



۱. برای ماتریس زیر مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را تعیین کنید و همچنین فرم جردن آن را بنویسید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 3 & 2 & 0 \\ 15 & 10 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

۲. فرم جردن ماتریس زیر را بیابید:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

۳. با استفاده از تجزیه QR تمام پاسخ های مسئله زیر را بدست آورید:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 2 \\ -6 & -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

۴. ثابت کنید اگر ماتریس A قطری پذیر باشد و همچنین A, B دو ماتریس مشابه^۱ باشند آنگاه B قطری پذیر است.

۵. به موارد زیر همراه با استدلال پاسخ دهید:

۱. آیا ماتریس 2×2 A وجود دارد بطوری که داشته باشیم $A^3 = O$ و $A^2 \neq O$ ؟

۲. آیا ماتریس 3×3 B وجود دارد بطوری که $B^2 = A$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ؟

¹similar

۶. با استفاده از مفهوم تجزیه‌ی ماتریس A به مقادیر تکین به صورت $A = U\Sigma V^T$ ، گزاره‌های زیر را ثابت کنید که در آن‌ها، $\bar{\sigma}$ و $\underline{\sigma}$ به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار تکین ماتریس A هستند.

۱.

$$\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \bar{\sigma}$$

۲.

$$\min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \underline{\sigma}$$

۷. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. ناتساوی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_2 \leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_2$$