



تمرین سری دوم (سوالات 3, 7, 11 غیر تحویلی هستند)

۱. بررسی کنید که هر کدام از معادلات زیر چند جواب متفاوت دارند. در صورت داشتن جواب، همه آنها را نمایش دهید.

$$Ax = b \text{ where } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ and } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$Ax = b \text{ where } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ and } b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (b)$$

۲. با کمک روش گاوس جردن، حل معادله زیر را بیابید. $Ax = b$ where $A = \begin{bmatrix} 12 & 20 & 25 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ and $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$.

۳. اگر $x \in \mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه C_1, C_2 را بصورت مستقل از x طوری بیابید که: (می توانید از نامساوی کوشی-شوارتز استفاده کنید)

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$$

۴. یک سیستم معادلات خطی داده شده با ماتریس A و بردار b مشخص می شود. می دانیم که سیستم حداقل یک پاسخ دارد. فرض کنید ماتریس A یک ماتریس ۳ در ۳ با عناصر نامعلوم است که ویژگی های زیر را دارا می باشد:

۱. ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند.

۲. بردار b بر بردار u عمود است.

۳. مجموع المان های تمام ردیف های ماتریس A برابر مقدار ثابت c است.

۴. اندازه بردار پاسخ این سیستم معادلات خطی ($Ax = b$) برابر با $\sqrt[3]{3}$ است.

با توجه به این موارد، به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱. بررسی کنید از این ویژگی ها چگونه برای استنباط خواص بردار x بدون حل مستقیم سیستم می توان استفاده کرد.

۲. اگر ثابت c و بردار u مشخص باشند، چگونه از آنها می توان برای محدود کردن پاسخ سیستم معادلات استفاده کرد؟

۳. اگر یک محدودیت دیگر بر ماتریس A اضافه شود که این ماتریس باید متقارن باشد، چگونه بر حل های ممکن سیستم معادلات و ساختار ماتریس A تاثیر می گذارد؟

۴. این سیستم معادلات را برای $c = 9$ و $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ حل کنید و موارد بالا را با این مثال عددی توضیح دهید.

۵. سیستم معادلات خطی $Ax = b$ را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 10 \\ 4 & b & 2 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

این سیستم معادلات ویژگی های زیر را دارد:

۱. این سیستم یک جواب مشخص دارد.
۲. مجموع x_i ها برابر ۴ است.
۳. $a + b + c = 15$
۴. اولین ردیف ماتریس معکوس A برابر است با: $[1, 0, -1]$ با توجه به این موارد a, b, c, d و بردار x را محاسبه کنید.

۶. درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید و برای هر کدام توضیح کوتاه و مناسبی ارائه دهید.

۱. اگر S یک مجموعه وابسته خطی باشد آنگاه هر بردار در آن یک ترکیب خطی از سایر بردارهای مجموعه S می باشد.
۲. هر مجموعه شامل بردار صفر، یک مجموعه وابسته خطی است.
۳. مجموعه تهی یک مجموعه وابسته خطی است.
۴. در یک دستگاه معادلات، می توان هر معادله را در هر ثابت دلخواهی ضرب کرد.
۵. اگر یک فضای برداری متناهی البعد باشد، آنگاه تمامی مجموعه های پایه آن دارای تعداد اعضای یکسانی هستند.
۶. پوش خطی تهی، تهی است. ($Span(\{\}) = \emptyset$)
۷. بردار صفر به تنهایی یک فضای برداری یک بُعدی تشکیل می دهد.
۸. اگر مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقل خطی باشد آنگاه مجموعه بردارهای $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ مستقل خطی است.
۹. اگر مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقل خطی باشد آنگاه مجموعه بردارهای $\{v_1 - v_2, v_1 - v_3, v_2 - v_3\}$ مستقل خطی است.

۷. بردار x را به صورت $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ عضو فضای \mathbb{R}^4 در نظر بگیرید. این بردار به همراه ۲۴ جایگشت مؤلفه های آن مثل $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix}$

زیرفضای S را $Span$ می کنند. بردار x را به گونه ای انتخاب کنید که ابعاد زیرفضای S به ترتیب الف) صفر ب) یک ج) سه د) چهار باشد.

۸. درستی هر یک از موارد زیر را نشان دهید:

$$۱. \text{ قانون متوازی الاضلاع: } \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

$$۲. \text{ فرم قطبی برای } \langle u, v \rangle : \langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

۳. تعمیم فیثاغورس: فرض کنید $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ مجموعه بردارهای متعامد باشد، آنگاه:

$$\|u_1 + u_2 + \dots + u_r\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_r\|^2$$

موارد زیر را اثبات کنید.

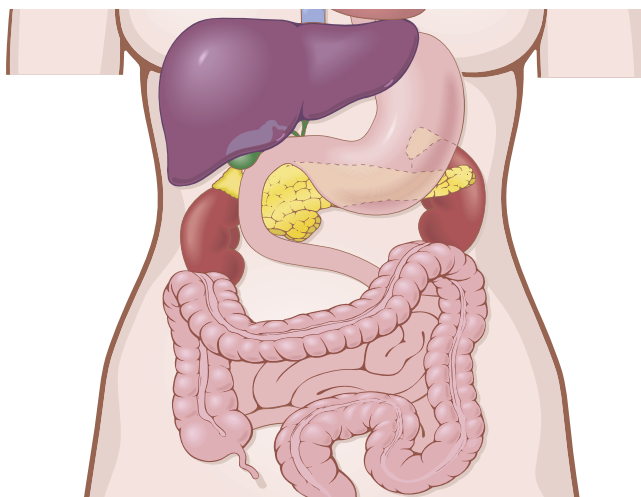
۹. ۱. فرض کنید $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s\}$ یک مجموعه مستقل خطی و زیرمجموعه V باشد. آنگاه:

$$\text{Span}(\{u_1, \dots, u_r\}) \cap \text{Span}(\{w_1, \dots, w_s\}) = \{0\}$$

۲. فرض کنید ماتریس M یک ماتریس مربعی به ابعاد $n \times n$ باشد. چنانچه این ماتریس بالامثلی بوده و درایه های روی قطر غیر صفر باشند، فضای ستونی این ماتریس برابر \mathbb{R}^n می باشد.

۳. فرض کنید V_1 و V_2 دو زیر فضای غیر بدیهی فضای برداری V باشند ($V_i \neq V, \{0\}$). در این صورت بردار $v \in V$ وجود دارد به طوری که $v \notin V_1$ و $v \notin V_2$

۱۰. یک سیستم چند بخشی^۱، سیستمی متشکل از چند زیرسیستم است که هر یک از این زیرسیستم ها را، یک بخش^۲ (محفظه) می نامیم. برای توصیف حرکت یک ماده در بین n بخش در طول زمان، می توان از این خانواده مدل ها استفاده کرد. این ایده، بطور گسترده در فارماکوکینتیک^۳ کاربرد دارد. فارماکوکینتیک شاخه ای از داروشناسی است که نحوه ی تغییر غلظت دارو در قسمت های مختلف بدن پس از ورود دارو به بدن را مورد مطالعه قرار می دهد. در این کاربرد، ماده ی مورد بحث، دارو است و بخش های مورد بررسی نیز می توانند جریان خون، ریه ها، قلب، کلیه ها، مغز و سایر اعضا و ارگان های درون بدن باشند. بعنوان مثال، می توان در شکل ۱ قسمتی از بدن انسان را مشاهده کرد که هر یک از اعضای درونی بدن، می تواند یک بخش در نظر گرفته شود.



شکل ۱: بدن انسان، بعنوان مثالی از یک سیستم قسمت قسمت

¹Compartmental System

²Compartment

³Pharmaco-Kinetics

در این مسئله، یک سیستم چندبخشی متشکل از ۵ بخش را در نظر می‌گیریم. گیریم $(x_t)_i$ معرف مقدار دارو در بخش i در زمان نمونه‌برداری t باشد. از زمان نمونه‌برداری t تا زمان نمونه‌برداری $t + 1$ ، دارو به صورت ذیل در بین این بخش‌ها حرکت می‌کند:

- ۱۰ درصد از مقدار داروی موجود در بخش ۱ در زمان t ، به بخش ۲ حرکت می‌کند.
- ۵۰ درصد از مقدار داروی موجود در بخش ۲، به بخش ۳ حرکت می‌کند.
- ۳ درصد از مقدار داروی موجود در بخش ۳، به بخش ۱ و ۵۰ درصد نیز به بخش ۴ حرکت می‌کند.
- ۸۰ درصد از مقدار داروی موجود در بخش ۴، به بخش ۵ حرکت می‌کند.
- ۹۰ درصد از مقدار داروی موجود در بخش ۵ نیز از بدن دفع می‌شود.

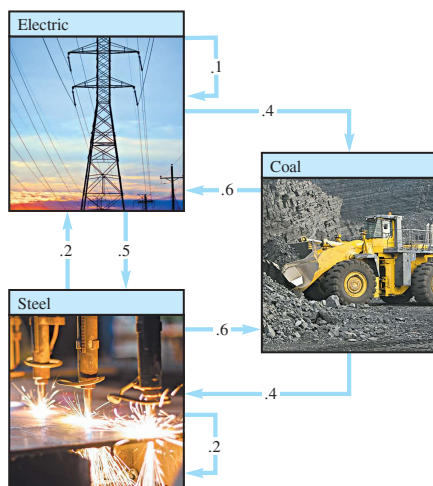
۱. این سیستم را با یک سیستم دینامیکی خطی به صورت $x_{t+1} = Ax_t$ بیان کنید که در آن، برداری با طول مناسب و معرف مقادیر دارو در بخش‌های مختلف در زمان t است.

۲. با فرض این‌که قبل از تزریق، مقدار دارو در تمامی بخش‌های بدن برابر با صفر بوده و در زمان تزریق، ۵۰ میلی گرم دارو به بخش اول تزریق شود، نمودار تغییر مقدار دارو در همه‌ی بخش‌ها تا زمان ۲۰امین نمونه‌برداری را ترسیم کنید.

۳. با شرایطی که در بخش قبل بیان شد، چقدر طول خواهد کشید تا ۹۰ درصد داروی تزریق شده، از بدن دفع شود؟ آیا مقدار شرایط اولیه، در این زمان تأثیرگذار است؟

۴. با فرض دانستن مقدار x_k در k امین نمونه برداری، آیا می‌توان مقدار دارو در زمان شروع نمونه‌برداری را محاسبه کرد؟

۱۱. اقتصادی متشکل از سه بخش زغال‌سنگ، برق (قدرت) و فولاد را در نظر بگیرید که خروجی (درآمد) هر بخش، مطابق با جدول ۱ بین تمام بخش‌ها توزیع می‌شود که اعداد هر ستون از این جدول، کسر سهم هر بخش، از خروجی بخش ستون متناظر است. بعنوان مثال، ۰.۵ درآمد بخش برق، به بخش فولاد تعلق خواهد یافت. شکل ۲ نیز به دریافت مفهوم این جدول کمک می‌کند. در صورت امکان، مخارج تعادلی را بیابید که باعث می‌شود مخارج هر بخش با درآمد آن بخش برابر باشد.



جدول ۱: یک اقتصاد ساده متشکل از سه بخش و توزیع خروجی بین بخش‌های مختلف

توزیع خروجی از:				استفاده شده توسط:
فولاد	برق	زغال سنگ	زغال سنگ	
۰.۶	۰.۴	۰.۰	زغال سنگ	
۰.۲	۰.۱	۰.۶	برق	
۰.۲	۰.۵	۰.۴	فولاد	

شکل ۲: نمایش یک اقتصاد ساده متشکل از سه بخش و توزیع خروجی بین بخش‌های مختلف