Subject:
Date

$$\inf_{\beta>0} \left\{ V_0 + \beta\, \Phi(\beta^{-1} w) + \beta \ln(1/\varepsilon) \right\} \leq 0$$ نزاندر

$w \to [v_1; \dots; v_L]$

واقعاً تبدیل ... Φ است.

Q2) $$\Phi(w) = \sup_u \left\{ w^T (Au + a) - \phi(u) \right\}$$ باید از پایین پیوسته باشد و

level-set هاش کراندار باشد و محدب هم باشد.

if $\Phi(w)$ کراندار و محدب $\Rightarrow$ $\xrightarrow{A=I}$ $Au + a = u$

$a = 0$

$\longrightarrow$ $\phi(u) = \sup_w \left\{ w^T u - \Phi(w) \right\}$

$$\Phi(w) = \underbrace{\sum_{l=1}^{L}} \left[\max\left[\mu_l^- w_l, \mu_l^+ w_l\right] + \frac{1}{2} \sigma_l^2 w_l^2 \right]$$

$$= \sup_{u^l, u_l} \left\{ \sum \left[w_l (u^l + u_l) - \frac{u_l^2}{2\sigma_l^2} \right] ; \mu_l^- \leq u^l \leq \mu_l^+ \right\}$$

$(Au + a)_l = u_l + u^l$, $\phi(u) = \varphi_l(u_l, u^l)$

درایه l ام

$$\varphi_l(u^l, u_l) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma_l^2} ; & \mu_l^- \leq u^l \leq \mu_l^+ \\ 0 ; & \text{o.w.} \end{cases}$$

یادآوری: هدف، پیدا کردن تعیین عمل برای شرط Chance-Constraint که

شروط Q1 , Q2

PAPCO

یادآوری! dual $2^3 \times 11 = 88$

Subject:
Date

تخمین برنشتاین: فرض کنیم توزیع P شرط Q1 , Q2 را برآورده میکند.

با توجه به شرط روی Φ، مجموعه کاندارد را

$$U_\varepsilon \triangleq \{ u : \Phi(u) \leq \ln(1/\varepsilon) \}$$

میتوان نشان داد که U_ε مجموعه Convex, Compact است.

تخمین امن V_ε برای CC

Chance Constraint

$$V_\varepsilon = cl \{ v = [v_0 ; w] ; \exists \alpha > 0 \quad \alpha v_0 + \Phi(\alpha w) \leq \ln(\varepsilon) \}$$

• ادعا (تخمین برنشتاین):

$$v \in V_\varepsilon \leftrightarrow v_0 + z^T w \leq 0 \quad \forall z \in Z_\varepsilon ; Z_\varepsilon = AU_\varepsilon + a$$

$$= \{ v_0 + \sum z_\ell v_\ell \leq 0 ; \forall z \in Z_\varepsilon ; Z_\varepsilon = AU_\varepsilon + a \}$$

چون U_ε، Convex, Compact است ← Z_ε هم Compact, Convex است.

شرط نوشته شده، یعنی $v_0 + z^T w \leq 0$، RC مسئله است. از اینجا به بعد شکل قبل است.

اگر Z_ε خوب بود محدوده‌ای که خوشحالیم و حل میکنیم. اگر خوب نبود، شاید لازم باشد

تخمین‌اش بزنیم. اثبات ادعای بالا در پیوست کتاب هست. طولانی است.

Z_ε، تابعی از $\Phi(w)$ و نمایش تبدیل لژاندر است. نه $\Phi(w)$ یکتاست (چون

حد بالاست) و نه برای یک Φ مشخص، تبدیل لژاندر آن یکتاست.

Subject:
Date

می‌توان نشان داد که مستقل از تبدیل Φ به ϕ، z_ℓ یکتاست. به عبارتی

z_ℓ، فقط وابسته به $\Phi(w)$ است.

● مثال: ① z_ℓ ها مستقل. ② $z_\ell \in [-1,1]$ ③ $E\{z_\ell\} \in [\mu_\ell^-, \mu_\ell^+]$

می‌توان نشان داد که ϕ روبرو Φ خوب است: $\Phi(w) =$

$$\sum_\ell \ln\Big(\max_{\mu\in[\mu_\ell^-,\mu_\ell^+]} \big(\cosh(w_\ell) + \mu_\ell \sinh(w_\ell)\big)\Big)$$

می‌توان نشان داد: $\Phi_\ell(w_\ell) = \max_{\mu_\ell\in[\mu_\ell^-,\mu_\ell^+]} \ln\Big[\exp\big(w_\ell+\ln(\frac{1+\mu_\ell}{2})\big) + \exp\big(w_\ell+\ln(\frac{1-\mu_\ell}{2})\big)\Big]$

$\Phi(w) = \sum \Phi_\ell(w_\ell)$

اگر sinh، cosh را باز کنیم می‌شود.

می‌توان نشان داد: $\boxed{\star}$ $\ln\big(\sum \exp(x_i)\big) = \max_y \{x^T y - \sum y_i \ln y_i \mid y_i \geq 0, \sum y_i = 1\}$

جای max، ln را عوض کرده‌ام که چون ln صعودی است، مشکلی ندارد.

باید A، a را پیدا کنیم برای شرط Q2.

اگر نشان دهیم Φ کران‌دار و محدب است می‌توانیم از حالت خاص استفاده کنیم و

$$\Phi_\ell(w_\ell) = \max_{-1\leq u_\ell\leq +1} \{w_\ell u_\ell - \phi_\ell(u_\ell)\}$$

$\phi_\ell(u_\ell)$ صفر بعد:

PAPCO

Subject:
Date

$$\varphi_\ell(u_\ell) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[(1+u_\ell)\ln\left(\frac{1+u_\ell}{1-\mu_\ell^-}\right) + (1-u_\ell)\ln\left(\frac{1-u_\ell}{1-\mu_\ell^-}\right)\right] & -1 \leq u_\ell \leq \mu_\ell^- \\ 0 & \text{o.w.} \\ \frac{1}{2}\left[(1+u_\ell)\ln\left(\frac{1+u_\ell}{1+\mu_\ell^+}\right) + (1-u_\ell)\ln\left(\frac{1-u_\ell}{1-\mu_\ell^+}\right)\right] & \mu_\ell^+ \leq u_\ell \leq 1 \end{cases}$$

رسیدن به این رابطه از $\boxed{\star}$ بوده گویا. اگر φ_ℓ این گونه تعریف شود،

$\varphi = \sum \varphi_\ell$ ، چون $Au + a = u \Rightarrow Z_\varepsilon = U_\varepsilon$

$$U_\varepsilon = \left\{ u : \varphi(u) \leq \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right\}$$

RC خلاصه می‌شود : $\quad v_0 + \sum z_\ell v_\ell \leq 0$

$$\forall z \in U_\varepsilon$$

پس مراحل این گونه می‌شود که ابتدا باید $\Phi(w)$ کراندار برای کوال بالا پیدا کنیم و

بعد بسته به شروطی که روی $\Phi(w)$ صادق است (شروط P1 , P2 یا شروط Q1, Q3)

می‌توانیم ساده کنیم و مسئله‌ی CC را به مسئله‌ی RC تبدیل کنیم و با ابزارهای

بهینه سازی محدب معمول حل کنیم. در شرط Q1, Q2، ممکن است پیدا کردن φ

از روی Φ سخت باشد. باید φ محدب کراندار باشد

مگرنه دردی از ما دوا نمی‌کند.

$\eta^v = v_0 + \sum z_\ell v_\ell$ چون $z_\ell \sim P$ است $\quad P(v) = \text{Prob}\{\eta^v > 0\} \leqslant \epsilon$

η^v یک متغیر تصادفی می‌شود.

در مسئله CC دنبال این هستیم

که یک کران بالا برای $P(v)$ پیدا کنیم که احتمالاتی نباشد. در واقع شروط Q1, Q2, و

برنشتاین را باز عمومی‌تر کنیم.

$$\gamma(s): \text{ s.t. } \begin{cases} \gamma(\cdot) \geqslant 0 \\ \gamma(0) \geqslant 1 \\ \gamma(s) \to 0, \quad s \to -\infty \end{cases} \qquad \gamma: \text{non-decreasing} \text{ در } \mathbb{R}^+ \text{ and } \gamma \text{ convex}$$

تابع γ را به گونه‌ای بیابیم که این خواص را داشته باشد.

$$\Rightarrow \quad s \geqslant 0 : \gamma(s) \geqslant 1$$

می‌خواهیم رابطه $\Psi_*(v)$ را با $P(v)$ به دست آوریم

$$\Psi_*(v) \triangleq E\{\gamma(\eta^v)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\eta^v)\, dP_z$$

$$P(v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\eta^v)\, dP_z$$

step function

با توجه به شروط $\gamma(s)$، می‌توان گفت:

$$\gamma(\eta^v) \geq u(\eta^v)$$

الان $\gamma(s)$ از $e^{(s)}$ ساده‌تر است و شرط کمتری دارد.

$$\Psi_*(v) \geqslant P(v)$$

اگر $\Psi_*(v) \leqslant \epsilon$ شود، یک تخمین این — شرط کافی برای

برای مسئله CC خواهد بود. می‌توان نشان داد $\Psi_*(v)$ هم محدب است و هم کران دار است.

$$\Psi_*(v_0 + t[-1; 0; \dots; 0]) \longrightarrow 0, \quad t \to \infty$$

dual $2^2 \times 23 = 92$

Subject:
Date

گویا به جای $E\{\exp(t\omega)\}$ که قبلاً داشتیم، داریم $E\{\gamma(\cdot)\}$ رو گذاریم و کران بالا برای

به جای $\Phi(\omega)$ رشود حالت کلی‌تر. معادل $\Phi(\omega)$ از قبل

$\exists \Psi: \ \Psi_*(v) \leq \Psi(v)$

$$P(v) = P(\alpha v) \leq \inf_{\alpha>0} \Psi(\alpha v)$$

تخمین امن

$$T_\varepsilon^\circ = \{v : \exists \alpha>0 : \overline{\Psi(\alpha v) \leq \varepsilon}\} \Rightarrow T_\varepsilon = cl\, T_\varepsilon^\circ$$

حالت خاص تخمین بالا که $\gamma(s)=e^s$ باشد، رشود گویا تخمین برنشتاین.

تمام کاری که برای Φ و برنشتاین کردیم تا φ برسیم و تبدیل لژاندر، برای Ψ انجام خواهیم داد.

جلسه پانزدهم شنبه ۱۴۰۳/۰۲/۰۸ 2024-04-27

$$P(v) = Prob\{\underbrace{v_0 + \sum z_\ell v_\ell}_{\eta^v} > 0\} \leq \Psi_*(v) = E\{\gamma(\eta^v)\}$$

که یک سری شرایط روی $\gamma(\cdot)$ گفتیم (صفحه قبل). اگر بتوانیم کران بالا برای

آن پیدا کنیم، یعنی $\underbrace{E\{\gamma(\eta^v)\} \leq \Psi(v)}_{\text{تعمیم شرط Q1}}$ در آن صورت $P(v) \leq \Psi(v)$

رشود و $\Psi(v) \leq \varepsilon$ یک تخمین امن برای C.C. سان خواهد بود.

برای بهبود، گفتیم: $\forall \alpha>0: \ \underbrace{P(\alpha v)}_{=P(v)} \leq \Psi(\alpha v)$

و برای بهینه بودن، $\inf_{\alpha>0} \Psi(\alpha v) \leq \varepsilon$ یک تخمین امن برای C.C است.

PAPCO

(93) = 3 x 31 dual

$$\Rightarrow T_\varepsilon^\circ = \{ v : \exists \alpha > 0 : \psi(\alpha v) \le \varepsilon \} \to T_\varepsilon = cl\, T_\varepsilon^\circ$$

در برنشتاین، $\gamma(s)=e^s$ قرار می‌دهیم، که گویا جایگزین QZ می‌شود.

حال تعمیم می‌دهیم QZ را: $\Psi(v) = \min_u \{ v^T(Bu+b) - \psi(u) \}$

$\psi(u)$ از پایین پیوسته، و level-set ها کراندار

$$U_\varepsilon = \{ u : \psi(u) \le -\varepsilon \}, \quad v \in T_\varepsilon \leftrightarrow v^T(Au+b) \le 0 \quad \forall u \in U_\varepsilon$$

الان، در این تعمیم، بر خلاف برنشتاین که $\gamma(s)=e^s$ می‌گذاشتیم، الان درجه آزادی داریم روی $\gamma(\cdot)$ که به نحو دلخواه انتخاب اش کنیم.

$\gamma(s)$ روبرو را با فهم عمیقی که از مسئله داریم، پیشنهاد می‌دهیم: (می‌خواهیم $\gamma(s)$ را به گونه ای انتخاب کنیم که $E\{\gamma(s)\}$ کمتر شود ولی از $P(v)$ هم بزرگتر باشد که bound بهتری برای مسئله باشد و کمتر محافظه کار باشیم.): $\gamma_\#(s) = \max[1+s, 0]$

پیشنهاد هوشمندانه

$$P(v) \le E\{ \gamma(\eta^v) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\eta^v)\, dP_z$$

می‌خواهیم نشان دهیم: $\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\#(\eta^v)\, dP_z \le \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\eta^v)\, dP_z$

Subject:
Date

می‌توان نشان داد که $\Psi_*(v)=\Psi_*(\alpha v) : \alpha>0$. همچنین $\gamma(s)=\gamma(\alpha s)$

یک بار برای $\gamma(s)$ می‌رویم $\Psi_*(\alpha v)$ را حساب می‌کنیم و بعد یک بار برای

$\gamma(\alpha s)$، می‌رویم $\Psi_*(v)$ را محاسبه می‌کنیم. از این دو تا نتیجه می‌گیریم:

$$\gamma_{\#}(s) = [1+\alpha s, 0]$$

such that: $\gamma(\cdot) \geq 0$ and non-decreasing.
$\gamma(0) \geq 1$
$\gamma(s) \xrightarrow[s\to-\infty]{} 0$

$$\Psi_{\#}(v) = E\{\gamma_{\#}(\eta^v)\} \xrightarrow{\text{دو تا نتیجه می‌گیریم}} \inf_{\alpha>0} \Psi_{\#}(\alpha v) \leq \inf_{\alpha>0} \Psi(\alpha v)$$

$$\longrightarrow T_\varepsilon \subset T_\varepsilon^{\#}$$

خلاصه تخمین #، بهترین تخمین ممکن است، در فرست گفته شده.

اثبات شهودی دوم: تعریف T_ε، $T_\varepsilon^{\#}$ را بنویسیم:

$$T_\varepsilon = \{v : \inf_{\alpha>0} \Psi(\alpha v) \leq \varepsilon\}$$ از آنجایی که نشان دادیم

$$T_\varepsilon^{\#} = \{v : \inf_{\alpha>0} \Psi_{\#}(\alpha v) \leq \varepsilon\}$$ $\Psi_{\#}(\cdot) < \Psi(\cdot)$، پس هر v که در T_ε

باشد، حتماً در $T_\varepsilon^{\#}$ هم هست که در آن صورت $T_\varepsilon \in T_\varepsilon^{\#}$ می‌شود.

بیشتر این منطق که اگر $S_1 \subseteq S_2$ باشد، $\min_{S_2} f \leq \min_{S_1} f$

PAPCO

95 = 5x19 dual

Subject:
Date

▲ : فرض کنید η یک پارامتر تصادفی با توزیع معین و $\epsilon \in (0,1)$.

Conditional Value at Risk: $CVaR_\epsilon(\eta)$

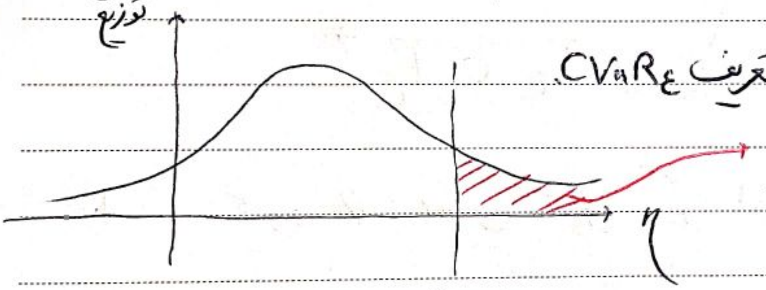
$$CVaR_\epsilon(\eta) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \left\{ a + \frac{1}{\epsilon} E\left[\max \{\eta - a, 0\} \right] \right\}$$

$$\equiv \text{Prob}\{\eta > CVaR_\epsilon(\eta)\} \leq \epsilon$$

چرا؟

در کارهای مالی خیلی استفاده می‌شود. از اسمش هم معلوم است ریسک مآل دارد.

$CVaR_\epsilon$ برای یک توزیع تعریف می‌شود و تابعی از ϵ است.



طبق تعریف $CVaR_\epsilon$

$\sum_{\text{هاشور}} \leq \epsilon$

چرا؟

به صورت شهودی:

$E[\max\{\eta - a, 0\}]$ می‌شود

0 وقتی $\eta < a$ باشد و مساحت زیر نمودار توزیع وقتی $\eta > a$ باشد.

به صورت ریاضی وار تر:

$E\{\max\{\eta - a, 0\}\}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \max\{\eta - a, 0\} dP_\eta = \int_a^\infty (\eta - a) dP_\eta = \int_a^\infty \eta \, dP_\eta - a \int_a^\infty dP_\eta$$

حال عبارت فوق را $a + \frac{1}{\epsilon}(\cdot)$ می‌گذاریم.

$\text{Prob}(v > a) = P_a(v) \Leftarrow = P_a(v)$

dual $2^5 \times 3 = 96$

Subject:
Date

$$= a + \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{\infty} \eta \, dP_\eta - \frac{a}{\varepsilon}\int_a^{\infty} dP_\eta = a\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}P_a(v)\right) + \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{\infty}\eta \, dP_\eta$$

گویا انتگرال گرفتن هم خیلی کمک نکرد. قرار شد تا مطلبی بعد روش فکر شود. بیان کنیم.

تعریف $CVaR_\varepsilon$ را گفتیم. حالت می‌خواهیم مسئلهٔ C.C. را با ادبیات CVaR

$\eta^v = v_0 + \sum z_\ell v_\ell$ تخمین امن برای مسئلهٔ C.C. است.

$$P(v) = \text{Prob}\{\eta^v > 0\} \leqslant \varepsilon \longleftrightarrow CVaR_\varepsilon(\eta^v) \leqslant 0$$

تخمین امن $\leqslant 0$ $\inf\limits_{a \in \mathbb{R}} \left\{ a + \frac{1}{\varepsilon} E\left\{\max\{\eta^v - a, 0\}\right\}\right\}$ یعنی

• قضیه: $T_\varepsilon^{\#} = \{v : CVaR_\varepsilon(\eta^v) \leqslant 0\}$ یعنی تخمین امن حاصل از CVaR

با تخمین امن حاصل از $\gamma_\#$ یکی می‌شود. قبلاً برای هر γ یک R.C. حساب کرده بودیم و درنتیجه R.C. معادل $\gamma_\#$ هم داریم.

□ اثبات: $T_\varepsilon^{0,\#} = \left\{ v : \exists \alpha > 0 : E\underbrace{\left\{\max\left\{1 + \eta^{\alpha v}, 0\right\}\right\}}_{\gamma_\#(\eta^{\alpha v})} \leqslant \varepsilon \right\}$

$= \left\{ v : \exists \alpha > 0 : E\left\{\max\left\{1 + \underset{\alpha^{-1}}{\alpha}\,\eta^v, 0\right\}\right\} \leqslant \varepsilon \right\}$ چون $\eta^{\alpha v} = \alpha \eta^v$ بدون از دست رفتن

کلیت، α به α^{-1} می‌گذاریم زیرا هر دو مثبت هستند و در حدی αها را گرفتیم.

Subject:
Date

بعد α^{-1} را از max مرکشیم بیرون، مرشود، $E\{\alpha^{-1}\max\{\alpha+\eta^v,0\}\}$

بعد جای α^{-1} بیت و ε را عوض مرکنیم: $\frac{1}{\varepsilon}E\{\max\{\alpha+\eta^v,0\}\}\le\alpha$

بعد گویا $a=-\alpha$ مرگیریم که مرشود:

گویا معادل است با inf

$$=\left\{v:\ \exists a<0:\ \frac{1}{\varepsilon}E\{\max\{\eta^v-a,0\}\}+a\le 0\right\}$$

همان تعریف شبه CVaR است، در نتیجه اثبات شد است.

چون اینجا $a<0$ است ولی در CVaR کل $\mathbb{R}$

چون C، closed, convex است. $T_\varepsilon^{0,\#}\subseteq C$

نصف اول اثبات شد. $T_\varepsilon^{\#}\subseteq C$

چرا نصف اول؟ چون در رابطه بالا $a<0$ است ولی در CVaR، $a\in\mathbb{R}$ است.

کافی است ثابت کنیم $C\subseteq T_\varepsilon^{\#}$ و نتیجه بگیریم $T_\varepsilon^{\#}=C$ است.

نشان دهیم $v\in T_\varepsilon^{\#} \Leftarrow \forall v\in C$

اثبات: $f(a)=a+\frac{1}{\varepsilon}E\{\max\{\eta^v-a,0\}\}$

Convex and $f(a)\to\infty$ as $|a|\to\infty$ and minimum at a_*

if $v\in C \to f(a_*)\le 0$

$a_*\le 0$ است زیرا $E\{\cdot\}$ حتما مثبت است و برای این که $f(a_*)\le 0$ شود، باید $a_*\le 0$ باشد

~~a_* $v\in T_\varepsilon^{\#}$~~

dual $2\times 7^2=98$

Subject:
Date

$a_* \le 0 \to$
- $\xrightarrow{\text{i}} a_* < 0 \to v \in T_\varepsilon^{0,\#}$
- $\xrightarrow{\text{ii}} a_* = 0 \to \frac{1}{\varepsilon} E\{\underbrace{\max\{\eta^v, 0\}}_{\ge 0}\} \le 0$

$\Rightarrow \mathrm{Prob}\{\eta^v \le 0\} = 1$ پس باید صفر شود

$v^{\in C} = [v_0; \dots; v_L]$ ، $v' \triangleq [v_0 - \delta; v_1; \dots; v_L]$ $\delta > 0$

$\to \mathrm{Prob}\{\eta^{v'} < -\delta\} = 1 \to \frac{1}{\varepsilon} E\{\max[\alpha + \eta^{v'}, 0]\} = 0 \ \forall \alpha$

ما بجای δ، α گذاشتیم و باید $0<\alpha<\delta$ باشد

مثل دفعه قبل، α را به سمت دیگر و

$v' \in T_\varepsilon^{0,\#} \xrightarrow{\delta \to 0} v \in T_\varepsilon^{\#}$ $\Leftarrow$ بگیریم $a = -\alpha$

$\to C \in T_\varepsilon^{\#}$ قبل‌تر هم که گفتیم $T_\varepsilon^{\#} \in C$ است.

از این دو تا نتیجه می‌شود $C = T_\varepsilon^{\#}$. پس تخمین $\#$ معادل تخمین CVaR است.

خواهیم دید که با وجود این که $\#$، معادلاً CVaR بهترین هستند، ولی از آنجا که خیلی وقت‌ها از نظر محاسباتی قابل پیگیری نیست، خیلی این بهترین بودن کمکی نمی‌کند. فقط در حالات خاص مسئله معادل قابل حل است.

سعی می‌کنیم حالتی بینابین بگوییم که هم tractable از نظر محاسباتی باشد و هم نزدیک به بهینه باشد.

PAPCO

(99) $= 3^2 \times 11$ dual

Subject:
Date

جلسه شانزدهم   دوشنبه ۱۴۰۳/۰۲/۱۰   2024 - 04 - 29

بهترین γ : $\gamma(s) = \max(1+s, 0)$ $E\{\gamma(v^T z)\} \leq \Psi(z)$

که Ψ مشابه طرح می‌شود $\Psi_{\#}(v) \xrightarrow{RC} \mathrm{CVaR}_{\varepsilon}$. $\gamma(s) = e^s$

سؤال: حالا که بهترین را داریم، چه نیازی به تخمین برنشتاین داریم که از این بدتر است؟

جواب: ممکن است محاسبات برنشتاین ساده‌تر و احتمالاً شدنی باشد. محاسبه $\Psi_{\#}$ لزوماً به راحتی به جواب نمی‌رسد. Computationally Tractable خیلی مهم است در عمل.

در شرایط خاص خوب می‌شود.

مثال: $z \in \mathbb{R}^L$ متغیر گسسته ~~که کدام از~~ مقادیر $[z_1;\dots;z_L]$ ، $z^1, \dots, z^N$ را با احتمال $\pi^1, \dots, \pi^N$ بگیرد.

$P(z = z^k) = \pi^k$

به سازگر کوچک

هدف محاسبه Ψ ، u است.

$$\Psi_{\#}(v) = \sup_u \left\{ v^T(Bu+b) - \Psi(u) \right\}$$

$E\{.\}$ را باز می‌کنیم.

$$\Psi_{\#}(v) = E\left\{ \max\left[1 + v_0 + \sum_{l=1}^{L} v_l z_l, 0\right] \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \pi_i \max\left[1 + v_0 + [v_1;\dots;v_L]^T z_i, 0\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \max_{0 \leq u_i \leq \pi^i} \left\{ u_i \underbrace{\left(1 + v_0 + [v_1;\dots;v_L]^T z^i\right)}_{a} \right\}$$

هدف رسیدن به فرم زیر است:
$v^T(Bu+b) - \Psi(u)$

اگر $a > 0$ باشد، $u_i \to \pi^i$. اگر $a < 0$ باشد، $u_i \to 0$ که عبارت معادل خط بالای آن می‌شود.

P4PCO

dual $2^2 \times 5^2 = 100$

$$= \max_{0 \le u_i \le \pi^i} \left\{ [v_0;\dots;v_L]^T \Big[\underbrace{\textstyle\sum u_i}_{\text{در } v_0 \text{ ضرب میشود}} ; \underbrace{\textstyle\sum u_i z^i}_{\text{در } v_1 \dots v_L \text{ ضرب میشود}}\Big] - \big(\underbrace{-\textstyle\sum u_i}_{\text{از 1 آمد}}\big) \right\}$$

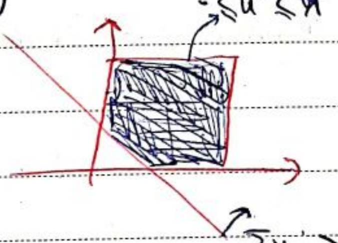
به فرم مورد نظر درآمد:

$$Bu+b = \left[\sum u_i ; \sum u_i z^i\right], \quad \Psi(u) = -\sum u_i$$

$$T_\varepsilon^\# = cl\left\{v : \left(v^T(Bu+b) \le 0, \; \forall u \in U_\varepsilon\right\}\right.$$

$$U_\varepsilon = \left\{u : 0 \le u_i \le \pi^i, \; \sum u_i \ge \varepsilon\right\}$$

از: $\Psi \le -\varepsilon$



حال که $\Psi_\#$ حساب شد، دیگر محاسبه RC این مانند قبل است. و تمام شد.

(I) $\text{Prob}\{v_0 + \sum v_\ell z_\ell > 0\} \le \varepsilon \xrightarrow{\text{تعمیم دهیم}}$ (II) $\text{Prob}\{v_0 + \sum v_\ell z_\ell \notin -K\} \le \varepsilon$

given convex cone closed

حالت خاصی عبارت دومی، $K = \mathbb{R}_+$ بگذاریم میشود عبارت اول (I).

برای γ یک سری خواص داشتیم: $\gamma \ge 0$, $\gamma(0) \ge 1$, $\gamma(-\infty) = 0$, γ غیرنزولی در $\mathbb{R}^+$ و محدب

الان دنبال γ محدب هستیم که در K، monotone باشد، یعنی:

گویا شرط monotone $\quad \gamma(y+h) \ge \gamma(y) \quad \forall h \in K, \forall y$

بودن معادل غیر نزولی بودن در $\mathbb{R}^+$ است: $\gamma(y+\varepsilon) \ge \gamma(y), \; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$

باقی شرط ها هم میشود: $\gamma(y) \ge 0, \quad \gamma(y) \ge 1, \forall y \notin -K$

به یک جهت است

$$\exists e : \gamma(y+te) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$$

Subject:
Date

مثال γ ای که این خواص را داشته باشد: $\gamma(y) = 1 + dist\,(y, -k)$

چون $-k = \mathbb{R}^-$ میشود و یادآوری: $dist(y, M) = \inf_{v \in M} \|y - v\|$

$\text{if } k = \mathbb{R}^+ \text{ then } \gamma(y) = 1 + \max\{0, y\}$ میشود $\max\{0,y\} = dist(y, \mathbb{R}^-)$

شبیه # γ شد ولی عین آن نشد. اصلاً $\gamma(y)$ معرفی شده، شروط مورد نیاز γ را

دارد؟ خیر. چون $\gamma(-\infty) \to 0$ میشود. تغییرش دهیم:

$\gamma(y) = dist\,(1 + y, -k)$ $\quad$ $for\ k = \mathbb{R}^+ \to \gamma(y) = \max\{0, y+1\}$

اگر همه شرایط را چک کنیم، میبینیم شرایط را دارد، پس γ خوب است.

برای $\gamma(y+h) \geq \gamma(y)$ باید حالت بندی کنیم که $1+y \in -k$ و $1+y \notin -k$

برای حالت $1+y \notin -k$ با برهان خلف نشان میدهیم $1+y+h \notin -k$.

فرض: $h \in k\ ,\ 1+y \notin -k$

حکم: $1+y+h \notin -k$

$1+y \notin -k \to +1+y \in k$

$-1-y-h \in k$

فرض خلف: $1+y+h \in -k$

$\left.\begin{array}{l} -h \in k \\ h \in k \text{ فرض} \end{array}\right\} \to h = 0$

اثبات شد.

$\left.\begin{array}{l} 1+y \in -k \text{ ؛ فرض خلف میشود} \\ 1+y \notin -k \text{ فرض} \end{array}\right\} \to \times$

PAPCO

triple $2 \times 3 \times 17 = 102$

Subject:
Date

$1+y \in -k \rightarrow dist(1+y, -k) = 0 \leq$ عبارت دو است

$dist(h, -k) > 0 \xrightarrow{\text{نامساوی مثلث}}$, $dist(1+y, -k) \leq disk(1+y+h, -k)$

پس δ ارائه شده شرایط را دارد. شرط‌ها هم به جای صفر $\leq$ هرچقدر $\notin -k$ باشد

که شروط مثل Conic می‌شوند. $\Psi(v) = \sup_u \{v^T(Bu+b) - \Psi(u)\}$

$\rightarrow Prob\{v_0 + \sum v_\ell z_\ell \notin -k\} \leq \inf_{\alpha>0} \Psi(\alpha v) \leq \varepsilon$

$T_\varepsilon = \{v : v^T(Bu+b) \notin -k, \forall u \in U_\varepsilon\}$

$U_\varepsilon = \{u : \Psi(u) \leq -\varepsilon\}$ یادم هست احتمالاً تا آخر فصل چهار، 26 ام است.

جلسه هفدهم دوشنبه ۱۷، ۰۲، ۱۴۰۳ 2024-05-06

تخمین برنشتاین $P(v) = Prob\{v_0 + \sum v_\ell z_\ell > 0\} \leq E\{exp\{z^T v\}\}$

z_i ها مستقل

و کران بالا محدب. حالت بهینه‌تر $\delta_\#$ بود ولی محاسباتش قابل پیش نبود.

الان دنبال روش و تخمینی هستیم که از تخمین $\delta_\#(s) = \max\{1+s, 0\}$

برنشتاین دقیق‌تر و بهتر باشد ولی محاسباتش از $\delta_\#$ ساده‌تر باشد. یعنی

Computationally Tractable باشد.

Subject:
Date

$\Psi_\ell(s) = E\{\exp\{s z_\ell\}\} \to$ Computationally tractable مستقل $z_1, \dots, z_L$ فرض کنید

$$\gamma(s) = \sum_{v=0}^{d} c_v \exp\{w_v s\}$$ → شروط ۸ قبلی که گفتیم را دارد

$$\Psi(v) = E\{\gamma(v_0 + \sum v_\ell z_\ell)\} = \sum_{v=0}^{d} c_v \exp\{w_v v_0\} \prod_{\ell=1}^{L} \Psi_\ell(w_v)$$

$$P(v) \leqslant E\{\gamma(v_0 + \sum z_\ell v_\ell)\} = \Psi(v)$$ این فرم، tractable است چون خودمان فرض کردیم

در نتیجه: $\inf_{\alpha>0} \Psi(\alpha v) \leqslant \epsilon \to$ Safe Approximation. است tractable که Ψ_ℓ است.

حال در مورد پیدا کردن ضرایب c_v می‌خواهیم صحبت کنیم.

$T > 0$ (پنجره تقریب) , $d > 0$ (درجه تقریب)

conjugate

$$X_{c_*} = \sum_{v=0}^{d} \left[c_{*v} \exp\left(\frac{i\pi v s}{T}\right) + \overline{c_{*v}} \exp\left(-\frac{i\pi v s}{T}\right) \right]$$

گویا در فرمول $\gamma(s)$ که جمع $\sum$ بود، شده real part آن و همچنین گویا فرض کرده‌ام که exp ها یک سری تابع با تناوب‌های فرکانس‌های $w_v = \frac{i\pi v}{T}$ هستند، $d+1$ تا فرکانس $\frac{i\pi \times 0}{T}, \frac{i\pi \times 1}{T}, \dots, \frac{i\pi \times d}{T}$.

همان γ است.

برای انتخاب c_v:
$$\{c_v\} \in \underset{c \in C^{d+1}}{\arg\min} \left\{ \max_{-T \leqslant s \leqslant T} \left| \exp(s) X_c(s) - \max[1+s, 0] \right| \right\}$$ → min-max مسئله است.

یعنی $[c_0; \dots; c_d]$

Subject:
Date

$\gamma_{d,T}(s) = \exp(s)\, X_{c^*}(s)$ ← از بهینه سازی به دست می آید

به عبارتی می گوید به ازای چه فاصله ای بین $[c_0, \ldots, c_d]$ ، $\max$

دو تابع $\min$ می شود. گویا دارد فاصله را تا $\gamma_\#$ که بهینه بود کمینه می کند و در $\max$

عین حال tractable هم هست. واقع است که تخمین برنشتاین حالت خاصی

از این روش است پس این روش بهتر از تخمین برنشتاین خواهد بود.

احتمالاً با $d\uparrow$, $T\downarrow$ ، به سمت $\gamma_\#$ می رود این تخمین.

البته حل بهینه سازی پایین صفحه 104 ساده نیست. There is no free lunch.

دو تا مثال در کتاب هست، مثال های خوبی است. 4.3.6.1, 4.3.6.2

آخرین مبحث فصل چهار را می خواهیم بررسی کنیم که گویا اشکالاتی هم کرده اند.

$\mathrm{Prob}\{v_0 + \sum v_\ell z_\ell > 0\} \leq \varepsilon \leftarrow \{z_\ell\}_{\ell=1}^{L}$

ممکن است پیدا شود که $\{y_\ell\}_{\ell=1}^{L}$ $\underbrace{\mathrm{Prob}\{v_0 + \sum v_\ell z_\ell > 0\}}_{p(v)} \leq \underbrace{\mathrm{Prob}\{v_0 + \sum v_\ell y_\ell > 0\}}_{q(v)}$

و بعد به جای محاسبه ی $p(v) \leq \varepsilon$ ، مسئله ی $q(v) \leq \varepsilon$ را حل می کنیم.

کاربرد: تبدیل کردن یک سؤال با توزیع عجیب و غریب، به مسئله با توزیع خوب که قبلاً حل کرده ام.

PAPCO

 $= 3 \times 5 \times 7$ triple

Subject:
Date

توزیع هایی که نسبت به صفر متقارن ، unimodal (با مد = ۰)
، non-decreasing in $\mathbb{R}^-$ & non-increasing in $\mathbb{R}^+$, $P(0) \geq 0$

▲ تعریف: توزیع P را more diffused نسبت به q می‌گویند، اگر:

$$P(a) = \int_a^\infty p(s)\,ds \leq Q(a) = \int_a^\infty q(s)\,ds$$

نمایش: $P \leq q$

رده هم

این تعریف، ترتیب می‌سازد:

$$\left.\begin{array}{l} q \geq r \\ r \geq p \end{array}\right\} \longrightarrow q \geq p$$

p is more diffused than q

جهت بیشتر داره

دامنه‌تر با جهت‌های بسیار قوی

فکر مرکز در بین unimodal ها،

less diffused ترین تابع، توزیع uniform است.

● قضیه: فرض کنید Θ (تابع توزیع و چگالی ν ، q)، π (تابع توزیع و چگالی μ ، p) توزیع های داده شده باشند و M_b خانواده تمام توابع زوج s، پیوسته، مشتق دار، کران دار، و non decreasing در $\mathbb{R}_+$ باشند.

$$\Theta \underset{m}{\geq} \pi \longleftrightarrow \int f(s)\,d\nu(s) \geq \int f(s)\,d\mu(s)$$

$$\longleftrightarrow \int f(s) q(s)\,ds \geq \int f(s) p(s)\,ds \qquad \forall f \in M_b$$

$$\longleftrightarrow E_\Theta\{f\} \geq E_\pi\{f\}$$

اثبات: برای علاقه‌مندان.

PAPCO

Subject:
Date

symmetric & unimodal

مثال: $y : [-1, 1]$ ، $z : [-1, 1]$ یکنواخت ، $V : N(0, \frac{2}{\pi})$

نشان دهید: $y \leq_m z \leq_m V$

ابتدا $y \leq_m z$ را نشان می‌دهیم: باید نشان دهیم:

$$P(t) = \int_{t^+}^{\infty} p(s)\, ds \leq Q(t) = \int_{t^+}^{\infty} q(s)\, ds$$

p تناظر با y ، q تناظر با z

چون y، symmetric ,unimodal است: $P(0) \leq \frac{1}{2}$

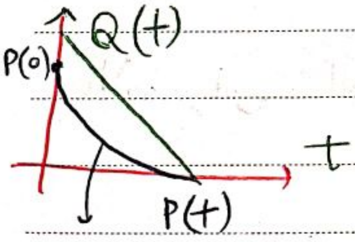
فقط مساوی نیست چون ممکن است در $t=0$ جرم داشته باشد.

چون $y : [-1,1]$ است $P(t \geq 1) = P(1) = 0$

$$Q(t) = \max\left[\frac{1-t}{2}, 0\right], \quad t \geq 0$$

از روی شکل می‌توان گفت که چون P، Convex است.

Convex است.



Convex تابع

چون همیشه $P(t) \leq Q(t)$ برقرار است: $y \leq_m z$

این قسمت ثابت شد. حال $z \leq_m V$ را بررسی می‌کنیم.

می‌خواهیم نشان دهیم: $R(t) = \int_{t}^{\infty} r(s)\, ds \geq Q(t)$

r تناظر با V

چون R، Convex است، $R'(t) = 0 - R(0)$

داریم، $R(t) \geq R(0) + tR'(0)$

برای $N(0, \frac{2}{\pi})$ محاسبه می‌کنیم

$R(0) = \frac{1}{2}$, $R'(0) = -\frac{1}{2}$

Subject:
Date

$\Rightarrow R(t) \geq \frac{1}{2} - \frac{t}{2} = Q(t) \Rightarrow R(t) \geq Q(t) \Rightarrow v \geq_m z$ □

• قضیه: ① y, z دو متغیر تصادفی باشند و λ عدد حقیقی،

$$y \geq_m z \longrightarrow \lambda y \geq_m \lambda z$$

② اگر $y_1 \geq_m z_1$, $y_2 \geq_m z_2 \Longrightarrow y_1 + y_2 \geq z_1 + z_2$

• قضیه: فرض کنید $v_0 \geq 0$ و v_L ، ... ، v_1 مقادیر معلوم باشند.

$\{z_\ell\}_{\ell=1}^{L}$ unimodal و متقارن نسبت به صفر و مستقل، و همچنین $\{y_\ell\}_{\ell=1}^{L}$ به طوری

که $y_\ell \geq_m z_\ell$ در این صورت:

$$\text{Prob}\{v_0 + \sum v_\ell z_\ell > 0\} \leq \text{Prob}\{v_0 + \sum v_\ell y_\ell > 0\}$$

علاوه بر این، اگر $y_\ell \sim N(0, \sigma_\ell^2)$ که گاه برای هر $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$

$$v_0 + \text{ErfInv}(\varepsilon)\sqrt{\sum \sigma_\ell^2 v_\ell^2} \leq 0$$

تخمین امنی برای $\text{Prob}\{v_0 + \sum z_\ell v_\ell > 0\} \leq \varepsilon$ خواهد بود.

$$\text{ErfInv}(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) dr$$

اثبات به سادگی با کمک دو قسمت قضیه قبلی.

dual $2^2 \times 3^3 = 108$

Subject:
Date

قضیه: $\{y_\ell\}_{\ell=1}^{L}$ ، $\{z_\ell\}_{\ell=1}^{L}$ با شروط قضیه قبل. آنگاه برای هر مجموعه

$\text{Prob}\{[z_1,\dots,z_L]\in S\} \leq \text{Prob}\{[y_1,\dots,y_L]\in S\}$: $S\subseteq \mathbb{R}^L$

گویا این تعریف را تعمیم داده است. بخش 4.5 اغتشاشات غیرمستقل را بررسی می‌کند ولی به دلیل ضیق وقت، این قسمت را می‌پریم و از جلسه بعد وارد Conic optimization می‌شویم.

جلسه هجدهم شنبه ۱۴۰۳/۰۲/۲۲ 2024-05-11

پایان‌ترم چهارشنبه هفته بعد، تا آخر فصل ۴.

- Conic Optimization (CO): مرز هم جزو مجموعه است.

$\min\{c^T x + d \mid A_i x - b_i \in K,\ 1\leq i\leq m\}$ K: closed convex cone با حداقل یک نقطه داخلی دارد. (همراه مرز نیست)

برای ما مهم‌تر است.

مثلاً خط، closed convex cone است ولی همه‌اش مرز است. سه تا حالت خاص K

K is

(1) non-negative Orthant $\mathbb{R}^m_+$ در فضای $\mathbb{R}^m$ همه درایه‌ها مثبت باشند.

در حالت (1) مسئله تبدیل به linear optimization می‌شود.

$$\min\{c^T x + d \mid Ax - b \geq 0\} = \min\{c^T x + d : a_i^T x - b_i \geq 0\}$$

Subject:
Date

(2) k is direct product of Lorentz

گویا معادل یک Conic Quadratic Optimization می‌شود.

$$L^k = \left\{ x \in \mathbb{R}^k : x_k \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2} \right\}$$

This is a cone. Proof is on the reader!

$$\min \left\{ c^T x + d \mid \|A_i x - b_i\|_2 \leq c_i^T x - d_i \ , \ 1 \leq i \leq m \right\}$$

فرم استاندارد مسئله Quadratic Conic که می‌خواهیم به صورت L^k ها بیان کنیم. چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟ کافی است عبارت سمت راست را شکل درایه آخر ببینیم و باز نویسی کنیم.

شرط i ام می‌شود:

$$[A_i x \ ; \ c_i^T x] - [b_i \ ; \ d_i] \in L_i$$:شرط شکل Conic

اگر m تا را با هم بنویسیم، شرط معادلش می‌شود:

$$\left[[A_1 x \ ; \ c_1^T x] ; [A_2 x \ ; \ c_2^T x] ; \dots [A_m x ; \ c_m^T x] \right]$$

$$- \left[[b_1 \ ; \ d_1] ; \dots ; [b_m \ ; \ d_m] \right] \in L_1 \times L_2 \times \dots \times L_m$$

نتیجه می‌شود که Quadratic Program هم حالت خاصی از Conic است.

اثبات L^k Conic است: حکم:

فرض: $y_k^2 \geq \sum_{i=1}^{k-1} y_i^2$

$$z_k^2 \geq \sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 \qquad (y_k + z_k)^2 \geq \sum_{i=1}^{k-1} (y_i + z_i)^2$$

PAPCO

triple $2 \times 5 \times 11 = (110)$

Subject:
Date

حالی که ضریب به بقیه اثباتش خیلی راحت است. $y_k^2 \geq$ (فرض) $(\alpha y_k)^2 \geq$ (حکم)

در ریاضی دو گویا یک نامساوی داشته ام که برای اثبات این نامساوی کمک می کند

دو طرف نامساوی های فرض را در هم ضرب کنیم. : اثبات

$$y_k^2 \ z_k^2 \geq \left(\sum y_i^2\right)\left(\sum z_i^2\right) \overset{\text{کوشی}}{\geq} \left(\sum y_i z_i\right)^2$$

$$\Rightarrow y_k z_k \geq \sum y_i z_i \longrightarrow 2 y_k z_k \geq 2 \sum y_i z_i \quad *$$

حال اگر دو نامساوی فرض را با $*$ ضرب کنیم به حکم می رسیم. $\square$

③ k is S_+^k : S_+^k ماتریس های $k\times k$ متقارن مثبت معین

$$\min\left\{ C^T x + d \;\middle|\; A_i x - B_i \geq 0 \right\}_{1\leq i\leq m}, \quad A_i x - B_i = \sum_{j=1}^{n} x_j A^{ij} - B_i$$

P.S.D. بودن ماتریس

ماتریس های متقارن

به چنین نامساوی ای LMI گویند Linear Matrix Inequality

برای نامساوی i ام : $\left(x_1 A^{1i} + x_2 A^{2i} + \dots + x_n A^{ni}\right) - B_i \underbrace{\geq 0}_{\text{معادلات یا}} \in S_+^k$

پس می توان مسائل LMI را نیز به فرم Optimization Conic تبدیل کرد.

نام دیگر این مدل مسئله SDO می باشد. Semi-definite Optimization

PAPCO

(111) = 3 × 37 dual

$$\min\{c^T x + d \,;\, A_i x - b_i \in Q_i ,\ 1 \le i \le m\},\quad Q_i \subseteq \mathbb{R}^{k_i}$$

$$Q_i = \{u \in \mathbb{R}^{k_i} \mid Q_{i\ell} u - q_{i\ell} \in K_{i\ell} \,;\ 1 \le \ell \le L_i\}$$

که در آن $K_{i\ell}$ یک cone است.

عبارت بالا تعمیم مسئله اصلی Conic Optimization است. در مسئله اصلی $A_i x - b_i$ باید درون یک cone قرار میگرفت. اینجا، $A_i x - b_i$ باید داخل اشتراک چند cone یعنی Q_i بیفتد.

میتوان نشان داد که عبارت تعمیم را میتوان با تبدیل خطی ساده به فرم استاندارد تبدیل کرد.

اگر شرط را ترکیب کنیم، داریم: $1 \le i \le m ,\ 1 \le \ell \le L_i$

$$\min\{c^T x + d \mid Q_{i\ell} A_i x - (Q_{i\ell} b_i + q_{i\ell}) \in K_{i\ell}\}$$

حال میخواهیم عدم قطعیت وارد کنیم که عدم قطعیت فقط را درنظر میگیریم.

- Uncertain Conic Optimization:

$$\min\{c^T x + d \mid A_i x - b_i \in Q_i ,\ 1 \le i \le m\}$$

$$\left[c, d, \{A_i, b_i\}_{i=1}^{m}\right] = \left[c^0, d^0, \{A_i^0, b_i^0\}_{i=1}^{m}\right] + \dots$$

Subject:
Date

$\dots \sum z_\ell \left[c^\ell d^\ell , \{ A_i^\ell , b_i^\ell \} \right] \quad z \in Z \subseteq \mathbb{R}^L$

بسته و محدب ها

x: Robust feasible

RC یعنی مسئله‌ای که به ازای همه‌ی مقادیر ممکن z، شرط برقرار باشد

• Robust Counterpart:

$$\min_{x,t} \left\{ t : \begin{array}{ll} c^T x + d - t \in Q_0 = \mathbb{R}_- & \forall z \in Z \\ A_i x - b_i \in Q_i & 1 \le i \le m , \end{array} \right\}$$

$$(c^0 + \sum c^\ell z_\ell)^T x + (d^0 + \sum d^\ell z) - t \in \mathbb{R}_-$$

Q_i و چند نیم صفر باشد

مسئله‌ی فوق فقط در حالتی که تقاطع چند وجهی باشد قابل حل است از نظر محاسباتی.
Computationally Tractable

در حالت کلی دل شرط ساده‌ای نمی‌شود.

مثلاً مسئله‌ی روبرو NP-hard می‌شود $\min_z \{ z^T B z : \|z\|_\infty \le 1 \}$

$B \succcurlyeq 0$ known

در بعضی حالات خاص می‌توان مسئله را به یک مسئله‌ی Tractable تبدیل کرد. در غیر این صورت، باید تخمین بزنیم.

برای این که نشان دهیم یک مسئله NP-hard است مسئله را نشان و دهیم که معادل است با یک مسئله‌ی known NP-hard. گویا همه‌ی NP-hardها با هم معادل اند. اولین مسئله را چگونه ثابت کرده اند که NP-hard بوده است؟ نمی‌دانستم.

113 prime

Subject:
Date

$A(z)x + b(z) \in Q$ $\boxed{*}$ $\forall z \in Z$ در واقع رابطه با نایقینی

را باز کردیم تا z ها ظاهر شوند به صورت صریح که به صورت affine ظاهر می‌شود.

$A_i x - b_i \in Q_i \Rightarrow (A_i^0 + \sum z_\ell A_i^\ell)x - (b_i^0 + \sum z_\ell b_i^\ell) \in Q_i$

$\alpha(x) z + \beta(x) \in Q_i$ که α, β affine in x هستند.
affine in z A, b

که تعمیم این است هرگاه $\boxed{*}$ $\exists u: (x,u)$ satisfies $S \rightarrow x$ satisfies

سؤال: تعمیم این خوب چیست؟ یعنی سؤال محافظه کاری را می‌خواهیم پیدا کنیم.

Z_ρ را به صورت $Z_\rho = \rho Z$, $0 < \rho < \infty$ $\quad 0 \in Z$

معادل مقدار نامی‌ها
پارامترهایی که متعلق است
Z در $z=0$ باشد.

رو به رو تعریف می‌کنیم و از روی آن RC_ρ را تعریف می‌کنیم:

$A(z)x + b(z) \in Q, \ \forall z \in Z_\rho$

X_ρ is real feasible set RC_ρ. If $\rho \uparrow$ we expect $X_\rho \downarrow$ کوچک شود

زیرا نایقینی‌ها را داریم بیشتر می‌کنیم.

تعریف: محافظه کاری یک تعمیم از $\nu \geq 1$ تجاوز نمی‌کند اگر در این صورت به

$X_{\nu\rho} \subseteq \hat{X}_\rho \subseteq X_\rho \quad \forall \rho > 0$ ν ضریب محافظه کاری tightness factor می‌گویند.

feasible set تعمیم این

triple $2 \times 3 \times 19 = 114$

PAPCO

Subject:
Date

هر چه ضریب محافظه‌کاری به 1 نزدیک‌تر باشد، یعنی تخمین $\hat{X}_p$ دقیق‌تر است.

تعاریف اولیه‌ی Conic گفته شد. جلسه‌ی بعد حالات خاص که محاسبات Tractable دارند را بررسی می‌کنیم و سپس سراغ تخمین زدن می‌رویم.

تابع هدف خیلی مهم نیست چون با تکنیک t، می‌توانیم تبدیل به قید اش کنیم می‌گیریم.

قید ها هم یک قید را تبدیل می‌کنیم و بعد همه را به همان روش تبدیل می‌کنیم، اشتراک

جلسه نوزدهم دوشنبه ۱۴۰۳/۰۲/۲۴ 2024_05_13

بررسی چند حالت عدم قطعیت برای مسئله‌ی Conic Optimization به RC آن $z \in Z$

(I) $Z = \underset{\text{hull}}{\text{Conv}}\{z^{(1)}, \dots, z^{(N)}\}$ پوش محدب مسئله‌ای Tractable می‌شود.

$$Z = \left\{ z = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i z^{(i)}, \ \alpha_i \geq 0, \ \sum \alpha_i = 1 \right\}$$

مسئله مورد بررسی: $\min\{c^T x + d \mid A_i x - b_i \in Q_i\}$

$$\equiv \min\{t : c^T x + d - t \in \mathbb{R}_-, \ A_i x - b_i \in Q_i\} \quad 1 \leq i \leq m$$

گویا به ازای N تا نقطه، قیود را می‌نویسیم:

$$RC: \min\{t : (c^0 + \sum_\ell z_\ell^{(j)} c^\ell)^T x + (d^0 + \sum_\ell z_\ell^{(j)} d^\ell) - t \in \mathbb{R}_-,$$

$$(A_i^0 + \sum_\ell z_\ell^{(j)} A_i^\ell) x - (b_i^0 + \sum_\ell z_\ell^{(j)} b_i^\ell) \in Q_i \quad 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq N$$

PAPCO

115 = 5 x 23 dual