Subject:
Date

در ① : وقتی قرار است به ازای $\forall z$ ها برقرار باشد، می‌توانیم برای $\max_z$ بگیریم باید برقرار باشد.

در ② : برای رسیدن به max، باید z_i به مرزش برسد، یا $+1$ یا -1.

بسته به اینکه ضریب اش مثبت باشد یا منفی که با قدر مطلق نشان دادیم اش.

جلسه ششم شنبه ۱۴۰۲/۱۲/۱۲ 2024-03-02

یادآوری و دوره: مسئله کلی با عدم قطعیت

$$\min\{c^T x + d \mid Ax \leq b;\ [c; d; A; b] \in U\}$$

را می‌توانیم به صورت معادل به صورت روبرو بنویسیم: صورت مسئله اصلی

$$\min\{c^T x \mid a^T x \leq b;\ [\underset{\text{بردار}}{a}; b] \in U\}$$

$$[a; b] = [a^0; b^0] + \sum_{l=1}^{L} z_l [a^l; b^l] \quad ; \quad z = [z_1; \dots; z_L] \in Z \quad \star$$

① مثالی که بررسی کردیم $\Leftarrow$ $Z = \{z \in \mathbb{R}^L \mid \|z\|_\infty \leq 1\}$

به صورت معادل

$$(a^0)^T x + \sum z_l (a^l)^T x \leq b^0 + \sum z_l b^l \quad \forall z \in Z$$

$$\sum z_l [(a^l)^T x - b^l] \leq b^0 - (a^0)^T x \quad \forall z : \|z\|_\infty \leq 1$$

$$\equiv \ |z_l| \leq 1 \quad \forall l$$

اگر قرار باشد به ازای همه‌ی z ها برقرار باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$\max_{|z_l| \leq 1} \{ \text{"} \} \leq b^0 - (a^0)^T x \longleftrightarrow \sum_{l=1}^{L} |(a^l)^T x - b^l| \leq b^0 - (a^0)^T x$$

با توجه به قطعی بودن، max را می‌توان با abs نوشت. (RC)

با تکنیک گفته شده، شرط قدر مطلق فوق با به صورت $2L + 1$ شرط بدون عدم قطعیت...

PAPCO

39 = 3x13 dual

Subject:
Date

... ننوشتیم. کل هدف همین است که مسئله با عدم قطعیت را به صورت معادل بدون عدم

قطعیت تبدیل کنیم که دیگر با ابزارهای استاندارد حل میشود.

② مثال:
$$Z = \{ z \in \mathbb{R}^L \mid \|z\|_2 \leq \underbrace{\Omega}_{\text{شعاع ثابت}} \}$$

$$\max_{z \in Z} \left\{ \sum z_\ell \left[(a^\ell)^T x - b^\ell\right] \right\} \leq b^0 - (a^0)^T x$$

طبق نامساوی کوشی-شوارتز داریم:

$$\left(\sum_{\ell=1}^{L} z_\ell \left[(a^\ell)^T x - b^\ell\right] \right)^2 \leq \overbrace{\left(\sum z_\ell^2 \right)}^{\Omega^2} \left(\sum \left[(a^\ell)^T x - b^\ell\right]^2 \right)$$

حالت مساوی هم رخ میدهد زیرا شرط است این بود که

$$** \quad \frac{(a^\ell)^T x - b^\ell}{z_\ell} = \frac{(a^1)^T x - b^1}{z_1}$$

شرط روبرو قابل اعمال است. $\forall\ 2 \leq z \leq L$

در نتیجه: شرط معادل میشود:
$$\Omega \sqrt{\sum_{\ell=1}^{L} \left[(a^\ell)^T x - b^\ell\right]^2} \leq b^0 - (a^0)^T x$$

باز مسئله با عدم قطعیت (به خاطر وجود z_ℓها) تبدیل به یک مسئله Quadratic

بدون عدم قطعیت شد که به صورت استاندارد قابل حل است.

چون تساوی رخ میدهد (به ازای یک z_0 ای)، شرط معادل شرط لازم و کافی است. اگر نمیتوانستیم

نشان دهیم تساوی رخ میدهد (که در ** نشان دادیم) میشد شرط کافی.

dual $2^3 \times 5 = 40$

بعد از بررسی دو حالت ① و ② برای مسئله * (صفحه 39)، حالت کلی را بررسی می‌کنیم:

شرط حالت کلی: $Z = \{ z \in \mathbb{R}^L \mid \exists u : Pz + Qu + r \in K \}$

K is closed convex cone, if K is not polyhedra; interior $K \neq \emptyset$.

اگر K چند وجهی نباشد، فضای داخلی آن تهی نباشد.

این شرط نسبت به دو مثال ① و ② کلی‌تر است، یعنی با انتخاب P, Q, r, K مناسب آن شرط‌ها به دست می‌آید.

① $\|z\|_\infty \leq 1 \iff \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} \in K_\infty \Rightarrow \begin{cases} P = [I ; 1] \\ Q = 0 \\ r = 0 \\ K = K_\infty \end{cases} \quad \bar{z} = \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$

② $\|z\|_2 \leq 1 \iff$ Loretenz Cone: $K_2 = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \}$

مخروط لورنتز

P, Q, r دقیقاً شکل قبلی می‌شود، فقط K این بار Loretenz Cone می‌شود.

یا همان K_2. نکته جالب برای K_2 این است که $K_2^* = K_2$.

نشان می‌دهد شرط کلی گفته شده، تا حد زیادی کلی است و خیلی از حالت‌ها را در بر می‌گیرد.

Subject:
Date

• قضیه: در شرایط ⊠ (صفحه ۴۱) برای مسئله ★ (صفحه 39)، شرط $a^T x \leq b$ معادلات

می‌تواند با شروط زیر جایگزین شود، این ۴ شرط هیچ عدم قطعیتی ندارند دیگر:

$$\begin{cases} r^T y + (a^0)^T x \leq b^0 \\ Q^T y = 0 \\ (P^T y)_\ell + (a^\ell)^T x = b^\ell \qquad \ell = 1, \dots, L \\ y \in k^* \end{cases}$$

منظور المان ℓ اُم است.

• اثبات:

x is feasible (robust) is equivalent to $\longleftrightarrow \underbrace{(a^0)^T x - b^0}_{d(x)} + \sum_{\ell=1}^{L} z_\ell \underbrace{[(a^\ell)^T x - b^\ell]}_{c_\ell(x)} \} \leq 0$

دقت: اگر ازای همه برقرار باشد، ازای $\sup_z$ هم برقرار باشد:

$$\sup_{z \in Z} \{ d(x) + z^T c(x) \} \leq 0 \iff \sup_{z \in Z} \{ z^T c(x) \} \leq -d(x)$$

چون وابسته به z نیست از sup بیرون می‌آید

برداری نوشتم Σ را

$$\iff \max_{z,u} \{ c^T(x) z \mid Pz + Qu + r \in k \} \leq -d(x)$$

مسئله بهینه‌سازی conic شد. چون فرض کرده‌ایم، نقطه داخلی تهی نیست،

می‌توانیم نتیجه بگیریم شرط slater برقرار است ← جواب مسئله دوگان برابر با

جواب مسئله اولیه است. پس مسئله دوگان را می‌نویسیم.

PAPCO

Subject:
Date

$$\min \{ r^T y \mid Q^T y = 0 ,\ P^T y = -c(x) ,\ y \in K_* \} \le -d(x)$$

چون جواب مسئله اصلی و دوگان یکی است، به جای ( ) max که جواب مسئله اصلی است $\min\{\ \}$

که جواب مسئله دوگان است را می‌گذاریم که جواب آن می‌شود شرط های ۴ گانه:

$$r^T y \le -d(x) ,\quad Q^T y = 0 ,\quad P^T y = -c(x) ,\quad y \in K_*$$

که تبدیل به یک سری شروط بدون نامتناهی شد که فقط نکته‌اش $y \in K_*$ است.

می‌توانست شرط ها به صورت اشتراک چند شرط باشد، یعنی:

$$Z = \{ z \mid \exists\, u^1, \dots, u^s : P_i z + Q_i u^i + r^i \in K_i \ ;\ i \in \{1, \dots, s\} \}$$

اثبات مشابه حالت یکی است که اینجا دیگر نمی‌نویسیم. اینها می‌شود:

$$\longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{s} r_i^T y^i + (a^0)^T x \le b^0 \\ Q_i^T y^i = 0 \\ \sum_{i=1}^{s} (P_i^T y^i)_\ell + (a^\ell)^T x = b^\ell \qquad \forall i \in \{1, \dots, S\} \\ y^i \in K_i^* \end{array} \right.$$

دقت شود که تا اینجا، شروطی که نوشتیم معادل مسئله با نامتناهی بود و هنوز تقریب نزده‌ایم. جواب مسئله معادل، دقیقا جواب مسئله با عدم قطعیت است

Subject:
Date

مثال: $Z = \{ z \in \mathbb{R}^L, -1 \leq z_\ell \leq +1, 1 \leq \ell \leq L, \sqrt{\sum_{\ell=1}^{L} \frac{z_\ell^2}{\sigma_\ell^2}} \leq \Omega \}$

از نظر هندسی hyper-cube می‌شود

از نظر هندسی بیضی می‌شود. باید شرط فوق را تبدیل به فرم کلی کنیم.

$Q_2 = 0$ از تجربه قبلی حذف می‌شود $Q_1 = 0$

$$Z = \{ z \in \mathbb{R}^L \mid P_1 z + r_1 \in K_1, \ P_2 z + r_2 \in K_2 \}$$

$$P_1 z = [z \,;\, 0_{1\times 1}], \quad r_1 = [0_{L\times 1} \,;\, 1], \quad \bar{K}_1 = K_\infty$$

$$\longleftrightarrow \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} \in K_\infty$$

$$P_2 z = [\Sigma^{-1} z \,;\, 0] \quad \text{where } \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots \sigma_L)$$

$$r_2 = [0_{L\times 1} \,;\, \Omega] \qquad \bar{K}_2 = \text{Lorentz Cone}$$

$[\Sigma^{-1} z \,;\, \Omega] \in K_2$ در این صورت، شرط دوم می‌شود:

که می‌شود معادل شرط دوم صورت سوال. حال که مسئله به فرم استاندارد تبدیل شد، طبق تعمیم قضیه، شروط معادل می‌شود:

$$y^1 = [\eta^1 \,;\, \tau^1]$$

$$y^2 = [\eta^2 \,;\, \tau^2]$$

(1) $\tau_1 + \Omega \tau_2 \leq b^0 - (a^0)^T x$

(2) $0 = 0$

چون $Q_1 = 0$ است ($Q_2 = 0$)

(3) $(\eta_1 + \Sigma^{-1} \eta_2)_\ell \leq b^\ell - (a^\ell)^T x$

(4) $\|\eta_1\|_1 \leq \tau_1$, $\|\eta_2\|_2 \leq \tau_2$

معادل $[\eta_1 ; \tau_1] \in K_1$ معادل $[\eta_2 ; \tau_2] \in K_2^{dual}$ $2^2 \times 11 = 44$

PAPCO

Subject:
Date

برای شرط چهارم، $k_1 = k_\infty^*$ میشود و $k_2 = k_2^*$ میشود.

میتوانیم با عملیات جبری، روابط و شرایط را کمی ساده‌تر بنویسیم. $V = \eta_1$

با تغییر متغیر و جاگذاری شرط‌ها در همدیگر میرسیم به: $w = \Sigma^{-1}\eta_2$

ترکیب شروط ①, ④: $\displaystyle\sum_{l=1}^{L} |V_l| + \Omega\sqrt{\sum \sigma_l^2 w_l^2} \leq b^0 - (a^0)^T x$

$$V_l + w_l = b^l - (a^l)^T x$$

تبدیل شده مسئله بدون عدم قطعیت به فرم Quadratic.

∴ مثال: مسئله Budget Uncertainty:

$$Z = \left\{ z \in \mathbb{R}^L : -1 \leq z_l \leq 1,\ 1 \leq l \leq L,\ \|z\|_1 \leq \gamma \right\}$$

معادل مینویسیم: $Z = \left\{ z \in \mathbb{R}^L \mid P_1 z + r_1 \in \bar{k}_1,\ P_2 z + r_2 \in \bar{k}_2 \right\}$

$P_1 z = [z; 0],\ r_1 = [0; 1],\ \bar{k}_1 = k_\infty$

$P_2 z = [z; 0],\ r_2 = [0, \gamma],\ \bar{k}_2 = k_1$

$y_1 = [V; \tau_1],\ y_2 = [w, \tau_2]$ ③ $[v+w]_l \leq b^l - (a^l)^T x$

① $\tau_1 + \gamma\tau_2 \leq b_0 - (a^0)^T x$ ④ $\|V_*\|_1 \leq \tau_1$

$\|w\|_\infty \leq \tau_2$

② $0 = 0$ چون $Q_1 = Q_2 = 0$ صفر

زدیم و گذاشتیم

PAPCO

(45) $= 3^2 \times 5$ dwl

Subject:
Date

باز شکل قبل، می‌توانیم شروط ① ، ④ را ترکیب کنیم و T_1 ، T_2 را حذف کنیم که می‌شود:

$$\sum_{l=1}^{L} |v_{el}| + \underbrace{\gamma |w_{el}|}_{\text{در واقع}} \le b_0 - (a^0)^T x \qquad l = 1,\dots,L$$

به جای $\max_l$ می‌گوییم به ازای همه lها $\rightarrow$ $\gamma \max_l |w_{el}|$ است (معادل با $\|\cdot\|$

رنی رفشکی

باید شرط برقرار باشد. فصل یک کتاب تمام شد.

منابع در elearn قرار داده می‌شود. حتماً Convex را مطالعه کنید.

جلسه هفتم دوشنبه دوشنبه ۱۴۰۲/۱۲/۱۴ 2024-03-04

مسئله‌ی استاندارد بهینه‌سازی با عدم قطعیت را به مسئله‌ای به فرم استاندارد بدون قطعیت تبدیل کردیم تا اینجا. تا اینجا نگاه‌مان به عدم قطعیت، عدم قطعیت کران‌دار بود.

در مدل دیگر عدم قطعیت به صورت تصادفی stochastic است. Bounded Uncertainty

ولی وقتی معنا دارد که تکرار داشته باشیم. در عمل خیلی از مسائل تکرار ندارند. مثلاً وقتی داریم یک متغیری را در آینده پیش‌بینی می‌کنیم، چون تکرار ندارد و فقط یکبار رخ می‌دهد، خیلی stochastic معنا ندارد. حتی اگر بدانیم پدیده‌ای تصادفی است، اصلاً بدیهی نیست که توزیع آن احتمال چگونه است. [البته گاهی می‌توان به دست آورد با توجه به فیزیک مسئله. مثلاً توزیع نرمال داشته باشیم]