



## تمرین سری اول

- پرسش‌های خود را می‌توانید در گروه ایجاد شده برای درس مطرح کنید.
- نوشتن نام خود را فراموش نفرمایید.

۱. اگر بردارهای  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ y \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} x \\ x \\ 13 \end{bmatrix}$  بردارهای پایه فضای  $R^3$  باشند، مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست آورید.

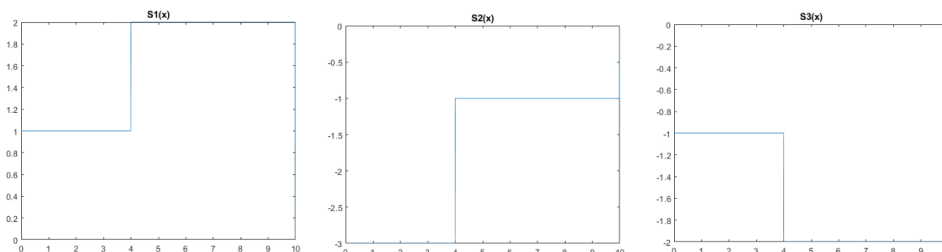
۲. اگر  $A$  ماتریسی به فرم زیر باشد، آنگاه  $Z_1$ ،  $Z_2$  و  $Z_3$  چه مقادیری باید داشته باشند تا فضای ستونی ماتریس  $A$ ، فضای برداری  $R^4$  باشد؟

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 5Z_1 + 6Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 4Z_1 + 3Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & Z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

۳. اگر  $\|y\| = \|x\| = 1$  باشد، آنگاه مقدار عبارت  $\|y + \frac{2}{3}x\|$  را بر حسب  $x^T y$  به دست آورید.

۴. در فرآیند مخابراتی دیجیتال پیام با سیگنال‌ها، مفهومی تحت عنوان نمایش فضای سیگنال مطرح می‌شود. در واقع سیگنال‌های مختلف را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از سیگنال‌های پایه نمایش داد.

۱. فرض کنید می‌خواهیم برای سه سیگنال زیر یک فضای نمایش تعریف کنیم به طوری که تعداد سیگنال‌های پایه‌ی ما حداقل باشد. شما چه سیگنال‌هایی را به عنوان سیگنال پایه معرفی می‌کنید؟



۲. همانند صفحه و محورهای  $x-y$  برای فضای نمایش پیشنهادی تان صفحه و محورها را رسم کرده و نقاط متناظر سه سیگنال را در این صفحه مشخص کنید.

۳. به نظر شما کار کردن با نمایش برداری سیگنالها در فضای نمایش، چه مزیت‌هایی برای پیاده‌سازی محاسبات و الگوریتم‌های ریاضی می‌تواند داشته باشد؟ برای پیاده‌سازی سخت‌افزار آشکارکننده سیگنال دریافتی چطور؟

مثالی برای راهنمایی: همانطور که در دروس دیگر تدریس می‌شود، برای بدست آوردن انرژی یک سیگنال (از نوع انرژی) از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dx$$

اما اگر سیگنال را در فضای حاصل از پایه‌های نمایش دهیم، می‌توان انرژی سیگنال را از طریق محاسبه‌ی اندازه‌ی بردار نمایش آن در این فضا (فاصله‌ی نقطه‌ی نمایش آن در فضا از مبدا) بدست آورد. یعنی داریم:

$$E = ||\underline{x}||^2$$

۵. موارد زیر که نتایج فرعی خواص هشتگانه فضاهای برداری است را اثبات کنید:

۱. بردار صفر (موضوع خاصیت  $A3$ : عنصر خنثی جمع) در یک فضای برداری یکتا است.

۲. بردار  $y$  (موضوع خاصیت  $A4$ : عنصر معکوس جمع) در یک فضای برداری یکتا است.

۶. کدام زیرمجموعه‌ی های زیر از  $R^n$  یک زیر فضا از آن هستند؟ توضیح دهید.

۱. صفحه‌ای از بردارهای  $(b_1, b_2, b_3)$  که در آن  $b_1 = b_2$

۲. صفحه‌ای از بردارهای  $(b_1, b_2, b_3)$  که در آن  $b_1 = 1$

۳. تمام بردارهای  $(b_1, b_2, b_3)$  که در آن  $b_1 b_2 b_3 = 0$

۴. تمام بردارهای  $(b_1, b_2, b_3)$  که در آن  $b_1 + b_2 + b_3 = 0$

۵. تمام بردارهای  $(b_1, b_2, b_3)$  که در آن  $b_1 + b_2 + b_3 = 1$

۶. تمام بردارهای  $(b_1, b_2, b_3)$  که در آن  $b_1 \leq b_2 \leq b_3$

۷. اگر  $f(x)$  و  $g(x)$  که توابع پیوسته  $R \rightarrow R$  هستند را بردارهای بی‌نهایت-بعدی در نظر بگیریم و جمع دو بردار را به صورت تابع  $f(g(x))$  تعریف کنیم، آنگاه بردار صفر (عنصر خنثی جمع) معادل  $z(x) = x$  خواهد بود. با در نظر گرفتن ضرب اسکالر عادی به صورت  $cf(x)$ ، فضای برداری بودن این تعریف را با بررسی تمامی خواص تحقیق کنید.

۸. ثابت کنید اگر  $W_1$  و  $W_2$  زیرفضا باشند، آنگاه  $W_1 \cup W_2$  زیرفضا است اگر و تنها اگر  $W_1 \subset W_2$  یا  $W_2 \subset W_1$ .