

با جبر و بازی ریاضی:

$$= e^{t\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}\exp\left(\frac{-(r-t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right)dr$$

بعد $e^{t^2\sigma^2/2}$ چون ثابت است و از انتگرال بیرون می‌آید:

$$= e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int \exp\left(\frac{-(r-t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right)dr}$$

این قسمت معادل انتگرال کامل روی p.d.f یک توزیع گوسی با میانگین $t\sigma^2$ و واریانس σ^2 است که یک می‌شود.

$$\Rightarrow E\left[\exp(tz)\right] = e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

اگر بدانیم μ بین μ_l^-, μ_l^+ است و σ^2 از یک σ_l^2 دیگر کمتر است

$$\longrightarrow \quad '' \quad \leq \exp\left\{\max\left[\mu_l^- t, \mu_l^+ t\right] + t^2\sigma_l^2/2\right\}$$

که دقیقا همان شرط P.2 شد

در نتیجه مسئله‌ی تخمین این می‌شود:

$$a^T x \leq b$$

روابط بعد صفحه بعد:

$$[a;b] = [a^0;b^0] + \sum_{l=1}^{L} z_l\left[a^l;b^l\right]$$

PAPCO

75 $= 3\times 5^2$ dual

Subject:
Date

$$[(a^0)^T - b^0] + \sum \max\left[\mu_\ell^-\left[(a^\ell)^T x - b^\ell\right], \mu_\ell^+\left[(a^\ell)^T x - b^\ell\right]\right]$$

$$+ \sqrt{2\ln(1/\varepsilon)}\sqrt{\sum \sigma_\ell^2\left((a_\ell)^T x - b_\ell\right)^2} \le 0$$

is a safe approximation for $P(a^T x \le b) \ge 1-\varepsilon$

با فرض z_ℓ ها مستقل و $z_\ell \sim N(\mu_\ell, \sigma_\ell^2)$

در حالت خاص $\mu_\ell^\pm = 0$ ، $\sigma_\ell = 1$ ، تخمین این فوق می‌شود Robust Counterpart for Ball_Ω where $\Omega = \sqrt{2\ln(1/\varepsilon)}$ which was equivalent to chance constraint Box_1.

ظاهرشان ربط ندارد و یکی نیست. در آن‌جا داشتیم $z_\ell \in [-1,1]$ ، $E\{z_\ell\} = 0$

مثال دوم: اغتشاش کران‌دار: $P: [-1,1]$. فقط توزیع‌ها بین 1- و 1 است

$$E\{\exp(tz)\} = \int \exp\{ts\}\, dp(s)$$

شرط P.2 را باز بررسی می‌کنیم، worst case $s=+1, t>0$ یا $s=-1, t<0$ برای بزرگ شدن

چون $|s| \le 1$

$$\le \int \exp\{|t|\}\, dp(s) = \exp\{|t|\} \underbrace{\int dp(s)}_{1} \qquad ts \le |t||s| \le |t|$$

$$= \exp\{|t|\}$$

برای این که فرض P.2 در بیاید،

و داریم $|t| = \max\{-t, t\}$ در نتیجه کافی است $\mu_\ell^- = -1, \mu_\ell^+ = 1, \sigma_\ell = 0$

هیچ نیازی به میانگین z_ℓ برابر صفر نبود. غیر از bound که 1- و 1 است،

هیچ فرض دیگری نگرفتیم.

PAPCO

dual $2^2 \times 19 = 76$

Subject:
Date

اگر جاگذاری کنیم: $[(a^0)^T x - b^0] + \sum |(a^l)^T x - b^l| \leq 0 \Rightarrow Box_1$

اینجا فقط از حدود استفاده می‌کردیم و اطلاعات دیگری از توزیع را استفاده نکرده‌ایم.

به همین دلیل از حالت که در مورد توزیع اطلاعات بیشتری داشته باشیم محافظه‌کارانه‌تر می‌شود.

مثال: در مسائل دنیای واقعی، اگر خوش‌شانس باشیم، توزیع پارامترهای مسئله دنیای واقعی شروط P.2 را دارد و از نتایج آن استفاده می‌کنیم. اگر بدشانس باشیم، باید یک یک بروی مراحل را.

مثال سوم: تابع Unimodal : $P: [-1, +1]$ → $P(s): s < 0$ غیرنزولی، $P(s): s > 0$ غیرصعودی

میانه صفر است.

مثلاً توزیع نرمال، unimodal است.

به خاطر ویژگی تابع unimodal، بیشترین احتمال رخ دادن‌اش $s=0$ است.

باز شرط دوم را بررسی کنیم: $t \geq 0: E\{\exp(tz)\} = \int_{-1}^{+1} \exp(ts)\, dP(s)$

این حالت، نسبت به مثال دوم اطلاعات بیشتری داریم.

$$\int_{-1}^{1} \exp(ts)\, dP(s) \leq \int_{0}^{1} \exp(ts)\, ds = \frac{1}{t}(e^{t} - 1)$$

C.D.F

$$\text{for } t \leq 0: \quad " \leq \frac{1}{|t|}(e^{|t|} - 1)$$

هم اگر بنویسیم و دو تا حالت را با $|t|$ یکی کنیم که از قبلی خیلی بهتر است.

فقط باید به فرم P.2 تبدیل ارش کنیم و نامعادله را هم بگیریم چرا درست است.

$77 = 7 \times 11$ dual

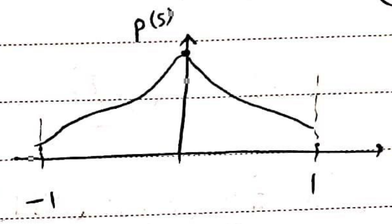
Subject:
Date

$$\int_{-1}^{1} \exp\{ts\}\, dP(s)$$

CPF

pdf $p(s)\,ds$

مثلاً توزیع $p(s)$ به صورت زیر می‌شود:



(استفاده شود.)

از این که $p(0)$ بیشترین مقدار را دارد باید

خلاصه: $E\{\exp\{tz\}\} \leq \frac{1}{|t|}\left(e^{|t|}-1\right) = f(t)$

$\ln\left(E\{\exp\{tz\}\}\right) \leq \ln\left(f(t)\right) = h(t)$ می‌دانیم با: $h(0) = \ln(f(0)) = \dots = 0$

با یک بسط تیلور باز

به صورت صریح

با محاسبات ساده

با یک بسط تیلور، می‌گوییم (و می‌توان ثابت هم کرد) $h'(0) = \frac{1}{2}$, $h''(0) = \frac{1}{12}$

$$h(t) \leq \frac{1}{2}|t| + \frac{1}{24}t^2 \Longrightarrow \mu_\ell^{\pm} = \frac{\pm 1}{2}, \quad \sigma_\ell^2 = \frac{1}{12}$$

با اضافه کردن یک شرط ساده unimodal بودن، بازه‌ی $\mu_\ell^{\pm}$ نصف شد.

جلسه بعد نامساوی را خواهیم گفت. شاید شکل بیضی هم بزنند. وارد مبحث بعدی می‌شویم. می‌خواهیم

محدوده‌ای که پیدا کردیم برای برقراری Globalized Robust Counterpart

شرط $\bar{a}^T x - b \leq 0$ برقرار است و حتی اگر از آن محدوده بیرون رفتیم، قید فاصله نقض شد بین $a^T x, b$.

تاریخ میان‌ترم. میان‌ترم می‌خواهند تا پایان فصل چهار باشد. هفته آخر اردیبهشت.

چهارشنبه یا پنج‌شنبه می‌گذارند. 26 ام اردیبهشت پیشنهاد است یا ۲ ام خرداد.

فعلاً قرار 26 ام اردیبهشت است. انجام پروژه: تا آخر هفته صورت پروژه را می‌گذارند. تحویل همزمان با میان‌ترم

۴ فصل اول را روی پروژه اعمال می‌کنیم. بهترین کار اینه

paper ای است که رفرنس دهیم. triple $2 \times 3 \times 13 = 78$

Subject:
Date

جلسه دوازدهم دوشنبه ۲۷ ,۱ ,۱۴۰۳ 2024 - 04 - 15

مثال: $P \to [-1, 1]$, $E\{Z\} = \mu \in [\underbrace{\mu^-, \mu^+}_{\text{known}}]$ such that $-1 \leq \mu^- \leq \mu^+ \leq 1$

ابتدا نشان می‌دهیم شروط P.1 , P.2 برقرار است و

پارامترهای $\mu^\pm$ و σ را محاسبه می‌کنیم.

For a known t:

$$\varphi(s) = \exp(ts) - \sinh(t)\, s$$ It can be shown $\varphi(s)$ is convex on $s \in [-1, 1]$

$\varphi(\pm 1) = \cosh(t)$ یکی از مرزها رخ می‌دهد ∪ max ← ادامه

حال شرط P.2 را می‌نویسیم.

$$\int \exp(ts)\, dP(s) = \int \left(\varphi(s) + \sinh(t)\, s\right) dP(s)$$

$$= \int \underbrace{\varphi(s)\, dps}_{\leq \cosh(t)} + \sinh(t) \underbrace{\int s\, dP(s)}_{\text{طبق تعریف } \mu \text{ می‌شود}} \leq \cosh(t) + \mu \sinh(t) \triangleq f_\mu(t)$$

$$h_\mu(t) \triangleq \ln f_\mu(t)$$

$$\Sigma(\mu^-, \mu^+) \triangleq \min\left\{ c \geq 0 : h_\mu(t) \leq \max\left[\mu^- t, \mu^+ t\right] + \frac{c^2}{2} t^2, \ \forall \mu \in [\mu^-, \mu^+] \right\}$$

این همان σ است که باید مسئله بهینه‌سازی ادامه را حل کنیم. می‌کنیم.

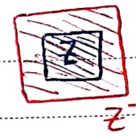
می‌خواهیم c را پیدا کنیم. $h_\mu(t)$ را می‌گذاریم و بعد بسط تیلور می‌زنیم و ساده می‌کنیم و حل

می‌توان حالات دیگر را هم بررسی کرد. بیشتر حرف‌هایی است که زده‌ام. آخر فصل دو

کتاب است که خودتان نگاه کنید.

Subject:
Date

RC: $v_0 + \sum z_\ell v_\ell \leq 0 \quad \forall z \in Z \subseteq \mathbb{R}^L$



گاهی $Z \subseteq Z_+$ وجود دارد که Z_+ از نظر فیزیکی ممکن است. در RC، در مورد $z \in Z$ تضمین می‌دهیم ولی می‌خواهیم کاری کنیم که در $z \in Z_+ \setminus Z$ هم $v_0 + \sum v_\ell z_\ell$ تغییر نکند. دو تا شرط پیش داریم:

① $\forall z \in Z: \; v_0 + \sum z_\ell v_\ell \leq 0$

② $\forall z \in Z_+ \setminus Z$: $v_0 + \sum z_\ell v_\ell$ با یک تابع خطی نسبت به فاصله از Z رشد کند

یعنی: $(a^0 + \sum z_\ell a^\ell)^T x - (b^0 + \sum z_\ell b^\ell) \leq \alpha \, dist(z, Z)$

$\forall z \in Z_+ \quad \alpha \geq 0$ پارامتر حساسیت

این نامساوی، دو شرط ① و ② را همزمان می‌سازد، زیرا اگر $z \in Z$ باشد، $dist(z, Z) = 0$

می‌خواهیم RC نامساوی بالا را محاسبه کنیم. واضح است که تابع α می‌شود.

می‌توانیم α را design parameter در نظر بگیریم یا اینکه $\min_\alpha$ بگذاریم و کمینه α را به دست آوریم.

می‌خواهیم مسئله فوق را حل کنیم. ابتدا مفروضات را بررسی و بیان می‌کنیم

(a) Z is closed convex non-empty. (b) $Z_+ = Z + L$ where L is closed convex cone

مرزها هم در Z باشد.

(c) $dist(z, Z \mid L) = \inf_{z'} \{ \|z - z'\|, \; z' \in Z, \; z - z' \in L \}$

PAPCO

dual $2^4 \times 5 = 80$

Subject:
Date

بین ساختار اعشاری مرشود $(Z, \mathcal{L}, \|\cdot\|)$.

تعریف: فرض کنیم $(Z, \mathcal{L}, \|\cdot\|)$ ساختار اعشاری باشد. به ازای $\alpha \geq 0$

x را Globally Robust Feasible با پارامتر حساسیت سراسری $\alpha \geq 0$ می‌نامیم

هرگاه $[a^0 + \sum z_\ell a^\ell]^T x - (b^0 + \sum z_\ell b^\ell] \leq \alpha \, dist(z, Z \mid \mathcal{L})$
$\forall z \in Z + \mathcal{L}$

به این شرط معادل Globally Robust Counterpart (GRC) گوییم.

تضمین: شرط داده شده در تعریف، معادل شروط زیر است

① $(a^0 + \sum z_\ell a^\ell)^T x \leq b^0 + \sum z_\ell b^\ell, \ \forall z \in Z$

② $(\sum \Delta_\ell a^\ell)^T x \leq (\sum \Delta_\ell b^\ell) + \alpha, \ \forall \Delta \in \tilde{Z}$

and $\tilde{Z} = \{z \mid z \in \mathcal{L}, \|\Delta\| \leq 1\}$

چون L یک cone است، اگر $z_1 \in \mathcal{L}$ باشد $\beta z_1 \in \mathcal{L}$ ، $\beta \geq 0$ هم

خواهد بود. $\underset{\in Z}{z^*} = z_0 + \underset{\in \mathcal{L}}{z_1}$ و $\bar{z} = z_0 + \beta z_1$

اگر z^* در GRC باشد، $\bar{z}$ هم باید در شرط GRC صدق کند.

اگر شرط را برای z^*، $\bar{z}$ بنویسیم، مشخص می‌شود که برای $1 \leq \beta$

اگر شرط برای z^* برقرار باشد، برای $\bar{z}$ هم برقرار می‌باشد. به همین دلیل در قسمت فقط

برای $\|\Delta\| \leq 1$ لازم است که اثبات را انجام دهیم.

PAPCO
(81) = 3^4 pure

Subject:
Date

دو تا شرط قضیه را می‌توانیم با کمک علم قبلی حل کنیم.

• مثال: $Z = Box = \{z : |z_\ell| \leq \sigma_\ell\}$, $L = \mathbb{R}^L$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$

نشود GRC را بنویسیم. دو تا قید باید بنویسیم بر طبق قضیه.

$$① \quad (a^0)^T x - b^0 + \sum_{\ell=1}^{L} \sigma_\ell \left|(a^\ell)^T x - b^\ell\right| \leq 0$$

$$② \quad \sum_{\ell=1}^{L} \left|(a^\ell)^T x - b^\ell\right| \leq \alpha$$

این جا شرط دوم هم Box_1 شد.

اگر چیز دیگری می‌شد یک linear transform باید ~~[illegible]~~ می‌زدیم تا دوباره Box_1 شود.

حالات دیگر L را از پایان فصل کتاب مطالعه کنید. فصل سه تمام شد!

Section 3 فصل ۳، مثال عملی طراحی آنتن دارد که مثال خوبی است و مطالعه شود.

جلسه سیزدهم شنبه ۱۴۰۳/۰۲/۰۱ 2024-04-20

تا الآن اکثر مسائل را کاربردی کردیم، زیر مجموعه‌ی شروط P.1 , P.2 بود و تحلیل کردیم برای به دست آوردن Robust Counterpart. امروز که وارد فصل چهارم می‌شویم، این شروط را relax می‌کنیم.

هر مسئله‌ی Chance Constraint یک تخمین امن خوب دارد.

در elearn دو تا نمونه پروژه از سال قبل قرار داده شده است به همراه کتابخانه Comp lib.

PAPCO

dual $2 \times 41 = 82$

Subject:
Date

Chance Constraint: $P(V) = \text{Prob}\{ v_0 + \sum z_\ell v_\ell > 0 \} \leq \epsilon$ $\boxed{\star}$

$\hookrightarrow$ Safe Approximation: S s.t. if $v \in S \rightarrow P(V) \leq \epsilon$

$S(v,u) \longrightarrow \text{Proj}_V(S)$

Convex & known

$V[S] = \{ V = [v_0; v_1; \dots; v_L],\ v_0 + \sum z_\ell v_\ell \leq 0,\ \forall z \in Z_\epsilon \}$

RC

$V_* =$ فضای شدنی واقعی مسئله $\boxed{\star}$ یک‌سری شروط

(i) $V_* \rightarrow$ Conic Set, $0 \in V_*$

~~[illegible]~~ می‌توان اثبات کرد دارد :

$v \in V_*,\ \lambda v \in V_* \ (\forall \lambda > 0)$

یا نشان داد

(ii) V_* closed

(iii) $V[v_0] = \{ V = [v_0; v_1; \dots; v_L],\ \| [v_1; \dots; v_L] \|_2 \leq 1 \}$

if $v_0 < 0$, $|v_0|$ به اندازه کافی بزرگ : $V[v_0] \subseteq V_*$

(iv) $V[v_0]$ بالا, $|v_0|$ به اندازه کافی بزرگ $\Rightarrow$ $V[v_0]$ هیچ اشتراکی با V_* ندارد.

تعریف: یک تخمین امن نرمال است، اگر $V[S]$ شروط (i) و (ii), (iii) را داشته باشد. (شرط (iv) را هم طبیعتاً خواهد داشت)

PAPCO

83 prime

Subject:
Date

می‌خواهیم بگوییم چه مسائل Chance Constraint ای قابلیت تخمین امن زدن و رسیدن به RC دارد.

چون مسئله RC را یاد گرفتیم تبدیل به مسئله Convex بدون عدم قطعیت کنیم و بعد حل کنیم.

• قضیه: فرض کنید برای تخمین امن محدب که $V[S]$ محدب است. این تخمین نرمال است اگر و فقط اگر: $V[S] \subseteq V_*$ → closed convex cone

interior

$e = [-1; 0; \dots; 0] \in \text{int } V[S]$

$-e \notin \text{int } V[S]$

• قضیه: فرض کنید که تخمین امن محدب نرمال باشد. آن گاه $V[S]$ قابلیت بیان به صورت یک RC را دارد. به عبارت دیگر Z وجود دارد که

Z: convex compact

$$V[S] = \{ V : V_0 + \sum Z_\ell V_\ell \leq 0 \ , \ \forall z \in Z \}$$

اثبات: S نرمال $\Rightarrow e \in \text{int } V[S]$, $-e \notin \text{int } V[S]$

از این جا به بعد منظورمان از V همان $V[S]$ است. $V := V[S]$

چون V مخروط است (V_). V is anti-dual of its anti-dual

$\Rightarrow V = \{ V \in \mathbb{R}^{L+1} \mid V^T Z \leq 0 ; Z \in V_- \}$: V_- تعریف دوگان

Subject:
Date

تعریفِ دوگان V :

$$V_- = \{ z \in \mathbb{R}^{L+1} \mid z^T v \le 0 \ ; \ v \in V \}$$

طبق فرض: $e \in \text{int } V$

$$\hat{Z} = \{ y \in \mathbb{R}^{L+1} \mid e^T y = -1 ,\ y \in V_- \}$$

فرم y می‌شود $= [1 ; y_1 ; y_2 ; \dots ; y_L]$

مجموعه‌ی اعضای V_- است که درایه اول‌شان یک می‌باشد

گویا همان بالایی است با بیان دیگر فقط $Z = \{ z \in \mathbb{R}^L \mid [1 ; z] \in V_- \}$

$$V = \{ v : v^T y \le 0 ,\ \forall y \in V_- \}$$

$$= \{ v : v^T [1 ; z] \le 0 ,\ \forall z \in \hat{Z} \}$$

در Cone، یک ضریب scale و درجه آزادی داریم که کاری کردیم که اول یک شود.

$$= \{ v = [v_0 ; \dots ; v_L] \mid v_0 + \sum z_\ell v_\ell < 0 ,\ \forall z \in Z \}$$

تا الان کار خاصی نکرده‌ام و فقط صورت مسئله را بازنویسی کرده‌ام. اصل کار به دست آوردن تخمینی است که قابل حل باشد و Tractable باشد

قبلاً شرط P.2 را گفتیم و $\Phi(w)$ را هم تعریف کردیم.

$$\ln\left(E\left(\exp(w^T z)\right)\right) \le \Phi(w) = \sum \max[\mu_\ell^- w , \mu_\ell^+ w] + \frac{1}{2} \sigma_\ell^2 w_\ell^2$$

$$v \in V_\epsilon = Cl \{ v : \exists \alpha > 0 : \alpha v_0 + \Phi(\alpha v) \le \ln(\epsilon) \}$$

$$v = [v_1 ; \dots ; v_L]$$

کل هدف مسأله این است که شرط‌ها P.2 را relax کنیم.

Subject:
Date

Q1) $\ln\left(E\left(\exp\left(w^T z\right)\right)\right) \leqslant \Phi(w)$ شرط Q1 را جایگزین می‌کنیم: که

$\Phi(w)$ کافی است محدب و کران‌دار باشد و $\Phi(0)=0$.

واضح است شرط Q1، از شرط P.2 ساده‌تر است

$$V_\varepsilon^o = \left\{ v = [v_0 ; w] \in \mathbb{R}^{L+1} \;\middle|\; \exists \alpha > 0 : \alpha v_0 + \Phi(\alpha w) \leqslant \ln(\varepsilon) \right\}$$

$V_\varepsilon = cl(V_\varepsilon^o)$, then if $v \in V_\varepsilon^o$ then

$Prob\{v_0 + \sum v_\ell z_\ell > 0\} \leqslant \varepsilon$ اثبات مشابه دفعه قبل است.

یعنی V_ε^o یک تخمین امن از مسئله است. کافی است آن را توصیف کنیم.

• قضیه: تحت شرط Q1، V_ε دقیقاً توسط مجموعه محدب زیر توصیف می‌شود:

$$\left\{ v \;\middle|\; \inf_{\beta > 0} \left\{ v_0 + \beta\, \Phi(\beta^{-1} w) + \beta \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right\} \leqslant 0 \right\}$$

$[v_1 ; v_2 ; \dots ; v_L]$ این شرط یک شرط محدب است.

این را می‌توان ثابت کرد که تخمین امن نرمال برای مسئله $\boxed{*}$ تحت Q1 است.

Subject:
Date

برای بیان بهتر، Q2 را هم اضافه میکنیم.

$$Q2)\ \Phi(w) = \sup_u \{ w^T (Au + a) - \phi(u) \}$$

* که $\phi(u)$ محدب و از پایین پیوسته است. if $\{u_i\} \to u_0$

then $\phi(u_i) \to \phi(u_0)$

level sets of ϕ

* $U_C = \{ u : \phi(u) \leqslant C \} \to$ کراندار باشند.

خیلی وقت ها محقق جلو رفته است وقتی به گیر خورده، شرط اضافه کرده است و

بعداً وقتی شروط را اول کار میگویند، شروط عجیب و غریب به نظر میآید.

بین ۲۶ اردیبهشت و ۲ خرداد یکی شان خواهد بود. با کمی جابجایی نیز.

همایش

2024-04-22 دوشنبه ۱۴۰۳/۰۲/۰۳ جلسه چهاردهم

کل مسئله Chance Constraint بود. $P(V) = \mathop{Prob}_{z \sim P} \{ v_0 + \sum z_\ell v_\ell > 0 \}$

قبلاً شروط P1، P2 را گفتیم و حال داریم شروط Q1، Q2 را میگوییم که ساده‌تر و

relax‌تر هستند. $Q1)\ \ln(E\{\exp\{w^T z\}\}) \leq \Phi(w)$

known, bounded, $\Phi(0) = 0$

در این شرایط، مسئله Chance-constraint تبدیل میشود به حل مسئله زیر:

PAPCO

 = 3 × 29 dual