Subject:
Date

با شکل قبل، می‌توانیم شروط ① و ④ را ترکیب کنیم و t_1 ، t_2 را حذف کنیم که می‌شود:

$$\sum_{l=1}^{L} |v_l| + \underbrace{\gamma |w_l|}_{\text{در واقع}} \le b_0 - (a^0)^T x \qquad l = 1, \dots, L$$

به جای $\max_l$ می‌گوییم به ازای همه‌ی lها ⟶ $\gamma \max_l |w_l|$ است (معادل هم ۱۱.۱۱
یعنی رفتشکی
باید شرط برقرار باشد. فصل یک کتاب تمام شد.

منابع در elearn قرار داده می‌شود. حتماً Convex را مطالعه کنید.

جلسه هفتم دوشنبه دوشنبه ۱۴۰۲/۱۲/۱۴ 2024-03-04

مسئله‌ی استاندارد بهینه‌سازی با عدم قطعیت را به مسئله‌ای به فرم استاندارد بدون قطعیت تبدیل کردیم تا اینجا. تا اینجا نگاه‌مان به عدم قطعیت، عدم قطعیت کران‌دار بود.

در مدل دیگر عدم قطعیت به صورت تصادفی Stochastic است. Bounded Uncertainty

در وقتی معنا دارد که تکرار داشته باشیم. در عمل خیلی از مسائل تکرار ندارند. مثلاً وقتی داریم یک متغیری را در آینده پیش‌بینی می‌کنیم، چون تکرار ندارد و فقط یکبار رخ می‌دهد، خیلی stochastic معنا ندارد. حتی اگر بدانیم پدیده‌ای تصادفی است، اصلاً بدیهی نیست که توزیع آن احتمال چگونه است. [البته گاهی می‌توان به دست آورد با توجه به فیزیک مسئله. مثلاً توزیع نرمال داشته باشیم]

PAPCO

به این دلایل، مدل stochastic سخت است کار کردن با آن. ولی چه خوبی‌هایی دارد؟

مثلاً در bounded، صفر و یکی است. ولی حالت stochastic دیگر صفر و یک نیست و نسبی است.

گاهی مدل bounded خیلی Conservative باشد. همچنین گاهی واقعاً مسئله ماهیت stochastic دارد و اطلاعاتش را داریم. اگر از آن اطلاعات استفاده نکنیم، داده‌ی ارزشمندی را استفاده نکرده‌ایم و به جواب بدتری خواهیم رسید. به این دلایل، مدل stochastic را بررسی می‌کنیم.

به دلایل مشابه فصل قبل، مسئله را به فرم زیر می‌توانیم تبدیل کنیم:

$$\min c^T x \quad s.t. \quad a^T x \leq b, \quad [a;b] = [a^0;b^0] + \sum_{l=1}^{L} z_l [a^l;b^l]$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_L \end{bmatrix}$$

منظور از z = پارامتر رندوم با توزیع معین P.

مثلاً می‌تواند: $P \sim N(0, \Sigma)$

هدف ایده‌آل: $P(a^T x \leq b) = 1$ x: robust feasible

گاهی حالت ایده‌آل محقق نمی‌شود، $P(a^T x \leq b) \geq 1 - \varepsilon$ ← به این مدل Chance Constraint می‌گویند.

مسئله جدید می‌شود:

$$\min c^T x$$
$$s.t.$$
$$P(a^T x \leq b) \geq 1 - \varepsilon$$
$$z \sim P \text{ (known distribution)}$$

$[a;b] = [a^0;b^0] + \dots$ مثل قبل.

$$P(x) = \underset{z\sim P}{\text{Prob}}\left\{ z : \sum_{\ell=1}^{L} z_\ell \left[(a^\ell)^T x - b^\ell\right] > b^0 - (a^0)^T x \right\} \leq \epsilon$$

$\min\ c^T x \quad s.t.\ \ P(x) \leq \epsilon$ — این روش چه مشکلاتی دارد؟

ممکن است محاسبه‌ی $P(x)$ اصلاً مسئله‌ی NP-Hard باشد. حتی اگر قابل محاسبه باشد، ممکن است Convex نباشد. مثلاً اگر z^ℓ ها مستقل باشند و توزیع uniform داشته باشند (که خیلی حالت ساده‌ای است) NP-Hard می‌شود.

مجبوریم تخمین بزنیم. ولی تخمین باید Conservative باشد. تخمین امن Safe Approximation

△ تعریف: فرض کنید مقادیر روبرو را داریم و معلوم است: $\epsilon, P, \left\{[a^\ell ; b^\ell]\right\}_{\ell=0}^{L}$

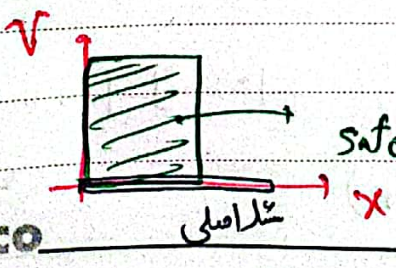
S مجموعه محدودیت محدب با پارامترهای x، پارامترهای کمکی V در نظر بگیریم.

S را تخمین امن محدب برای مسئله‌ی chance-constraints می‌گیریم اگر مولفه x هر زوج (x,V) که برای S، feasible هست برای مسئله اصلی feasible باشد.

اگر S حل پذیر باشد به آن Computationally tractable می‌گویند. (یعنی در زمان چندجمله‌ای حل شود.)

هدف ما پیدا کردن S به صورت Safe Approximation Computationally tractable هستیم

هم باید Convex باشد و هم زیرمجموعه مجموعه اصلی (روی x) و هم قابل محاسبه باشد.



dual $2^4 \times 3 = 48$

Subject:
Date

یک خانواده کلی تر هم از مسائل وجود دارد که الان بررسی می کنیم و احتمالاً بعداً بررسی کنیم.

در این مسائل، Ambiguous Chance Constraints

$z \sim p$ where $p \in P_{(\text{known})}$

مثلاً $p \sim N(\mu, \sigma)$ ، $2 \leq \sigma \leq 5$.

برای این مدل مسائل، هدف این است که $\forall p \in P: P(x) \leq \varepsilon$

مثال: $E\{z_\ell\} = 0$ ، $|z_\ell| \leq 1$ ، z_ℓ ها مستقل هستند **

η: متغیر تصادفی است. $\eta = \sum_{\ell=1}^{L} z_\ell \left((a^\ell)^T x - b^\ell\right) \leq b^0 - (a^0)^T x$

$$E\{\eta\} = 0, \quad STD(\eta) = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{L} \left((a^\ell)^T x - b^\ell\right)^2 E\{z_\ell^2\}}$$

طبق فرض $|z_\ell| \leq 1 \leftarrow |z_\ell|^2 \leq 1 \leftarrow E\{z_\ell^2\} \leq 1$ در نتیجه:

با احتمال زیاد (مثلاً ۹۹٪) می توانیم $STD(\eta) \leq \sqrt{\sum_{\ell=1}^{L} \left((a^\ell)^T x - b^\ell\right)^2}$

بگوییم $-3\,STD \leq \eta \leq 3\,STD$

و فقط کافی است شرط با غیر نایقینی بنویسیم $3\sqrt{\dots} \leq b^0 - (a^0)^T x$ و حل کنیم

می توانیم دقیق تر کار کنیم و احتمالها را هم حساب کنیم و حل انتخاب بهینه.

Subject:
Date

شرط $\Omega\ \text{STD} \leq b^0 - (a^0)^T x$ می‌نویسیم و به ازای Ω می‌توانیم احتمال وقوع شرط $\eta \leq b^0 - (a^0)^T x$ را حل کنیم. از حالت نامقینی به حالت قطعی تبدیل شده است.

شرط این هم محدب شد (چون quadratic شد). مسئله الان معادل رابطه‌ی با ۴

• لم: فرض کنید z_ℓ ها پارامترهای مستقل با میانگین صفر در بازه $[-1,1]$ باشند.

و v_ℓ ها پارامترهای known باشند. آنگاه به ازای هر $\Omega \geq 0$

$$\text{Prob}\left\{z : \sum z_\ell v_\ell > \Omega\sqrt{\sum v_\ell^2}\right\} \leq \exp\left(\frac{-\Omega^2}{2}\right)$$

از نامساوی کوشی-شوارتز و این که از $\Omega\ \text{STD} \leq b^0 - (a^0)^T x$ آمده بود

استفاده از لم برای مثال قبلی.

مرداسع

$$\Omega\sqrt{\sum\left((a^\ell)^T x - b^\ell\right)^2} \leq b^0 - (a^0)^T x$$

اگر $v_\ell = (a^\ell)^T x - b^\ell$ قرار دهیم، طبق لم:

$$\text{Prob}\left\{\sum z_\ell\left((a^\ell)^T x - b^\ell\right) > \Omega\sqrt{\sum\left((a^\ell)^T x - b^\ell\right)^2}\right\} \leq \exp\left(\frac{-\Omega^2}{2}\right)$$

همان

$$\text{Prob}\left\{\sum \text{"} \leq \Omega\sqrt{\sum \text{"}}\right\} \geq 1 - \exp\left(\frac{-\Omega^2}{2}\right)$$

ترکیب با مرداسع

$$\text{Prob}\left\{\sum z_\ell\left((a^\ell)^T x - b^\ell\right) \leq b^0 - (a^0)^T x\right\} \geq 1 - \exp\left(\frac{-\Omega^2}{2}\right)$$

البته Conservative تر شد که ایرادی هم ندارد.

PAPCO

dual $2 \times 5^2 = 50$

Subject:
Date

خلاصه: شرط بدون نایقینی x: $\Omega\sqrt{\sum\left((a^l)^T x - b^l\right)^2} \le b^0 - (a^0)^T x$ یک تضمین این برای

Chance constraint $Prob\{a^T x \le b\} \ge 1-\varepsilon$ است وقتی $\Omega \ge \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$

باشد در شرایطی که z از شرایط $\boxed{**}$ صفحه 49 پیروی کند.

خاطرتان باشد، مسئله با شرایط $\boxed{**}$ را به صورت Bounded حل کردیم در قسمت قبل.

Box 1 معادل فصل قبل 100%

$|z_l| \le 1$ — $a^T x \le b$ → R.C. $\sum_{l=1}^{L} |(a^l)^T x - b^l| \le b^0 - (a^0)^T x$

Robust Counterpart

تعمیم الان — 100 − ε% — $a^T x \le b$ → C.C. $\Omega\sqrt{\sum\left((a^l)^T x - b^l\right)^2} \le b^0 - (a^0)^T x$

Chance-Constraint

اگر دقت کنیم، می‌شود معادل

R.C. برای کره با شعاع Ω با احتمال 100%.

$\Omega = 5.26 \to \varepsilon = 10^{-6}$ برای حس عدم مقایسه کنیم.

$\Omega = 7.44 \to \varepsilon = 10^{-12}$ اگر 10^{-12} را تقریباً صفر بگیریم،

حل C.C. $Ball_{7.44}$ معادل با Box_1 می‌شود. اگر $L > 56$ باشد،

$14.88 < 2\sqrt{L}$

قطرها را اگر مقایسه کنیم 14.88 $2\sqrt{L}$

می‌شود، پس برای ابعاد بزرگ، Ball محدوده بهتری می‌دهد!

Subject:
Date

می‌توانیم نسبت حجم ها را هم محاسبه کنیم:

$$\frac{\text{حجم}(Ball_\Omega)}{\text{حجم}(Box_L)} = \left(\frac{\Omega\sqrt{\frac{e\pi}{2}}}{\sqrt{L}}\right)^L$$

if $L > 237 \longrightarrow$ حجم $(Ball_\Omega)$ کوچک‌تر می‌شود.

از آن جایی که مسئله Box_1 ، $Ball_\Omega$ گفتیم معادل همدیگر هستند، دنبال روشی هستیم که feasible set کوچک‌تری بدهد چون حل کردن ساده‌تر خواهد بود.

اگر L بزرگ باشد، $Ball_\Omega$ بهتر است. برای L های کوچک، بهتر است $Ball_\Omega \cap Box_1$ معادل می‌شود که $Z = \{z \in R^L \mid |z_l| \leqslant 1, \|z\|_2 \leqslant \Omega\}$

دقت شود که اگر Box_1 نبود، با یک linear transform می‌توان Box_1 اش کرد.

هفته بعد، حضوری است کلاس. ۲ حضوری است گویا. منابع را در elearn گذاشته‌اند.

یک کتاب خیلی برای تبدیل مسائل کنترلی به LMI هم از Boyd گذاشته‌اند.

برای پروژه، دنبال یک سیستم خطی بگردید. مسئله معنی دار و واقعی که عدم قطعیت هم داشته باشد به صورت منطقی. حتی اگر Robust Opt. هم بود خوب است.

چهار فصل اول در بین که R.O. برای سیستم خطی است را روی آن مسئله پیاده می‌کنیم. مهلت، هفته اول بعد از عید. سؤال داشتید هم بپرسید.

اگر مسئله قطعی است و خودتان می‌توانیم عدم قطعیت اضافه کنیم

dual . $2^2 \times 13 = 52$ منطقی داشته باشد که چرا عدم قطعیت دارد.

جلسه هشتم شنبه ۱۴۰۲/۱۲/۱۹ 2024 - 03 - 09

لم (صفحه 50) می‌گوید شرط این که $\Omega std \leq (a^0)^T x - b^0$ برقرار باشد، شرط احتمالاتی با احتمال $1-\exp\left(\frac{-\Omega^2}{2}\right)$ شرط برقرار خواهد بود. چون در آن لم فرض زیادی نداشتیم، آن لم محافظه‌کارانه بود.

جلسه قبل، شرط Box_1 را در حالت دقیق با $Ball_\Omega$ در حالت chance-constraint مقایسه کردیم. گفتیم برای L های بزرگ، $Ball_\Omega$ بهتر از Box_1 است. حال برای L های کوچک می‌خواهیم تخمین بهتری ارائه دهیم.

$$Ball_\Omega \cap Box_1 : \quad Z = \{z : \underbrace{\|z\|_\infty \leq 1}_{Ball_1} , \underbrace{\|z\|_2 \leq \Omega}_{Box_\Omega}\}$$

R.C.:

$$\left.\begin{array}{l} v_l + w_l = b^l - (a^l)^T x \qquad l = 1, \dots, L \\ \sum |v_l| + \Omega \sqrt{\sum w_l^2} \leq b^0 - (a^0)^T x \end{array}\right\} (*)$$

- قضیه: اگر x یک جواب feasible برای رابطه (*) باشد و متغیرهای z داشته باشیم $E\{z\} = 0$ و $-1 \leq z_l \leq 1$ مستقل، آن‌گاه با احتمال $1-\exp\left(\frac{-\Omega^2}{2}\right)$، x یک نقطه feasible برای مسئله $a^T x \leq b$ خواهد بود. در نتیجه، برای L های کوچک هم تخمین خوب خواهد بود.

Subject:
Date

اثبات: $\|z\|_\infty \le 1$ طبق فرض. میخواهیم احتمال وقوع حالت نامطلوب را محاسبه کنیم.

$$\sum \left((a^l)^T x - b^l\right) z_l > (a^0)^T x - b^0$$

سطر * از یک

$$-\sum v_l z_l - \sum w_l z_l > (a^0)^T x - b^0$$

چون اگر z_l ها max را بگذاریم

$$-\sum |v_l| - \sum w_l z_l > (a^0)^T x - b^0$$

$$-\sum w_l z_l > \left((a^0)^T x - b^0\right) + \sum |v_l|$$

از سطر دوم *

$$-\sum w_l z_l > \Omega \sqrt{\sum w_l^2}$$

چون x یک نقطه feasible برای $(*)$ است:

که داشتیم که این رابطه با احتمال $\exp\left(\frac{-\Omega^2}{2}\right)$ رخ دهد و همزمان ثابت شد.

مثال Budget Constraint:

$$Z = \left\{ z : \|z\|_\infty \le 1 , \sum_{l=1}^{L} |z_l| < \gamma \right\}$$

$$\left.\begin{aligned} R.C.: \sum |v_l| + \max_l |w_l| &\le b^0 - (a^0)^T x \\ v_l + w_l &= b^l - (a^l)^T x \end{aligned}\right\} \star\star$$

قضیه: اگر x یک نقطه feasible برای ** باشد، با احتمال $1 - \exp\left(\frac{-\gamma^2}{2L}\right)$ یک نقطه feasible برای $a^T x \le b$ خواهد بود، به شرط این که $\|z\| \le 1$،
$E\{z\} = 0$

طبق نامساوی کوشی شوارتز، داریم: $\|w\|_2 \le \sqrt{L}\, \|w\|_\infty$ چرا؟

PAPCO

dual $2 \times 3^3 = 54$

Subject:
Date

$$\|w\|_2^2 = \underbrace{\sum w_\ell^2}_{} = \sum |w_\ell|\,\|w_\ell\| \leq \sum |w_\ell|\,\|w\|_\infty$$

چون $|w_\ell| \leq \|w\|_\infty$

$$\leq \left(\sqrt{L}\,\|w\|_2\right)\|w\|_\infty$$

حال برویم سراغ اثبات قضیه: فرض کنیم (که فرض قضیه است) x, v, w نقطه

feasible برای ★★ است. $\rightarrow \sum |v_\ell| + \frac{\gamma}{\sqrt{L}}\|w\|_2 \leq b^0 - (a^0)^T x$

طبق قضیه قبلی، معادل با $Box_1 \cap Ball_{\frac{\gamma}{\sqrt{L}}}$ می‌شود؛ پس احتمال برقراری است

$1 - \exp\left\{\frac{-\gamma^2}{L}\right\}$ و قضیه اثبات شد.

سؤال: بین $Z = \left\{z : \|z\|_\infty \leq 1, \sum_{\ell=1}^{L}|z_\ell| < \gamma\right\}$ و $Z = \left\{\|z\|_\infty \leq 1, \|z\|_2 \leq \Omega\right\}$ چه مقایسه‌ای می‌توان کرد؟

این یکی Pertubation Set بزرگ‌تر است. این یکی بزرگ‌تر است و محافظه‌کارانه‌تر می‌شود.

ولی در عوض چون شرط این خطی است، حل آن ساده‌تر خواهد بود. Trade-off است.

● مثال: انتخاب پرتفوی سرمایه‌گذاری. 200 تا دارایی داریم.

دارایی #200: $r_{200} = 1.05$ (نرخ سود 5%) بدون واریانس.

بقیه دارایی‌ها نرخ بازگشت‌شان r_ℓ است، $r_\ell \in [\mu_\ell - \sigma_\ell, \mu_\ell + \sigma_\ell]$ و $1 \leq \ell \leq 199$

55 = 5 × 11 dual

Subject:
Date

$$\mathrm{Exp}\{r_\ell\} = \mu_\ell \;،\; \mu_\ell = 1.05 + 0.3\,\frac{200-\ell}{199}$$

$$\sigma_\ell = 0.05 + 0.6\,\frac{200-\ell}{199}$$

Value at Risk

هدف سرمایه گذار پول بین این 200 تا asset است به گونه‌ای که بیشینه شود، با سطح ریسک 0.5%. یعنی از هر کدام چقدر بخرم.

شرط در $\exp\frac{-\alpha^2}{2}$, $\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2L}\right)$

به زبان ریاضی:

$$\max_{y,t}\left\{t : \sum_{\ell=1}^{199} r_\ell y_\ell + r_{200}\,y_{200} - t \geq 0\right.$$

$$\left.\sum_{\ell=1}^{200} y_\ell = 1 ,\; y_\ell \geq 0 \right\}$$

t: حداقل سود است.

y_ℓ: میزان انتخاب شده از asset ℓ ام.

با توجه به فرض $r_\ell \in [\mu_\ell - \sigma_\ell , \mu_\ell + \sigma_\ell]$ می‌توانیم بنویسیم:

$$r_\ell = \mu_\ell + \sigma_\ell z_\ell$$

$$|z_\ell| \leq 1$$

برای نگارش ماتریسی مسئله تعریف می‌کنیم:

$$x \triangleq [y ; -t] \in \mathbb{R}^{201}$$

مسئله بازنویسی می‌شود به:

$$\min \; x_{201} = [0,0,\dots,0,1]\,x$$

s.t.

$$\left(a^0 + \sum z_\ell a^\ell\right)^T x - \left(b^0 + \sum z_\ell b^\ell\right) \leq 0$$

$$\sum_{\ell=1}^{200} x_\ell = 1 ,\quad x_\ell \geq 0$$

توانستیم مسئله را به فرم استاندارد قبلی تبدیل کنیم:

$$a_0 = [-\mu_1 ; \dots ; -\mu_{199} ; -r_{200} ; -1]$$

$$a^\ell = [0_{\ell-1} ; 1 ; 0_{201-\ell}] \quad 1 \leq \ell \leq 199 \;,\; b^\ell = 0 \quad 1 \leq \ell \leq 199$$

PAPCO

dual: $2^3 \times 7 = 56$

Subject:
Date

① Box R.C $\{z : \|z\|_\infty \leq 1\}$ مسئله را در چند حالت حل می‌کنند.

② Ball-Box R.C $\Omega = \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} = 3.225$

$\hookrightarrow (\frac{1}{2})^2 \longrightarrow$ سطح ریسک 0.5%

$\{z : \|z\|_\infty \leq 1 ,\ \|z\|_2 \leq 3.225\}$

③ Budget $\gamma = 45.921 \longleftarrow \frac{\gamma^2}{2L} = 0.5\%$

برای $l = 1$: مرز پایین می‌شود: $\mu_1 - \sigma_1 = 1.05 + 0.3 - 0.05 - 0.6 = 0.7$ چون در RC

worst-case را در نظر گرفتیم،

برای $l = 199$: $\mu_{199} - \sigma_{199} = 1 - 0.3\frac{1}{199} \simeq 1$ است.

بنابراین مرز پایین $\mu_l - \sigma_l$ را داریم

① $\max\{t : \sum(\mu_l - \sigma_l)y_l + 1.05\, y_{200} - t \geq 0$

$\sum y_l = 1 ,\ y_l \geq 0\}$

چون همه $\mu_l - \sigma_l$ کمتر از 1 می‌شوند همه به y_{200} اختصاص داده می‌شود.

پس جواب می‌شود: $y_1 = \dots = y_{199} = 0 ,\ y_{200} = 1$. در این حالت با

احتمال 100% 5% سود می‌کند.

این شد برای شرط یک که BOX_1 بود مسئله.

PAPCO

57 = 3 × 19 dual

Subject:
Date

② $\max \{ t : \sum y_\ell \mu_\ell + 1.05\, y_{200} - \sum |v_\ell| - 3.255 \sqrt{\sum w_\ell^2} \geq t$

$$v_\ell + w_\ell = \sigma_\ell\, y_\ell \qquad \ell = 1, \dots, 199$$

$$\sum y_\ell = 1 ,\ y_\ell \geq 0 \}$$

این مسئله را اگر حل کنیم، جواب بهینه مسئله 12% میشود. به عبارتی با احتمال 0.995، 12% سود میکنیم. سود بیشتری میکنیم ولی احتمال بدست سود نکنیم.

③ $\max \{ t : \sum y_\ell \mu_\ell + 1.05\, y_{200} - \sum |v_\ell| - 45.921 \max w_\ell \geq t$

باقی شرایط مثل حالت ②

این مسئله را اگر حل کنیم: احتمال 0.995 به سود 10.14% میرسد.

محاسباتش ساده‌تر است (که اینجا چون حل نکرده‌ام، سختی این را ندیدیم) ولی محافظه کارتر است و سود کمتری میدهد.

فیلد به آن درصد 0.5% ریسک وابسته است. ریسک = 0.47% سود Ball-Box = 14.7%

فیلد وابسته است به ریسک = 0.92% سود Budget = 13.95%

پارامتر خطا. اطلاعات

در مسئله ①، از توزیع نفس μ_ℓ ، σ_ℓ صحیح استفاده نکردیم.

PAPCO

dual $2 \times 29 = 58$

Subject:
Date

$r_\ell \in [\mu_\ell - \sigma_\ell, \mu_\ell + \sigma_\ell]$ ← هیچ داده ای راجع به توزیع ندارد. مسئله robust.

توزیع را داریم. مسئله chance-constraint

DRO حالت بینابین است که اطلاعاتی از توزیع یا پارامترها توزیع داریم.

برای پروژه، شروع کنید به پیدا کردن یک مسئله linear.

جلسه نهم دوشنبه ۱۴۰۲/۱۲/۲۱ 2024-03-11

قانون حجم برای Ball، چون در هر بعد یک انتگرال اضافه می‌شود، تا تا داریم:

برای مکعب L بعدی، می‌شود: $\underbrace{\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\cdots\int_{-1}^{1}}_{L} 1\, dV = 2^L$

برگردیم سراغ بحث اصلی. مسئله‌مان:

$a^T x \le b:\quad [a;b] = [a^0;b^0] + \sum_{\ell=1}^{L} z_\ell\, [a^\ell; b^\ell]$

فرض کردیم توزیع معینی دارند z_ℓ ها. می‌خواهیم $P\{a^T x \le b\} \ge 1-\epsilon$

تحت سه شرط: ① z_ℓ ها مستقل باشند. ② $-1 \le z_\ell \le +1$ ، ③ $E\{z_\ell\} = 0$

سه حالت را بررسی کردیم $Ball_\Omega$ $(\Omega \ge 7.44$ برای$)$ و $Ball_\Omega \cap Box_1$ (برای $\Omega \ge 7.44$)

و حالت سوم Budget Constraint. حال می‌خواهیم سه شرط را اگر ممکن است ساده‌تر کنیم. شروط لزوماً الکی منطقی به نظر می‌رسند ولی خواهیم دید در عمل خوب رخ می‌دهند.

Subject:
Date

P.1) z_ℓ ها مستقل باشند

شروط جدید:

P.2)

اگر P_ℓ توزیع z_ℓ باشد، داشته باشیم:

$$\int e^{ts}\, dP_\ell(s) \leq \exp\left\{\max\left[\mu_\ell^- t, \mu_\ell^+ t\right] + \frac{1}{2}\sigma_\ell^2 t^2\right\}$$

$\forall t \in R$

یعنی به جای شروط قبلی در مورد z_ℓ، مثلاً

$E\{e^{ts}\}$

میانگین اینجا صفر است، شرط بیشتری گذاشته ام.

اگر توابع توزیع احتمال، شرط فوق براشان برقرار است که جلوتر خواهیم دید، باید باشد.

کافی است σ_ℓ، μ_ℓ^+، μ_ℓ^- پیدا کنیم که در شرط فوق صدق کند. منطقاً $\mu_\ell^- \leq \mu_\ell^+$

$$P(V) \triangleq \overset{\text{Prob}}{P}\left\{V_0 + \sum z_\ell V_\ell > 0\right\} \quad \text{s.t. } V = [V_0; V_1; \dots; V_L]$$

با z_ℓ هایی که شرط P.1, P.2 براشان برقرار باشد. چگونه استفاده کنیم؟

$$P\{a^T x > b\} \leq \varepsilon \quad = \text{Prob}\left\{(a^{0T}x - b^0)\, z + \sum ((a^\ell)^T x - b^\ell)\, z_\ell > 0\right\}$$

معادل سازی:

$$V = \left[(a^0)^T x - b^0; \dots (a^L)^T x - b^L\right]$$

هدف این است که $P(V) \leq f(V)$ پیدا کنیم که دیگر احتمالاتی نباشد

و بعد بگوییم $\varepsilon \geq$ آن است. هدف پیدا کردن $f(V)$ است، گونه ای که

z نداشته باشد و تقریب باشد.

برای این هدف چند گام باید حرکت کنیم.

PAPCO

triple $2^2 \times 3 \times 5 = 60$

Subject:
Date

$w_1, \dots, w_L$ given : $\varphi(w_1,\dots,w_L) \triangleq \sum_{\ell=1}^{L} \max\left[\mu_\ell^- w_\ell , \mu_\ell^+ w_\ell\right] + \frac{1}{2}\sigma_\ell^2 w_\ell^2$

ادعا :

$\cancel{E\{\exp(\varphi(w_1,\dots,w_L))\}}$ $E\{\exp(\sum z_\ell w_\ell)\} \leq \exp\{\varphi(w_1,\dots,w_L)\}$

ادعا
چرا درست است؟

$* \; E\{\exp(\sum_{\ell=1}^{L} z_\ell w_\ell)\} = E\{\prod_{\ell=1}^{L} \exp(z_\ell w_\ell)\}$

چون z_ℓها مستقل اند $= \prod_{\ell=1}^{L} \underbrace{E\{\exp(z_\ell w_\ell)\}}$

طبق شرط P.2 این عبارت (فقط تابع w_ℓ شده)

$\leq \exp\{\max[\mu_\ell^- w_\ell , \mu_\ell^+ w_\ell] + \frac{1}{2}\sigma_\ell^2 w_\ell^2\}$

خلاصه $\Rightarrow \; * \leq \prod_{\ell=1}^{L} \exp(\text{''}) = \exp\left(\sum(\text{''})\right) = \exp(\varphi(w))$

حال این این نامساوی می‌خواهیم استفاده کنیم تا کرانی برای $P(V)$ پیدا کنیم.

برای این کار، ابتدا داخل تعریف $P(V)$ را بررسی می‌کنیم:

$V_0 + \sum z_\ell V_\ell > 0 \overset{\alpha>0}{\underset{\text{ضرب}}{\longleftrightarrow}} \alpha(V_0 + \sum z_\ell V_\ell) > 0 \quad \forall \alpha > 0$

$\overset{\exp(\cdot)}{\underset{\text{اکیداً}}{\longleftrightarrow}} \exp\{\alpha(V_0 + \sum z_\ell V_\ell)\} \geq 1 \quad \forall \alpha > 0$ به دلیل دیگر هم $P(V)$ احتمال است از 1 کمتر است.

$\xrightarrow{\text{ادعا}*} \forall \alpha > 0 : E\left[\exp\{\alpha(V_0 + \sum z_\ell V_\ell)\}\right] \geq P(V)$

چرا ادعا * درست است؟ $E[\cdot]$ را به صورت انتگرال بنویسیم، می‌شود:

$\int \exp\{\alpha(V_0 + \sum z_\ell V_\ell)\} \, dP \qquad P(V) = \text{Prob}(V_0 + \sum V_\ell z_\ell > 0)$

Subject:
Date

$$\rightarrow P(V) \leqslant E\left\{\exp(\alpha v_0)\exp\left(\sum z_\ell v_\ell\right)\right\}$$

$$= \exp(\alpha v_0)\, E\left[\exp\left(\sum z_\ell v_\ell\right)\right]$$ طبق نامساوی بالا در صفحه 61:

$$\leqslant \exp(\alpha v_0)\exp\left(\varphi(\alpha v_1, \alpha v_2, \dots, \alpha v_L)\right)$$

$$= \exp\left\{\alpha v_0 + \varphi(\alpha v_1, \dots, \alpha v_L)\right\}$$ می‌خواهیم کاری کنیم که این عبارت،

$\leqslant \varepsilon$ بشود. البته لازم نیست به ازای همه αها باشد (اینجا $\forall \alpha$ صادق بود)

ما فقط می‌خواهیم یک α پیدا کنیم که $\leqslant \varepsilon$ بشود که شرط کافی می‌شود.

شرط کافی: if $\exists \alpha > 0 : \alpha v_0 + \varphi(\alpha v_1, \dots, \alpha v_L) \leqslant \ln(\varepsilon)$

Safe Approximation

در آن صورت $P\left\{z : v_0 + \sum z_\ell v_\ell > 0\right\} \leqslant \varepsilon$ خواهد بود.

□○□

می‌توانیم مجموعه جواب تعریف کنیم:

$$V_\varepsilon^{\circ} \triangleq \left\{ v = [v_1; \dots; v_L] \;;\; \exists \alpha_v > 0 : \alpha_v v_0 + \sum \alpha_v z_\ell v_\ell \leqslant \ln(\varepsilon) \right\}$$

این مجموعه یک feasible set برای □○□ است.

اگر V_ε° feasible set باشد $\mathrm{close}(V_\varepsilon^{\circ})$ نیز feasible set خواهد بود.

همه این کارها را انجام می‌دهیم تا Chance Constraint را به صورت غیر احتمالاتی بنویسیم.

Subject:
Date

$$v \in V_\varepsilon^\circ \longrightarrow \exists \alpha > 0 : \ln(\varepsilon) > f_v(\alpha) = \alpha v_0 + \varphi(\alpha v_1, \dots, \alpha v_L)$$

$$= \underbrace{\alpha\left[v_0 + \sum \max\left[\mu_\ell^- v_\ell , \mu_\ell^+ v_\ell\right]\right]}_{} + \frac{\alpha^2}{2} \underbrace{\sum \sigma_\ell^2 v_\ell^2}_{b(v)}$$

a(v)
ثابت است

$$= a(v)\,\alpha + b(v)\,\frac{\alpha^2}{2}$$ یک تابع درجه دو برحسب α شد.

می‌خواهیم α پیدا کنیم که در شرط صدق کند، پس می‌رویم سراغ min عبارت مربعی.

شرط لازم و کافی : $\min\left(\alpha\, a(v) + \frac{\alpha^2}{2} b(v)\right) \leq \ln(\varepsilon)$

$$\alpha\left(a(v) + \frac{b(v)}{2}\alpha\right)$$

b(v) که حتماً مثبت است.

باید بر حسب علامت a(v) حالت‌بندی کنیم:

$a(v) \geq 0 \longrightarrow \alpha_{min} = 0 : \min f(v) = 0 \longrightarrow$ در این حالت داریم $0 \leq \ln(\varepsilon)$ ولی چون $0 < \varepsilon < 1$ است، $\ln(\varepsilon) < 0$ است و

$a(v) < 0$

غیر ممکن می‌شود. پس در این حالت جواب تهی است.

$$a(v) < 0 \longrightarrow \alpha_{min} = \frac{-2a(v)}{b(v)} , \quad \min f_v = \frac{-1}{2}\frac{a^2(v)}{b(v)}$$ حالت $a(v) < 0$:

خلاصه:

$$a(v) < 0 , \quad \frac{-1}{2}\frac{a^2(v)}{b(v)} \leq \ln(\varepsilon) \xrightarrow[\text{جبری}]{\text{با اعمال}} \cancel{a(v) + \sqrt{2\ln(\varepsilon)}}$$

فقط طوری باشد که $a(v)<0$ است و $-a(v) = |a(v)|$ می‌شود

$$a(v) + \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) b(v)} \leq 0$$

PAPCO

(63) $= 3^2 \times 7$ dual

Subject:
Date

قضیه ۱: رابطه $v_0 + \sum \max[\mu_\ell^- v_\ell, \mu_\ell^+ v_\ell] + \sqrt{2\ln(\frac{1}{\varepsilon})}\sqrt{\sum \sigma_\ell^2 v_\ell^2} \leq 0$

شرط کافی برای $P(v_0 + \sum z_\ell v_\ell > 0) \leq \varepsilon$ را باشد. منظور از شرط کافی تخمین این است.

Safe Approximation

قضیه ۲: فرض کنید z_ℓ ها مستقل باشد و شرط P.2 را ارضا نماید.

$$\text{Prob}\left\{ \sum z_\ell v_\ell > \sum \max[\mu_\ell^- v_\ell, \mu_\ell^+ v_\ell] + \Omega\sqrt{\sum \sigma_\ell^2 v_\ell^2} \right\} \leq \exp\left\{\frac{-\Omega^2}{2}\right\}$$

کافی است به صورت زیر، دو تا قضیه بالا را ترکیب کنیم و بعد در قضیه ۱ عبارت زیر را قرار دهیم تا به قضیه ۲ برسیم.

$$v_0 = -\sum \max[\mu_\ell^- v_\ell, \mu_\ell^+ v_\ell] - \Omega\sqrt{\sum \sigma_\ell^2 v_\ell^2}$$

$$\varepsilon = \exp\left(\frac{-\Omega^2}{2}\right)$$

و اما بعد:

$$V = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^L : \exists u \in \mathbb{R}^L : \mu_\ell^- \leq \eta_\ell - u_\ell \leq \mu_\ell^+ , \sqrt{\sum \frac{u_\ell^2}{\sigma_\ell^2}} \leq \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right\}$$

الان رابطه Chance-Constraint را به دست آورده‌ایم. می‌خواهیم نشان دهیم که

این Chance-constraint معادل R.C. برای یک مسئله دیگر می‌شود.
Robust Counterpart

Subject:
Date

$$V = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^L : \eta = u + v : \mu_\ell^- \leq v_\ell \leq \mu_\ell^+ ; \sqrt{\sum \frac{u_\ell^2}{\sigma_\ell^2}} \leq \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right\}$$

بیضی گون متوازی الاضلاع

این مجموعه، گویا جمع شدن یک مجموعه Ball , Box است. میخواهیم R.C. را

برای این مجموعه حساب کنیم و رابطه اش را با مثل Chance Const ببینیم.

$$\max_{\eta \in V} \eta^T y = \max_{u,v} \left\{ u^T y + v^T y \,\middle|\, \text{شروط بالا} \right\} =$$ چون u و v مستقل اند میتوان جدا کرد:

$$= \max_v \{ v^T y \} + \max_u \{ u^T y \}$$

معرف محاسبه R.C $\eta^T y \leq b$ است که کافی

برای v، به یکی از مرزهای بازه است $\max \eta^T y$ را محاسبه کنیم و $\leq b$ قرار دهیم.

مرحله جستجو (بسته به علامت)

$$= \sum_{\ell=1}^{L} \max \left[\mu_\ell^- y_\ell , \mu_\ell^+ y_\ell \right] + \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \sqrt{\sum \sigma_\ell^2 y_\ell^2}$$

شروط

● قضیه: فرض کنید P1 , P2 برای مسئله $a^T x \leq b$ برقرار باشد. همچنین،

R.C. با اختساص V را هم در نظر بگیرید. R.C. مربوط با نامساوی زیر میتواند

جایگزین شود:
$$\left((a^0)^T x - b^0\right) + \sum \max \left[\mu_\ell^- \left((a^\ell)^T x - b^\ell\right), \mu_\ell^+ \left((a^\ell)^T x - b^\ell\right) \right]$$

$$+ \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \times \sqrt{\sum \sigma_\ell^2 \left((a_\ell)^T x - b^\ell\right)^2} \leq 0 \quad \star$$

PAPCO

65 = 5 × 13. dual