بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه علم و صنعت ایران

زمستان ۱۳۹۸

سیگنال‌ها و سیستم‌ها — پاسخ تمرین سری سوم

۱. برای هر کدام از سیستم های زیر مشخص کنید که کدام یک از خواص حافظه، علیت، پایداری، خطی، تغییرناپذیری با زمان را دارند. همچنین برای هر مورد پاسخ ضربه را محاسبه کرده و داشتن خواص حافظه، علیت، پایداری را بررسی کنید(m یک عدد ثابت است)(۱۵).

شرط عدم نیاز به حافظه : $y[n] = f\{x[n]\}$

شرط پایداری : $|x[n]| < B_x < \infty \Rightarrow |y[n]| < B_y < \infty$

شرط علی بودن : $y[n]$ وابسته به n' های کوچکتر مساوی n

شرط خطی بودن :

$$f\{ax[n]\} = af\{x[n]\}, f\{x_1[n] + x_2[n]\} = f\{x_1[n]\} + f\{x_2[n]\}$$

شرط تغییر ناپذیر با زمان : $f\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$

سیستم lti :

شرط عدم نیاز به حافظه : $h[n] = k\delta[n]$

شرط پایداری زمان گسسته : $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

شرط پایداری زمان پیوسته : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$

شرط علی بودن : $n < 0 \; h[n] = 0$

a. $y[n] = x[n+1] - x[n]$

حافظه دارد $\Rightarrow y[n] \neq f\{x[n]\}$

چون $y[n]$ وابسته به n' های کوچکتر مساوی n نیست پس علی نیست.

$$|x[n]| < B_x < \infty \Rightarrow |x[n+1]| < B_x < \infty \Rightarrow |y[n]| = |x[n+1] - x[n]| < B_x = B_y < \infty \Rightarrow |y(t)| < B_y < \infty \Rightarrow$$ پایدار است

پاسخ سیستم به $x_1[n]$: $y_1[n] = x_1[n+1] - x_1[n]$

$$y'[n]=ax_1[n+1]-ax_1[n]=a(x_1[n+1]-x_1[n])$$
$= ay_1[n]$: پاسخ سیستم به $ax_1[n]$

$y_2[n]=x_2[n+1]-x_2[n]$: پاسخ سیستم به $x_2[n]$

$$y''[n]=(x_1[n+1]+x_2[n+1])-(x_1[n]+x_2[n])$$
$$=(x_2[n+1]-x_2[n])+(x_1[n+1]-x_1[n])$$
$= y_2[n]+y_1[n]$: پاسخ سیستم به $x_1[n]+x_2[n]$

پس سیستم خطی است.

$y[n-n_1]=x\ [n-n_1+1]-x\ [n-n_1]$: محاسبه $y[n-n_1]$

$y'[n]=x\ [n-n_1+1]-x\ [n-n_1]$: پاسخ سیستم به $x\ [n-n_1]$

$\Rightarrow y[n-n_1]=y'[n] \Rightarrow$ مستقل از زمان است $\Rightarrow$ lti است

$$\Rightarrow h[n]=\delta[n+1]-\delta[n]$$

$h[n]\neq k\delta[n] \Rightarrow$ حافظه دارد

$n<0\ h[n]\neq 0\ \Rightarrow$ علی نیست

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|=2<\infty \Rightarrow$ پایدار است

توجه داشته باشید که چون سیستم LTI بود پس می توان به خواص آن با به‌دست آوردن پاسخ ضربه رسید.

b. $y[n]=x[n]u(n+5)$

$y[n]=f\{x[n]\}\ \Rightarrow$ حافظه ندارد

چون $y[n]$ وابسته به n' های کوچکتر مساوی n است پس علی است.

$$|x[n]|<\ B_x<\infty \Rightarrow |u(n+5)|<B_{x'}=1<\infty\ \Rightarrow |y[n]|$$
$$=|x[n]u(n+5)|<B_xB_{x'}=B_x=\ B_y<\infty\ \Rightarrow |y[n]|$$
$<B_y<\infty \Rightarrow$ پایدار است

$y_1[n]=x_1[n]u(n+5)$: پاسخ سیستم به $x_1[n]$

$y'[n]=ax_1[n]u(n+5)=ay_1[n]$: پاسخ سیستم به $ax_1[n]$

$y_2[n]=x_2[n]u(n+5)$: پاسخ سیستم به $x_2[n]$

$$y''[n]=(x_1[n]+x_2[n])u(n+5)=x_1[n]u(n+5)+x_2[n]u(n+5)$$
$= y_1[n]+y_2[n]$: پاسخ سیستم به $x_1[n]+x_2[n]$

پس سیستم خطی است.

محاسبه $y(t-t_1)$: $y[n-n_1] = x[n-n_1]u(n-n_1+5)$

پاسخ سیستم به $x[n-n_1]$: $y'[n] = x[n-n_1]u(n+5)$

$\Rightarrow y[n-n_1] \neq y'[n] \Rightarrow$ مستقل از زمان نیست $\Rightarrow$ lti نیست

$$\Rightarrow h[n] = \delta[n]u(n+5)$$

$h[n] = k\delta[n] \Rightarrow$ حافظه ندارد

$n < 0\ h[n] = 0 \ \Rightarrow$ علی است

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = 1 < \infty \Rightarrow$ پایدار است

توجه داشته باشید که چون سیستم LTI نبود پس نمی توان به خواص آن با بدست آوردن پاسخ ضربه رسید البته در این حالت خواص کلی را صحیح بدست آورد ولی همیشه چنین نیست.

c. $y[n] = \sum_{k=m}^{n} x[k]$

$y[n] \neq f\{x[n]\} \Rightarrow$ حافظه دارد

چون $y[n]$ وابسته به n' های کوچکتر مساوی n است پس علی است.

چون سیستم مجموع تعداد محدودی مقدار است پس $|y[n]|$ کوچکتر از بی نهایت است و سیستم پایدار است.

پاسخ سیستم به $x_1[n]$: $y_1[n] = \sum_{k=m}^{n} x_1[k]$

پاسخ سیستم به $ax_1[n]$: $y'[n] = \sum_{k=m}^{n} ax_1[k] = a\sum_{k=m}^{n} x_1[k] = ay_1[n]$

پاسخ سیستم به $x_2[n]$: $y_2[n] = \sum_{k=m}^{n} x_2[k]$

$$y''[n] = \sum_{k=m}^{n} (x_1[k] + x_2[k]) = \sum_{k=m}^{n} x_1[k] + \sum_{k=m}^{n} x_2[k]$$

پاسخ سیستم به $x_1[n] + x_2[n]$: $= y_1[n] + y_2[n]$

پس سیستم خطی است.

محاسبه $y[n-n_1]$: $y[n-n_1] = \sum_{k=m}^{n-n_1} x[k]$

$$y'[n]=\sum_{k=m}^{n}x[k-n_1]\xrightarrow{l=k-n_1}y'[n]$$

$$=\sum_{l=m-n_1}^{n-n_1}x[m]:x\quad[n-n_1]$$ پاسخ سیستم به

$\Rightarrow y[n-n_1]\neq y'[n]\Rightarrow$ مستقل از زمان نیست $\Rightarrow$ نیست lti

$$\Rightarrow h[n]=\sum\nolimits_{k=m}^{n}\delta[k]$$

$h[n]\neq k\delta[n]\Rightarrow$ حافظه دارد

$n<0\ h[n]=0\quad\Rightarrow$ علی است

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|=1<\ \infty\Rightarrow$ پایدار است

توجه داشته باشید که چون سیستم LTI نبود پس نمی توان به خواص آن با بدست آوردن پاسخ ضربه رسید البته در این حالت خواص کلی را صحیح بدست آورد ولی همیشه چنین نیست.

۲. کانولوشن سیگنال های زیر را به صورت دستی محاسبه کنید(در کنار استفاده از فرمول، اعمال کانولوشن با استفاده از نمودارهای دو سیگنال را برای موارد b، c و d نیز انجام دهید)(۲۵).

$$x[n]*h[n]=\sum\nolimits_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$
$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

a. $x[n]=u[n],h[n]=a^nu[n](0<a<1)$

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]=\sum\nolimits_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

$$=\sum\nolimits_{k=-\infty}^{\infty}a^ku[k]u[n-k]\xrightarrow{k<0,u[k]=0}h[n]*x[n]$$

$$=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}a^ku[n-k]\xrightarrow{k>n,u[n-k]=0\Rightarrow n<0,h[n]*x[n]=0}h[n]*x[n]$$

$$=\begin{cases}0 & n<0\\ \sum\nolimits_{k=0}^{n}a^k & n\geq 0\end{cases}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]$$

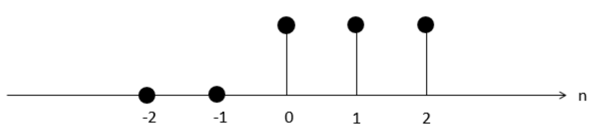
b. $x[n]=u[n]-u[n-3],h[n]=u[n]-u[n-2]$

$$x[n]*h[n]=\sum\nolimits_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

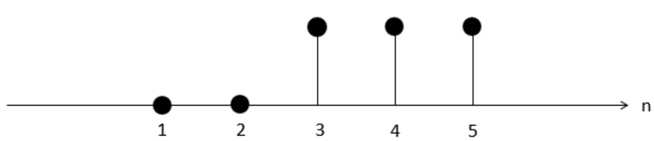
$$=\sum\nolimits_{k=-\infty}^{\infty}(u[k]-u[k-3])(u[n-k]-u[n-k-2])$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]u[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]u[n-k-2] \\
&\qquad - \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k-3]u[n-k] \\
&\qquad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k-3]u[n-k-2] \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{\infty} u[n-k] - \sum_{k=0}^{\infty} u[n-k-2] \\
&\qquad - \sum_{k=3}^{\infty} u[n-k] + \sum_{k=3}^{\infty} u[n-k-2] \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{2} u[n-k] - \sum_{k=0}^{2} u[n-k-2] \\
&\qquad = u[n] + u[n-1] + u[n-2] - u[n-2] - u[n-3] \\
&\qquad - u[n-4] = u[n] + u[n-1] - u[n-3] - u[n-4] \\
&\qquad = \begin{cases} 0 & n < 0, n > 3 \\ n+1 & 0 \le n \le 1 \\ -n+4 & 2 \le n \le 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

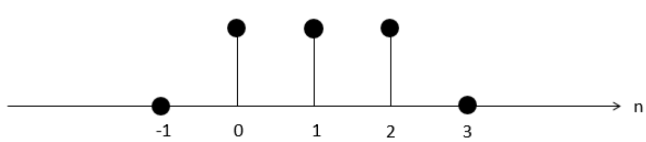
u[n]



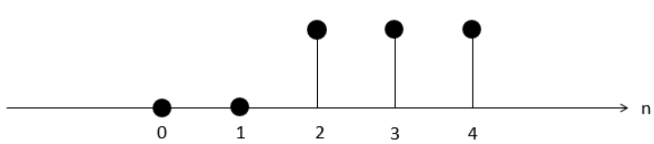
u[n-3]



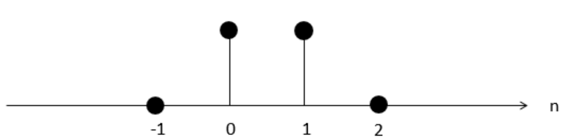
x[n]



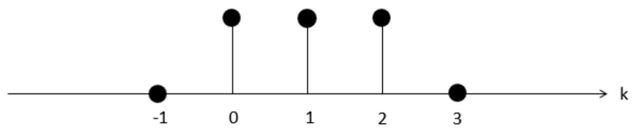
u[n-2]



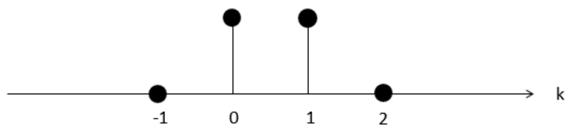
h[n]



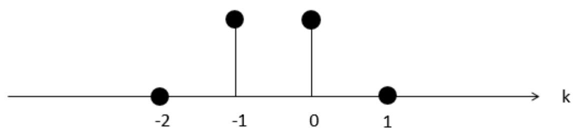
x[k]



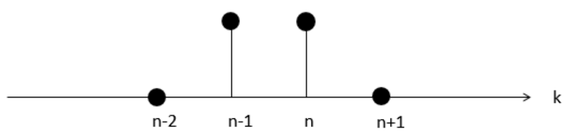
h[k]



h[-k]



h[n-k]



$$n < 0: x[n] * h[n] = 0$$
$$n = 0: x[n] * h[n] = 1$$
$$n = 1: x[n] * h[n] = 2$$
$$n = 2: x[n] * h[n] = 2$$
$$n = 3: x[n] * h[n] = 1$$
$$n > 3: x[n] * h[n] = 0$$

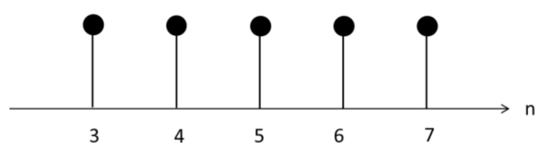
$$\Rightarrow x[n] * h[n] = \begin{cases} 0 & n < 0, n > 3 \\ n + 1 & 0 \le n \le 1 \\ -n + 4 & 2 \le n \le 3 \end{cases}$$

$x[n] = u[n-5] - 2u[n], h[n] = u[n-3] - u[n+1]$ .c

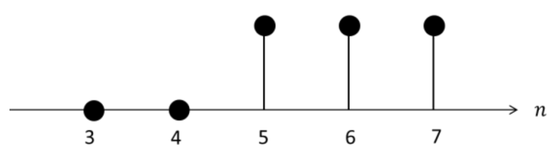
$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u[k-5] - 2u[k])(u[n-k-3]$$
$$- u[n-k+1])$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k-5]u[n-k-3] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k-5]u[n-k+1]$$
$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2u[k]u[n-k-3]$$
$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2u[k]u[n-k+1]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=5}^{\infty} u[n-k-3] - \sum_{k=5}^{\infty} u[n-k+1] \\
&\quad - 2\sum_{k=0}^{\infty} u[n-k-3] + 2\sum_{k=0}^{\infty} u[n-k+1] \\
&\quad = 2\sum_{k=0}^{4} u[n-k+1] - 2\sum_{k=0}^{4} u[n-k-3] \\
&\quad + \sum_{k=5}^{\infty} u[n-k+1] - \sum_{k=5}^{\infty} u[n-k-3] \\
&\quad = 2u[n+1] + 2u[n] + 2u[n-1] + 2u[n-2] \\
&\quad + 2u[n-3] - 2u[n-3] - 2u[n-4] - 2u[n-5] \\
&\quad - 2u[n-6] - 2u[n-7] + u[n-4] + u[n-5] \\
&\quad + u[n-6] + u[n-7] + u[n-8] + u[n-9] + \cdots \\
&\quad - u[n-8] - u[n-9] - u[n-10] - u[n-11] - \cdots \\
&\quad = 2u[n+1] + 2u[n] + 2u[n-1] + 2u[n-2] \\
&\quad - u[n-4] - u[n-5] - u[n-6] - u[n-7] \\
&\quad = \begin{cases} 0 & n < -1 \\ 2n+4 & -1 \le n \le 2 \\ 8 & 2 \le n \le 3 \\ -n+11 & 3 \le n \le 7 \\ 4 & 7 \le n \end{cases}
\end{aligned}
$$

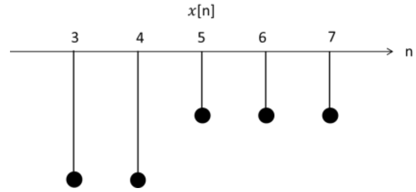
$u[n]$



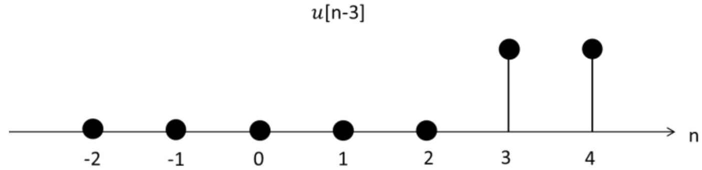
$u[n-5]$



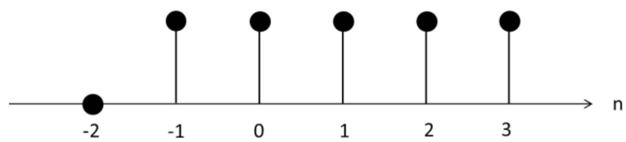
$x[n]$



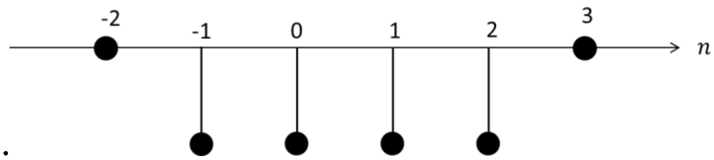
u[n-3]



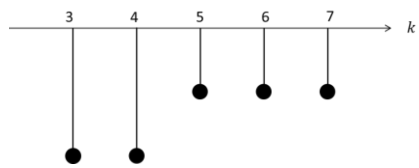
$u[n+1]$



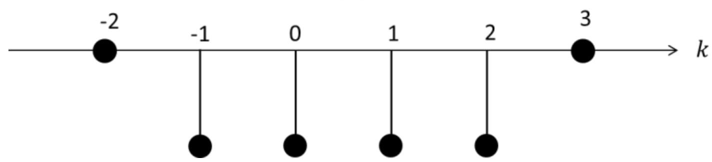
$h[n]$



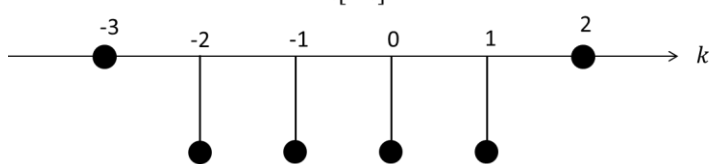
$x[k]$



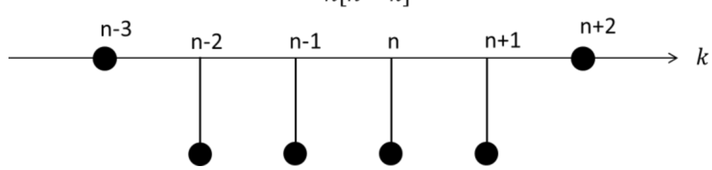
$h[k]$



$h[-k]$



$h[n-k]$



$$n < -1: x[n] * h[n] = 0$$
$$n = -1: x[n] * h[n] = 2$$
$$n = 0: x[n] * h[n] = 4$$
$$n = 1: x[n] * h[n] = 6$$
$$n = 2: x[n] * h[n] = 8$$
$$n = 3: x[n] * h[n] = 8$$
$$n = 4: x[n] * h[n] = 7$$
$$n = 5: x[n] * h[n] = 6$$
$$n = 6: x[n] * h[n] = 5$$
$$n = 7: x[n] * h[n] = 4$$
$$n > 7: x[n] * h[n] = 4$$

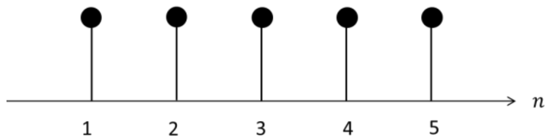
$$\Rightarrow x[n]*h[n]=\begin{cases}0 & n<-1\\ 2n+4 & -1\le n\le 2\\ 8 & 2\le n\le 3\\ -n+11 & 3\le n\le 7\\ 4 & 7\le n\end{cases}$$

$x[n]=u[n-3]-2u[n+2], h[n]=u[n-3]-u[n+1]$ .d

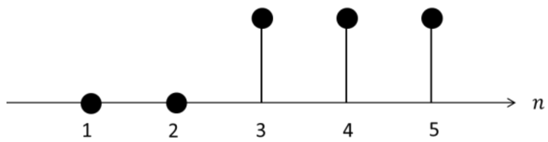
$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(u[k-3]-2u[k+2])(u[n-k-3]$$
$$-u[n-k+1])$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u[k-3]u[n-k-3]$$
$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty}u[k-3]u[n-k+1]$$
$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty}2u[k+2]u[n-k-3]$$
$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty}2u[k+2]u[n-k+1]$$
$$=\sum_{k=3}^{\infty}u[n-k-3]-\sum_{k=3}^{\infty}u[n-k+1]$$
$$-2\sum_{k=-2}^{\infty}u[n-k-3]+2\sum_{k=-2}^{\infty}u[n-k+1]$$
$$=2\sum_{k=-2}^{2}u[n-k+1]-2\sum_{k=-2}^{2}u[n-k-3]$$
$$+\sum_{k=3}^{\infty}u[n-k+1]-\sum_{k=3}^{\infty}u[n-k-3]$$

$$=2u[n+3]+2u[n+2]+2u[n+1]+2u[n]+2u[n-1]$$
$$-2u[n-1]-2u[n-2]-2u[n-3]-2u[n-4]$$
$$-2u[n-5]+u[n-2]+u[n-3]+u[n-4]$$
$$+u[n-5]+u[n-6]+u[n-7]+\cdots-u[n-6]$$
$$-u[n-7]-u[n-8]-u[n-9]-\cdots$$
$$=2u[n+3]+2u[n+2]+2u[n+1]+2u[n]$$
$$-u[n-2]-u[n-3]-u[n-4]-u[n-5]$$
$$=\begin{cases}0 & n<-3\\ 2n+8 & -3\le n\le 0\\ 8 & 0\le n\le 1\\ -n+9 & 1\le n\le 5\\ 4 & 5\le n\end{cases}$$

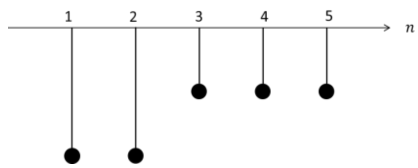
$u[n+2]$



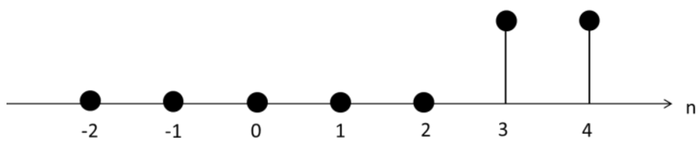
$u[n-3]$



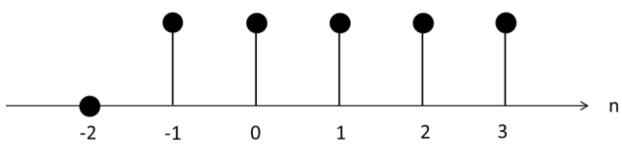
$x[n]$



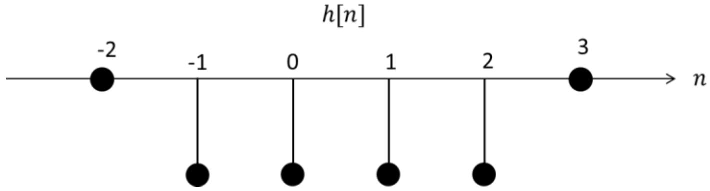
u[n-3]



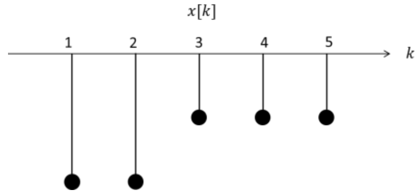
u[n+1]



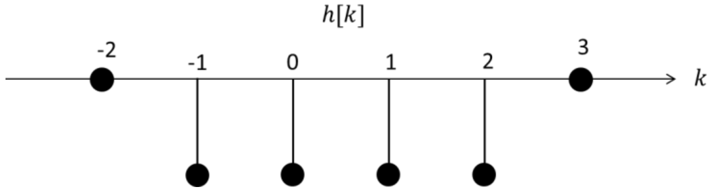
$h[n]$



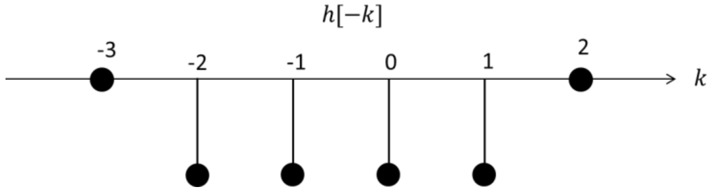
$x[k]$

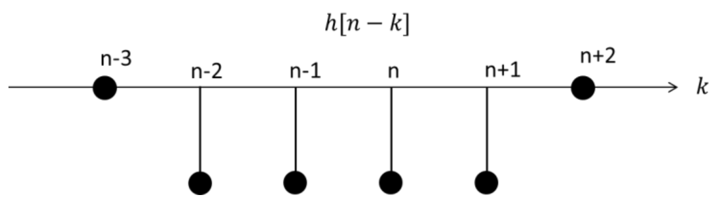


$h[k]$



$h[-k]$





$$n < -3: x[n] * h[n] = 0$$
$$n = -3: x[n] * h[n] = 2$$
$$n = -2: x[n] * h[n] = 4$$
$$n = -1: x[n] * h[n] = 6$$
$$n = 0: x[n] * h[n] = 8$$
$$n = 1: x[n] * h[n] = 8$$
$$n = 2: x[n] * h[n] = 7$$
$$n = 3: x[n] * h[n] = 6$$
$$n = 4: x[n] * h[n] = 5$$
$$n = 5: x[n] * h[n] = 4$$
$$n > 5: x[n] * h[n] = 4$$

$$\Rightarrow x[n] * h[n] = \begin{cases} 0 & n < -3 \\ 2n + 8 & -3 \le n \le 0 \\ 8 & 0 \le n \le 1 \\ -n + 9 & 1 \le n \le 5 \\ 4 & 5 \le n \end{cases}$$

آیا میان پاسخ‌های دو قسمت c و d رابطه‌ای وجود دارد؟

$$y_c[n] = x_c[n] * h_c[n]$$
$$y_d[n] = x_d[n] * h_d[n]$$
$$h_c[n] = h_d[n]$$
$$x_c[n] = x_d[n-2]$$
$$y_c[n] = y_d[n-2]$$

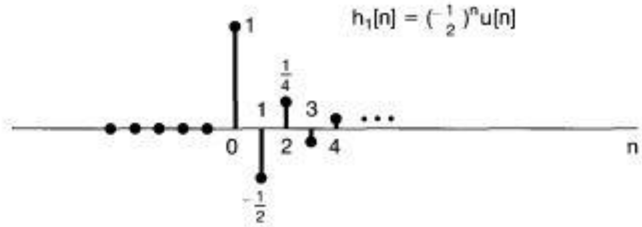
$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow y(t - t_0) = x(t - t_0) * h(t) = x(t) * h(t - t_0)$$
$$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow y[n - n_0] = x[n - n_0] * h[n] = x[n] * h[n - n_0]$$

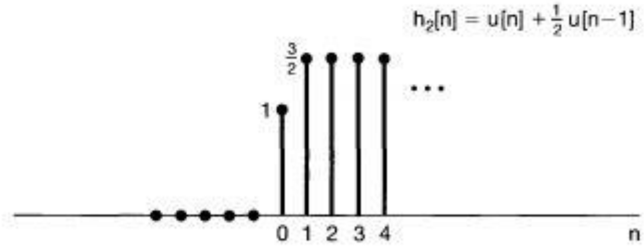
۳. تابعی در محیط برنامه‌نویسی بنویسید که دو سیگنال ورودی زمان گسسته را بگیرد و کانولوشن آن‌ها را بدون استفاده از توابع آماده محاسبه کند و سیگنال‌های ورودی و نتیجه را رسم کند و به کمک آن جواب‌های سوال قبل (برای $-50 < n < 50$) را آزمایش کرده و نتایج را ضمیمه کنید. (حتما ارتباط بین درایه های آرایه‌ی نتیجه با درایه‌های آرایه ورودی را مشخص کنید)(۲۰).

برای این سوال کد q3 زده شده است و نتایج نیز با نام‌های q3a، q3b، q3c و q3d در کنار کد قرار دارد.

توجه داشته‌باشید که اندیس منفی نداریم و اندیس آرایه در کد از صفر شروع می‌شود ولی در واقع مقدار درون اندیس صفر آرایه مقدار اندیس ۵۰- آن است.

۴. دو سیستم LTI با پاسخ ضربه‌های $h_1[n]$ و $h_2[n]$ را که در شکل زیر نمایش داده شده‌اند، درنظر بگیرید. از این دو سیستم به دو صورت که در قسمت‌های a و b توضیح داده شده است، استفاده می‌کنیم(با فرض این‌که $x[n] = u[n]$ باشد)(۳۰).





a. $y[n]$ را حساب کنید به طوری‌که $w[n] = x[n] * h_1[n]$ و $y[n] = w[n] * h_2[n]$.

$$w[n] = x[n] * h_1[n] = h_1[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k u[k]u[n-k] \xRightarrow{k<0, u[k]=0} w[n]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k u[n-k] \xRightarrow{k>n, u[n-k]=0 \Rightarrow n<0, w[n]=0} w[n]$$

$$= \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k & n \geq 0 \end{cases} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} u[n]$$

$$y[n]=w[n]*h_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}w[k]h_2[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}u[k]\left(u[n-k]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}u[n-k-1]\right)\xrightarrow{k<0,u[k]=0}y[n]$$

$$=\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)\left(u[n-k]+\frac{1}{2}u[n-k-1]\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left[\sum_{k=0}^{\infty}u[n-k]+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}u[n-k-1]-\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}u[n-k]\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}u[n-k-1]\right]$$

$$\xRightarrow{k>n,u[n-k]=0\Rightarrow n<0,u[n-k]=0}\sum_{k=0}^{\infty}u[n-k]=\begin{cases}0 & n<0\\ \sum_{k=0}^{n}1 & n\geq 0\end{cases}$$

$$=(n+1)u[n]$$

$$\xRightarrow{k>n-1,u[n-k-1]=0\Rightarrow n<1,u[n-k-1]=0}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}u[n-k-1]$$

$$=\begin{cases}0 & n<1\\ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}1 & n\geq 1\end{cases}=\frac{n}{2}u[n-1]$$

$$\xRightarrow{k>n,u[n-k]=0\Rightarrow n<0,u[n-k]=0}-\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}u[n-k]$$

$$=\begin{cases}0 & n<0\\ -\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} & n\geq 0\end{cases}=-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}u[n]$$

$$\xrightarrow{k>n-1,u[n-k-1]=0\Rightarrow n<1,u[n-k-1]=0} -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} u[n-k-1]$$

$$= \begin{cases} 0 & n<1 \\ -(\frac{1}{2})\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} & n\geq 1 \end{cases}$$

$$= -(\frac{1}{2})\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}u[n-1] \Rightarrow y[n]$$

$$= \frac{2}{3}\left[(n+1)u[n]+\frac{n}{2}u[n-1]-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}u[n]\right.$$

$$\left.-(\frac{1}{2})\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}u[n-1]\right]$$

$$= \left(\frac{2n}{3}+\frac{8}{9}+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right)u[n]+\left(\frac{n}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right)u[n-1]$$

b. $y[n]$ را حساب کنید به طوری‌که $g[n] = x[n] * h_2[n]$ و $y[n] = g[n] * h_1[n]$.

$$g[n] = x[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_2[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\left(u[n-k] + \frac{1}{2}u[n-k-1]\right) \xrightarrow{k<0,u[k]=0} g[n]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} u[n-k] + \frac{1}{2}u[n-k-1]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} u[n-k] + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} u[n-k-1]$$

$$\xrightarrow{k>n,u[n-k]=0\Rightarrow n<0,u[n-k]=0} \sum_{k=0}^{\infty} u[n-k] = \begin{cases} 0 & n<0 \\ \sum_{k=0}^{n} 1 & n\geq 0 \end{cases}$$

$$= (n+1)u[n]$$

$$\xRightarrow{k>n-1,u[n-k-1]=0 \Rightarrow n<1,u[n-k-1]=0} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} u[n-k-1]$$

$$= \begin{cases} 0 & n<1 \\ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} 1 & n \geq 1 \end{cases} = \frac{n}{2}u[n-1]$$

$$\Rightarrow g[n] = (n+1)u[n] + \frac{n}{2}u[n-1]$$

$$y[n] = g[n] * h_1[n] = h_1[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]g[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k u[k]\left((n-k+1)u[n-k]\right.$$

$$\left. + \frac{n-k}{2}u[n-k-1]\right) \xRightarrow{k<0,u[k]=0} y[n]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (n-k+1)u[n-k]$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{n-k}{2}\right)u[n-k-1]$$

$$\xRightarrow{k>n,u[n-k]=0 \Rightarrow n<0,u[n-k]=0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (n-k+1)u[n-k]$$

$$= \begin{cases} 0 & n<0 \\ \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (n-k+1) & n \geq 0 \end{cases}$$

$$= u[n]\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (n-k+1)$$

$$\xRightarrow{k>n-1,u[n-k-1]=0 \Rightarrow n<1,u[n-k-1]=0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{n-k}{2}\right)u[n-k-1]$$

$$= \begin{cases} 0 & n<1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{n-k}{2}\right) & n \geq 1 \end{cases}$$

$$= u[n-1]\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{n-k}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y[n] = u[n]\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (n-k+1)$$

$$+ u[n-1]\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{n-k}{2}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}(n-k+1)$$

$$=\sum_{k=0}^{n} n\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}-\sum_{k=0}^{n} k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}+\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$$

$$=n\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}-(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+1\right)}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^{2}}+\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{2n}{3}+\frac{8}{9}+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{n-k}{2}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{n}{2}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{n}{2}\right)\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}-\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\times\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left((n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}-(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1\right)}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^{2}}$$

$$=\frac{n}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\Rightarrow y[n]=\left(\frac{2n}{3}+\frac{8}{9}+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right)u[n]+\left(\frac{n}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right)u[n-1]$$

$$\text{حاصل سری توانی پایدار}=\frac{\left(\text{جمله آخر}\right)-\left(\text{جمله‌ی بعد از جمله آخر}\right)}{1-\left(\text{قدر نسبت}\right)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^{n}=\begin{cases}N, & \alpha=1\\ \dfrac{1-\alpha^{N}}{1-\alpha}, & \alpha\neq 1\end{cases}$$

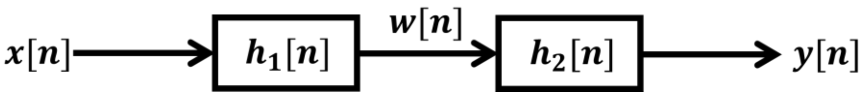
$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n}=\frac{1}{1-\alpha},|\alpha|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^{n}=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^{2}},|\alpha|<1$$

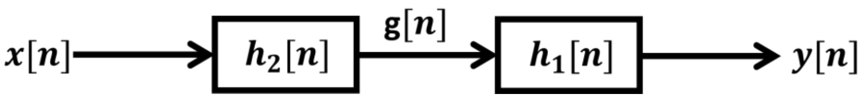
$$\sum_{n=0}^{N} n\alpha^{n} = \frac{\alpha(N\alpha^{N+1} - (N+1)\alpha^{N} + 1)}{(1-\alpha)^{2}}, |\alpha| < 1$$

c. بلوک دیاگرام قسمت های a و b را رسم کنید.

قسمت a



قسمت b



d. آیا جواب a و b برابر شد؟ چرا؟

بله، چون دو سیستم خطی بودند پس جابه‌جایی اعمال آن‌ها بر سیگنال ورودی تفاوتی بر روی سیگنال خروجی اعمال نمی‌کرد. در واقع چون دو سیستم LTI بودند، برای محاسبه پاسخ سیستم به ورودی نیاز به کانوالو ورودی با پاسخ ضربه سیستم‌ها داشتیم که چون کانولوشن دارای خاصیت شرکت‌پذیری است این نتایج رخ می‌دهد.

$$\big(x(t) * h_1(t)\big) * h_2(t) = x(t) * \big(h_1(t) * h_2(t)\big)$$
$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$
$$\big(x(t) * h_1(t)\big) * h_2(t) = x(t) * \big(h_1(t) * h_2(t)\big) = x(t) * \big(h_2(t) * h_1(t)\big) = \big(x(t) * h_2(t)\big) * h_1(t)$$
$$\Rightarrow \big(x(t) * h_1(t)\big) * h_2(t) = \big(x(t) * h_2(t)\big) * h_1(t)$$
$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n]$$
$$\Rightarrow (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n]$$

۵. یک سیستم با شرایط زیر پیاده‌سازی کرده‌ایم(درایه صفرم را معادل $n = 0$ درنظر بگیرید)(۳۰).

```
import scipy as sc
import numpy as np
y1 = sc.convolve(np.ones(5), x)
y2 = sc.convolve([1, -1, -1, -1, 1], x)
y = sc.convolve(np.ones(3), y1+y2)
```

a. پاسخ ضربه‌ی سیستم(h) را طوری حساب کنید که `y=sc.convolve(h,x)`.

$$y_1[n] = x[n] * h_1[n]$$

$$h_1[n] = u[n] - u[n-5]$$

$$y_2[n] = x[n] * h_2[n]$$

$$h_2[n] = (u[n] - u[n-5]) - 2(u[n-1] - u[n-4])$$

$$y[n] = (y_1[n] + y_2[n]) * h_3[n]$$

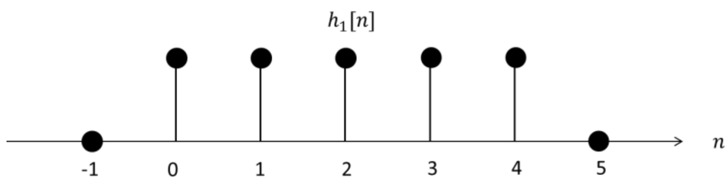
$$h_3[n] = u[n] - u[n-3]$$

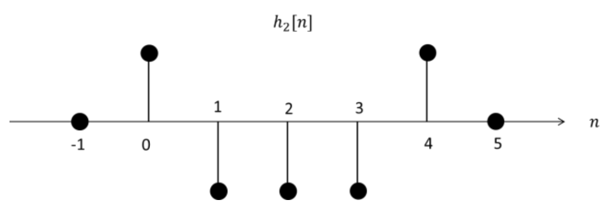
$$\Rightarrow y[n] = (x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]) * h_3[n]$$

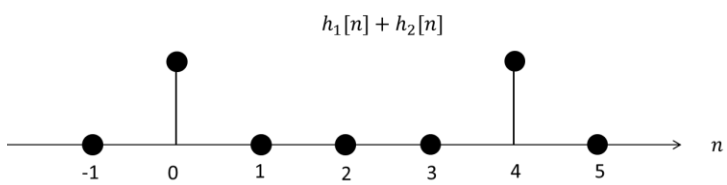
$$\Rightarrow y[n] = \big(x[n] * (h_1[n] + h_2[n])\big) * h_3[n]$$

$$\Rightarrow y[n] = x[n] * \big((h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n]\big)$$

$$\xrightarrow{y[n]=x[n]*h[n]} h[n] = (h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n]$$







$$\begin{aligned}
\Rightarrow h[n] &= (2\delta[n] - 2\delta[n-4]) * (u[n] - u[n-3]) \\
&= 2\big((\delta[n] - \delta[n-4]) * (u[n] - u[n-3])\big) \\
&= 2(\delta[n] * u[n] - \delta[n] * u[n-3] - \delta[n-4] * u[n] \\
&\quad + \delta[n-4] * u[n-3]) \\
&= 2(u[n] - u[n-3] - u[n-4] + u[n-7]) \\
&= 2\big((u[n] - u[n-3]) - (u[n-4] - u[n-7])\big)
\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که اگر پاسخ ضربه سیستم را به صورت زیر تعریف کنیم نتایج یکسان می‌شود.

```
h = np.array([2, 2, 2, 0, 2, 2, 2])
```

b. پاسخ این دو بیان معادل از سیستم را برای ورودی زیر محاسبه و مقایسه کنید.

```
x = np.cos(np.linspace(0,4.*np.pi,100))
```

برای این سوال کد q5b زده شده است و نتایج نیز با همین نام در کنار کد قرار دارد.

c. پاسخ پله‌ی این دو بیان معادل از سیستم را محاسبه و با هم مقایسه کنید (به دلیل محدودیت طول آرایه، پله را یک سیگنال به طول ۱۰۰درنظر بگیرید).

برای این سوال کد q5c زده شده است و نتایج نیز با همین نام در کنار کد قرار دارد.

نکات:

- کد ها در پوشه code قرار دارند. کدهای پایتون در پوشه python و کدهای برای MATLAB یا Octave در پوشه matlab قرار دارند.