بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه علم و صنعت ایران

زمستان ۱۳۹۸

سیگنال‌ها و سیستم‌ها　　　　پاسخ تمرین سری اول

۱. با بررسی پیرامون خود، دو نمونه سیستم مثال بزنید و سیگنال‌های ورودی و خروجی آن را مشخص کنید. (۱۰)

هدف از این سوال آشنایی شما با مفهوم سیگنال و سیستم و تفاوت بین این دو مفهوم است.

به الگوی تغییرات یک متغیر بر حسب یک (یا چند) متغیر مستقل سیگنال می گویند. مثل صوت، تصویر، سیگنال های پزشکی، معدل نمرات دانشجویان در طول یک ترم و ...

به مجموعه ای که دارای ورودی و خروجی که رابطه ای بین ورودی و خروجی آن برقرار است و در واقع ورودی و خروجی آن سیگنال هستند، سیستم گفته می شود. مثل: موتور خودرو، بلندگو و ...

۲. اعداد زیر را به فرم کارتزین $(\mathrm{x} + \mathrm{jy})$ بنویسید.(۱۰)

$$e^{j\frac{7\pi}{2}+2} \qquad\qquad 2e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)}$$

$$2e^{j\frac{\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\,j\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + j\sqrt{3}$$

$$e^{\left(j\frac{7\pi}{2}+2\right)} = e^2 \times e^{\left(j\frac{7\pi}{2}\right)} = e^2\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) + e^2\,j\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)$$

$$= e^2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + e^2\,j\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^2 \times (-j) = 0 - j\,e^2$$

۳. اعداد زیر را به فرم قطبی $(Ae^{j\omega}$ که $A \in \mathbb{Q}$ و $-\pi < \omega \leq \pi)$ ببرید و اندازه وفاز هر کدام را نیز حساب کنید.(۲۰)

$$j(1+j) \qquad\qquad (1+j)^4 \qquad\qquad 1+j$$

$$\frac{1+j}{1-j} \qquad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}j}{1+\sqrt{3}j}$$

$$\boxed{x + j\,y \;\rightarrow Ae^{j\omega} \;\; A = \sqrt{x^2 + y^2} \;\; \omega = \tan^{-1}(\frac{y}{x})}$$

$$1 + j \;\Rightarrow A = \sqrt{2} \;\; \omega = \tan^{-1}(1) = 1\frac{\pi}{4} \Rightarrow 1 + j = \sqrt{2}e^{j(\frac{\pi}{4})}$$

$(1+j)^4$

$$1 + j = \sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow (1+j)^4 = \left(\sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^4 = 4e^{j(\pi)} \Rightarrow$$

$A = 4 \;\; \omega = \pi$

$j(1+j)$

روش اول:

$$1 + j = \sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$j \;\Rightarrow A = 1 \;\; \omega = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right) = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow j = e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$j(1+j) = \left(e^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right) = \sqrt{2}e^{j\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \;\Rightarrow$$

$$A = \sqrt{2} \;\; \omega = \frac{3\pi}{4}$$

روش دوم:

$$j(1+j) = j - 1 = -1 + j \;\Rightarrow A = \sqrt{2} \;\; \omega = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = \tan^{-1}(-1)$$

$$= \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \; j(1+j) = \sqrt{2}e^{j\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$\frac{1+j}{1-j}$$

روش اول:

$$1 + j = \sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$1-j=\sqrt{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\frac{1+j}{1-j}=\frac{\left(\sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)}{\left(\sqrt{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)}=e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}\ \Rightarrow\ A=1\ \ \omega=\frac{\pi}{2}$$

روش دوم:

$$\frac{1+j}{1-j}=\frac{1+j}{1-j}\times\frac{1+j}{1+j}=\frac{(1+j)(1+j)}{(1-j)(1+j)}=\frac{1+2j-1}{1-j+j+1}=\frac{2j}{2}=j$$

$$\Rightarrow A=\ 1\ \ \omega=\ \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right)=\ \tan^{-1}(\infty)=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1+j}{1-j}=e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}j}{1+\sqrt{3}j}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}j\ \Rightarrow A=2\ \ \omega=\ \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=\ \tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\sqrt{2}+\sqrt{2}j=2e^{\frac{\pi}{4}}$$

$$1+\sqrt{3}j\ \Rightarrow A=2\ \ \omega=\ \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=\ \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow 1+\sqrt{3}j=2e^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}j}{1+\sqrt{3}j}=\frac{\left(2e^{\frac{\pi}{4}}\right)}{\left(2e^{\frac{\pi}{3}}\right)}=e^{j\left(-\frac{\pi}{12}\right)}\ \Rightarrow A=\ 1\ \ \omega=\ -\frac{\pi}{12}$$

۴. انرژی کل و توان متوسط کل را برای سیگنال های زیر محاسبه کنید.(۶۰ نمره)

$$P(t)\triangleq|x(t)|^2\qquad\qquad P[n]\ \triangleq\ |x[n]|^2$$

$$E_\infty\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}P(t)dt\qquad\qquad E_\infty\triangleq\sum_{n=-\infty}^{\infty}P[n]$$

$$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} P(t)dt \qquad\qquad P_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} P[n]$$

a. $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$

$$P[n] = \left|\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right|^2 = \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)^2$$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)^2 = \infty$$

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{\pi}{3}} \overset{k=1}{\Longrightarrow} N_0 = 6(\text{دوره تناوب})$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} P[n] = \lim_{N\to\frac{N_0}{2}} \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} P[n]$$

$$= \lim_{N\to 3} \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2\times 3}\sum_{n=-3}^{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)^2 = \frac{3}{2\times 3} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=-3}^{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)^2 = \sum_{n=-3}^{2} \left(\frac{1-\cos(2\times\frac{\pi}{3}n)}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=-3}^{2} \left(\frac{1}{2}\right) - \sum_{n=-3}^{2} \left(\frac{\cos(\frac{2\pi}{3}n)}{2}\right) = 3$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{3}} \overset{k=1}{\Longrightarrow} N_0 = 3(\text{دوره تناوب})$$

در محاسبه توان متوسط کل برای توابع متناوب می توان به جای این که حد را بر روی بی نهایت گرفت، بر روی دوره تناوب تابع گرفت.

حاصل انتگرال و مجموع بر روی دوره تناوب توابع مثلثاتی صفر است.

$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ .b

$$P[n] = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2|n|} = \left(\frac{1}{4}\right)^{|n|}$$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{|n|} = \left(\frac{1}{4}\right)^0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= 1 + 2 \times \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^1}{1 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} P[n] = \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{5}{3}}{2N+1} = 0$$

$x[n] = e^{-n}$ .c

$$P[n] = |e^{-n}|^2 = e^{-2n}$$

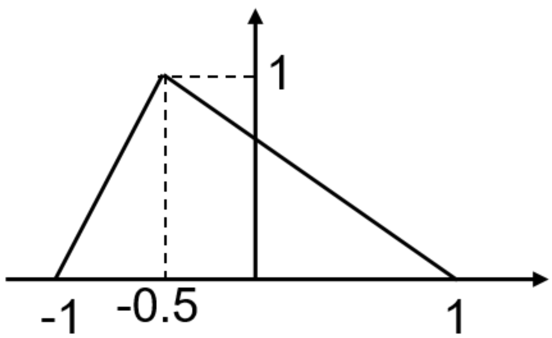
$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2n} = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} P[n] = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=-N}^{N} e^{-2n}}{2N+1}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{e^{2N} + \cdots + e^0 + \cdots + e^{-2N}}{2N+1} = \frac{\infty}{\infty} \xRightarrow{Hopital} P_\infty$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{2e^{2N} + \cdots + 0 + \cdots + (-2) \times e^{-2N}}{2} = \infty$$

۵. سیگنال $x(-\frac{t}{3} - 2)$ داده شده است. سیگنال $x(t)$ را رسم بفرمایید.(۱۵)

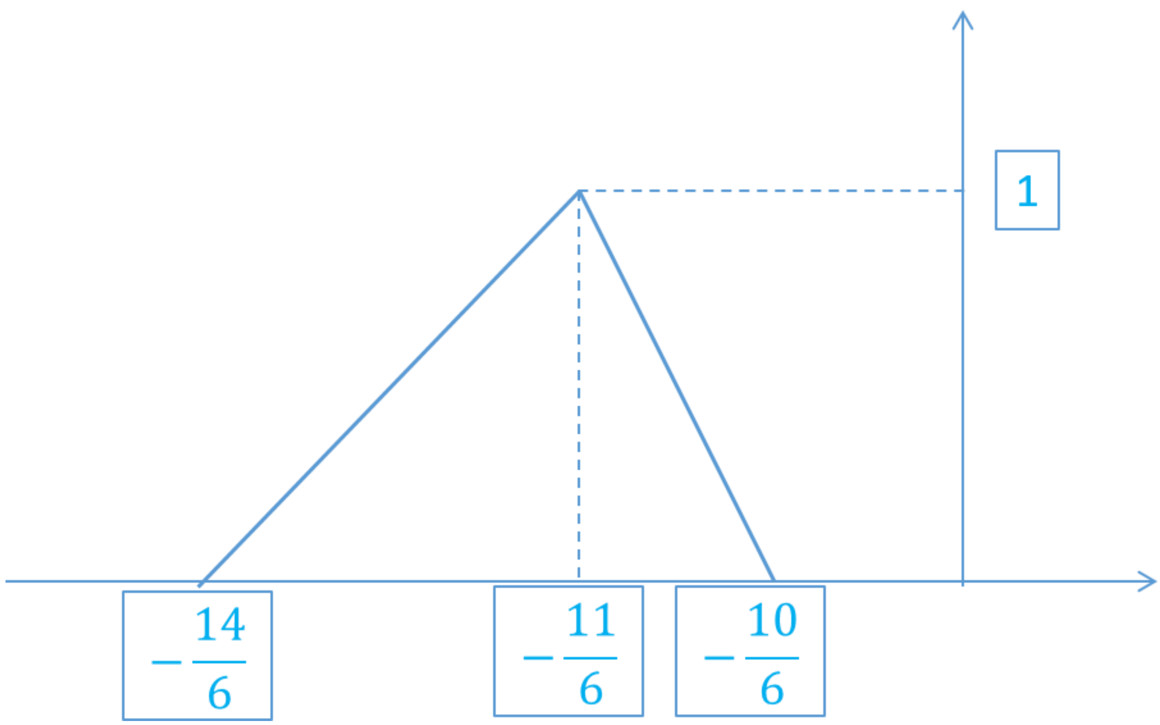


روش اول:

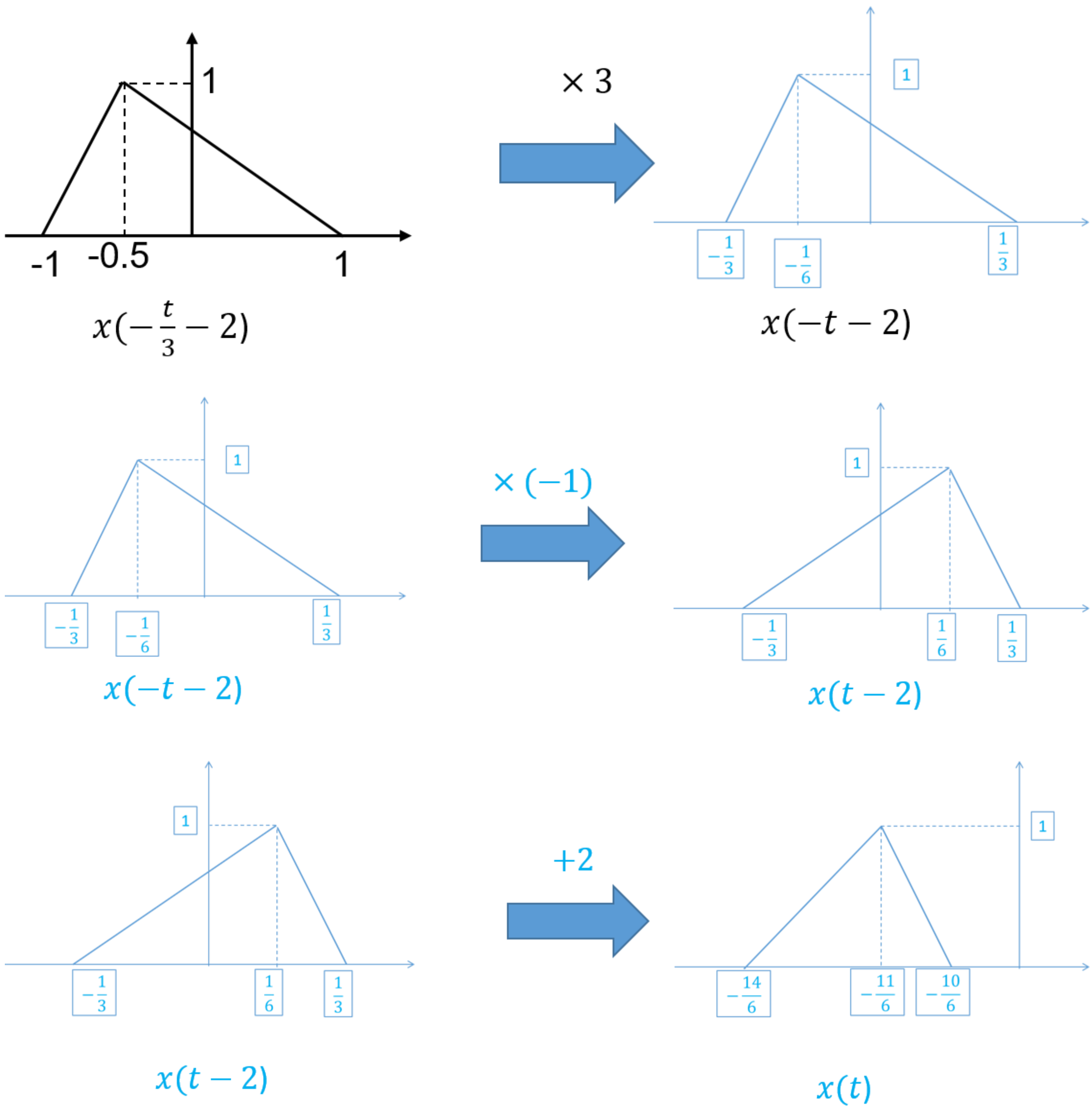
$$t = -1 \Rightarrow x\left(\frac{1}{3} - 2\right) = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{5}{3}\right) = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{10}{6}\right) = 0$$

$$t = -0.5 \Rightarrow x\left(\frac{1}{6} - 2\right) = 1 \Rightarrow x\left(-\frac{11}{6}\right) = 1$$

$$t = 1 \Rightarrow x\left(-\frac{1}{3} - 2\right) = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{7}{3}\right) = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{14}{6}\right) = 0$$

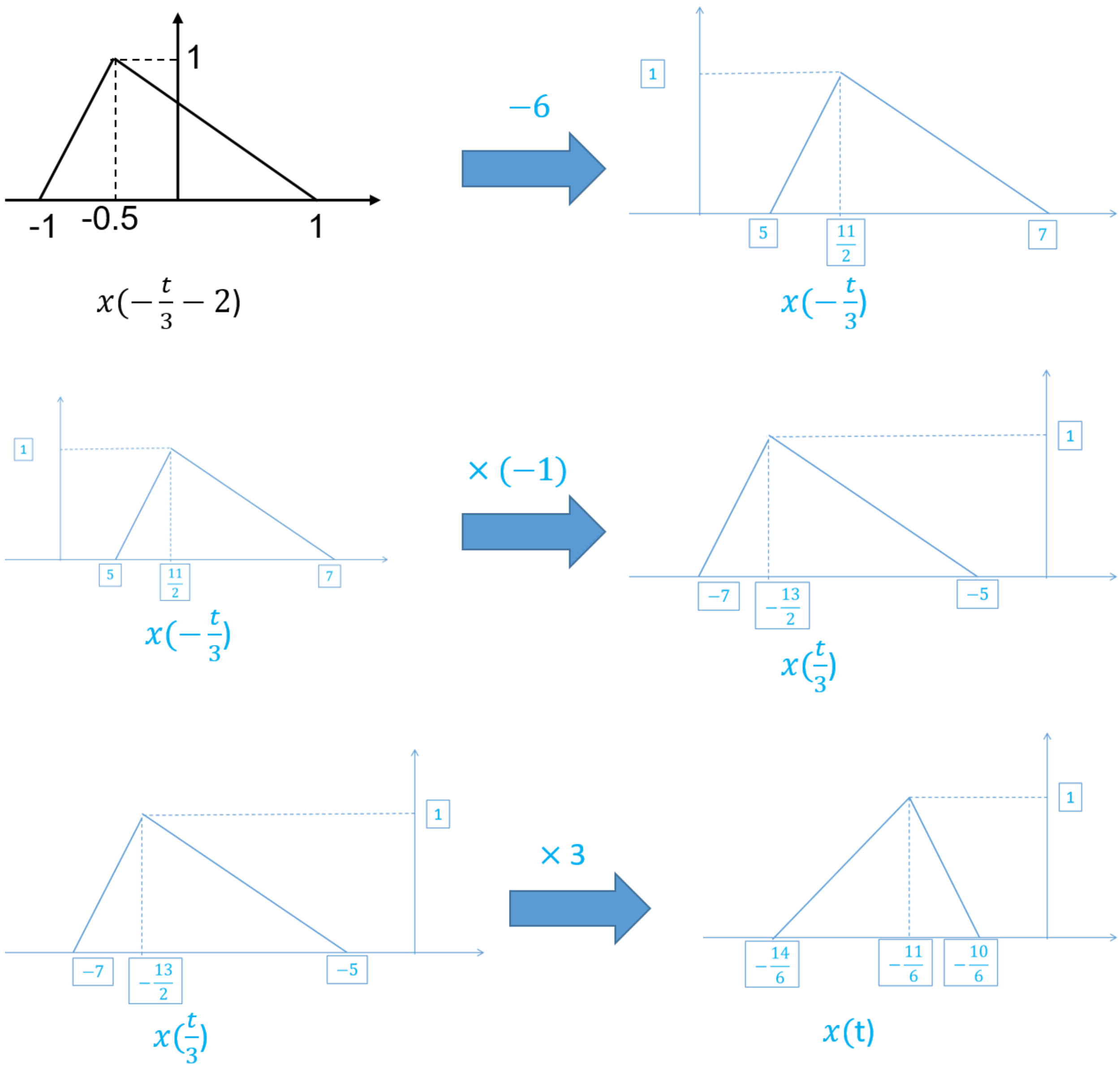


روش دوم:

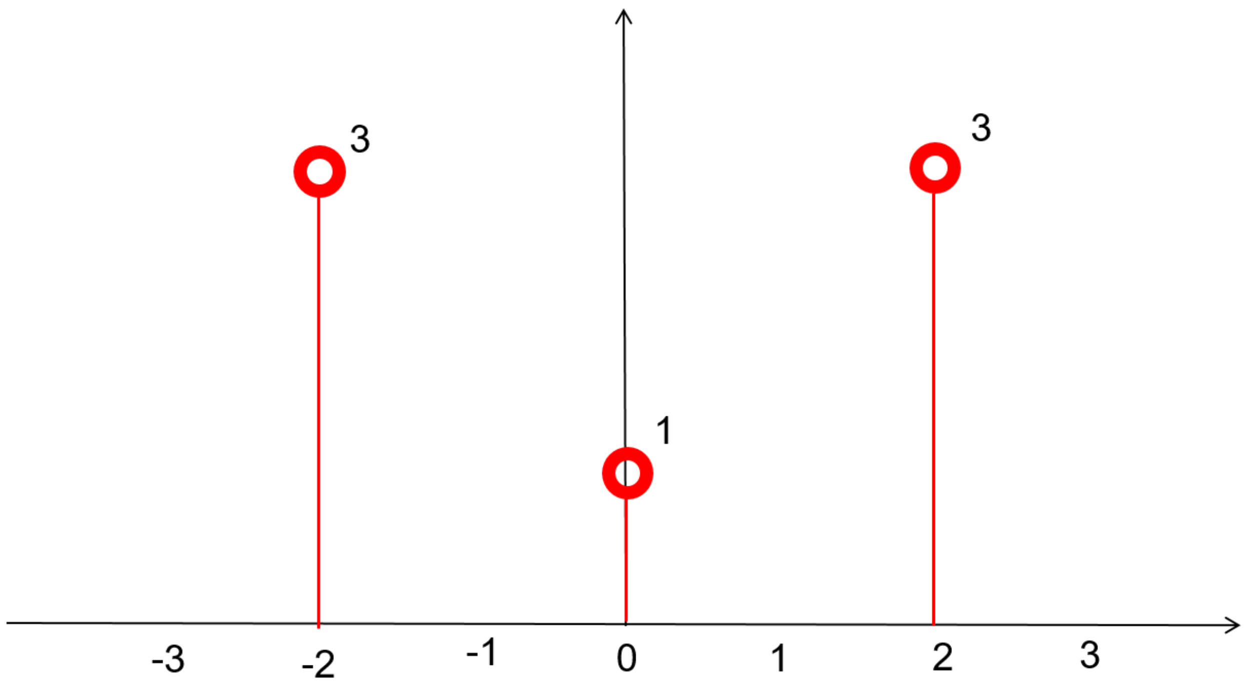


1
-1
-0.5
1
$x(-\frac{t}{3}-2)$
$\times 3$
1
$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$
$x(-t-2)$
1
$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$
$x(-t-2)$
$\times(-1)$
1
$-\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$
$x(t-2)$
1
$-\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$
$x(t-2)$
$+2$
1
$-\frac{14}{6}$
$-\frac{11}{6}$
$-\frac{10}{6}$
$x(t)$

روش سوم:

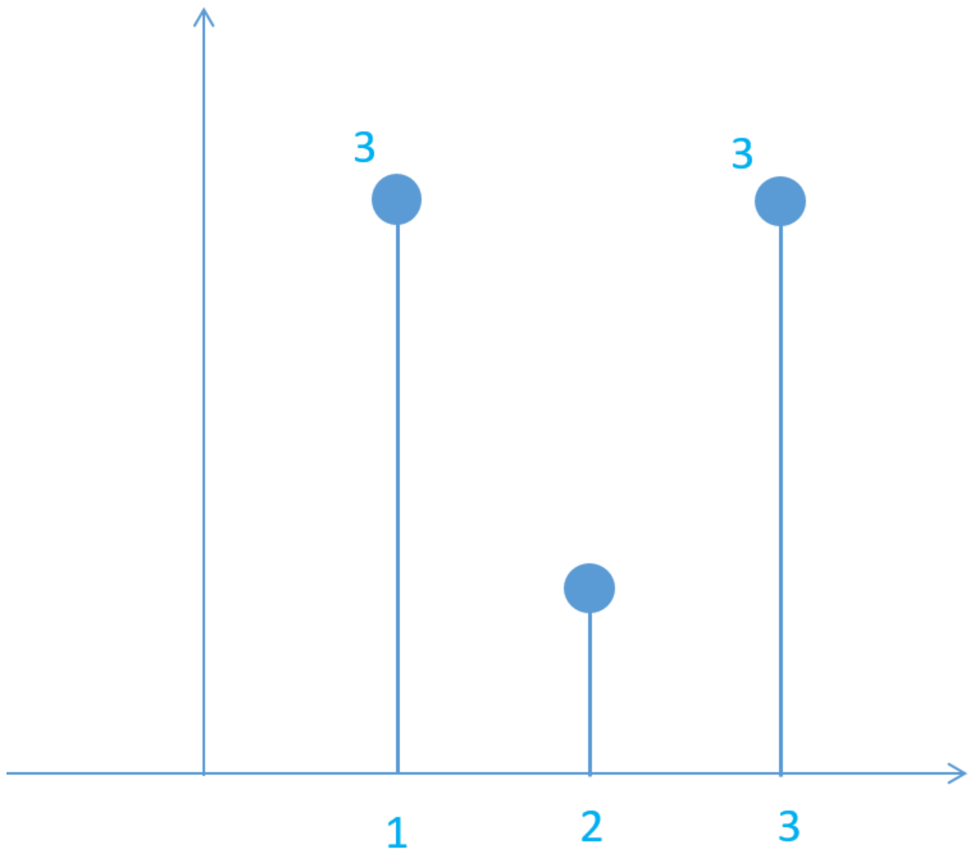


۶. سیگنال $x[n]$ در زیر داده شده است. سیگنال $x[2n-4]$ را رسم بفرمایید.(۱۵)

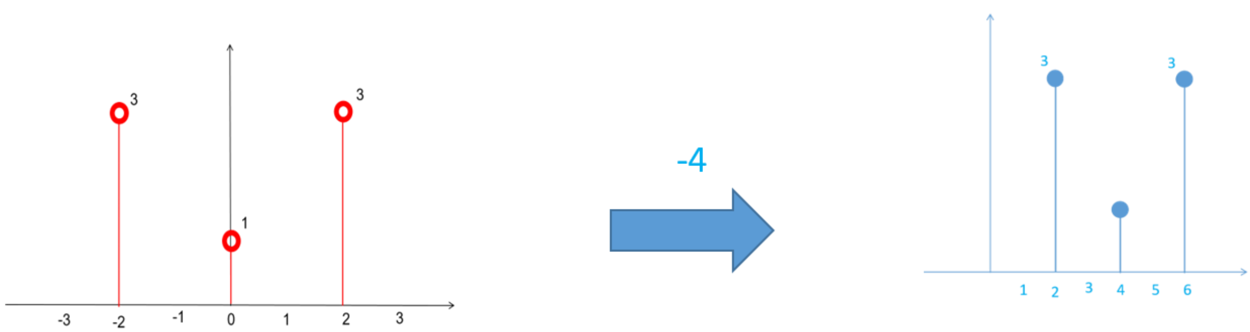


روش اول:

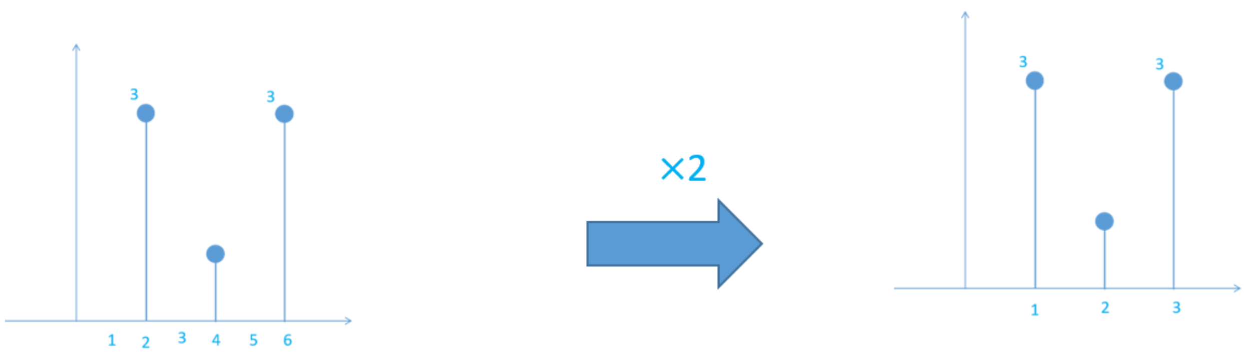
$$2n-4=\ -2\ \Rightarrow 2n=2\Rightarrow n=1\ \Rightarrow n=1:x[2n-4]=3$$
$$2n-4=\ 0\ \Rightarrow 2n=4\Rightarrow n=2\ \Rightarrow n=2:x[2n-4]=1$$
$$2n-4=\ 2\ \Rightarrow 2n=6\Rightarrow n=3\ \Rightarrow n=3:x[2n-4]=3$$



روش دوم:

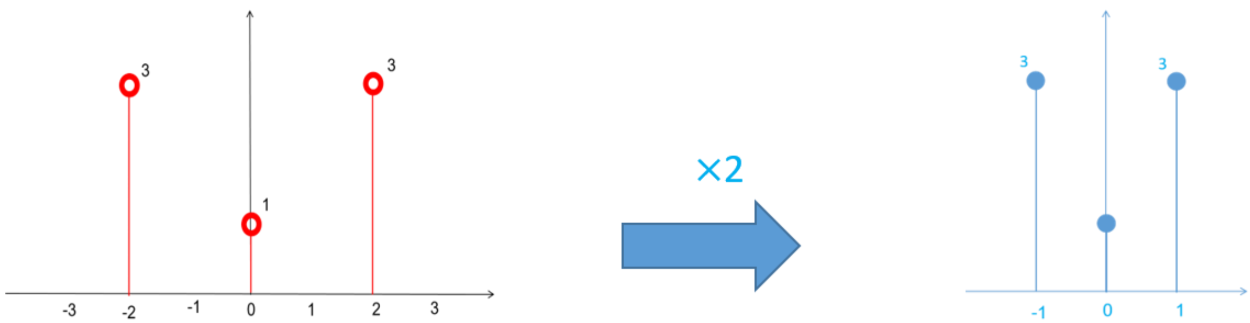


$x[n]$ $x[n-4]$

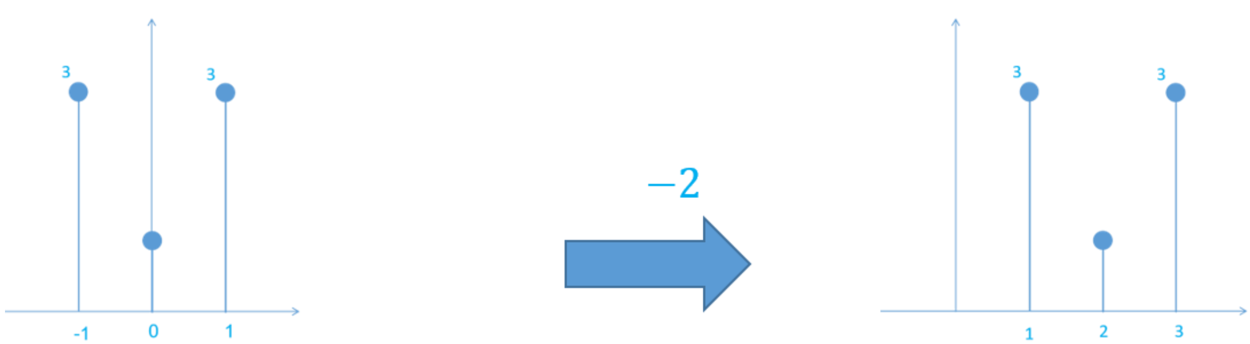


$x[n-4]$ $x[2n-4]$

روش سوم:



$x[n]$ $x[2n]$



$x[2n-4]$

$x[2n]$