Date: Sub:

HW5_LA ۸۱۰۱۹۹۴۷۲ پارسا قدیمی

(۱

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 3 & 2 & 0 \\ 15 & 10 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\rightarrow \lambda = \{1, 1, 2, 2, 2\}$$ مقادیر ویژه

$$\lambda = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 15 & 10 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}}_{v} = 0$$

$3v_1 = 0 \rightarrow v_1 = 0$

$\cancel{6v_1} + 3v_2 + v_3 = 0 \rightarrow v_3 = -3v_2$

$\cancel{10v_1} + 6v_2 + 3v_3 + v_4 = 0 \rightarrow v_4 = 3v_2$

$\cancel{15v_1} + 10v_2 + 6v_3 + 3v_4 + v_5 = 0 \rightarrow v_5 = -v_2$

$v_2 \quad -18v_2 \quad +9v_2$

$-9v_2$

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \quad A v' = v \longrightarrow v' = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ -5 \\ 4/3 \\ -20 \end{bmatrix}$$

تعمیم یافته
بردار ویژه

$$\lambda = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 15 & 10 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = 0$$

Elipon

Date: Sub:

ادامه ۱)

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to Au' = u$$

$$\Rightarrow \underline{u'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Au'' = u' \to \underline{u''} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/9 \\ -2/9 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

پس: مقادیر ویژه: $\underline{\lambda} = \{1, 1, 2, 2, 2\}$

بردارهای ویژه: $\lambda = 1 \Rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\underline{v'} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ -5 \\ 44/3 \\ -20 \end{bmatrix}$

$$\lambda = 2 \Rightarrow \underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{u'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{u''} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/9 \\ -2/9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(u', u'') و (v') بردارهای ویژه تعمیم یافته

فرم جردن:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Block1

Block2

Elipon

Date: Sub:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \rightarrow J_{n\times n} = ?$$ (2

فرض کنیم $n=2$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \rightarrow \det(M - \lambda I) = 0$$

$\lambda^2 - 1 = 0$ $\rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 1$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حال $n=3$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \rightarrow \det(M - \lambda I) = 0$$

$\rightarrow \lambda = \{1, -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{3}\}$

$1 - \lambda^3 = 0$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

فرض کنیم $n=4$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \{\pm 1, \pm i\}$$

$\lambda^4 - 1 = 0$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elipon

Date: Sub:

ادامهٔ 2)

اگر n زوج باشد : $\lambda^n - 1 = 0$

اگر n فرد باشد : $1 - \lambda^n = 0$

در حالت زوج حداقل دو مقدار ویژهٔ حقیقی ± 1 را داریم $(n:2)$ و در صورت داشتن مقدار ویژه های دیگر آنها موهومی هستند به فرم $\rho \pm i\omega$

که برای فرم جردن به این شکل می‌شود :

$$J' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \rho & \omega \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & \rho \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

سایر بلوک‌های جردن مربوط به مقادیر ویژهٔ مختلط

در حالت فرد همواره یک مقدار ویژه حقیقی $+1$ داریم و سایر مقادیر ویژه موهومی هستند.

فرم جردن :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho & \omega \cdots & 0 \\ 0 & -\omega & \rho \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

سایر بلوک‌های جردن مربوط به سایر مقادیر ویژهٔ موهومی (یا مختلط)

* مقادیر ویژهٔ مختلط نیز به سادگی با حل $\lambda^n - 1$ یا $1 - \lambda^n$ به دست می‌آیند.

Elipon

Date: Sub:

(3

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 2 \\ -6 & -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 4}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{4\times 1}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}}_{b}$$

$$A = QR \longrightarrow \underline{R x^* = Q^T b}$$

$$Q, R = ? \implies A = \underbrace{\begin{bmatrix} 3/7 & -6/7 & 2/7 \\ -2/7 & -3/7 & -6/7 \\ -6/7 & -2/7 & 3/7 \end{bmatrix}_{3\times 3}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 4}}_{R}$$

$$\implies \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{R} x^* = \underbrace{\begin{bmatrix} 3/7 & -2/7 & -6/7 \\ -6/7 & -3/7 & -2/7 \\ 2/7 & -6/7 & 3/7 \end{bmatrix}}_{Q^T} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\implies x^* = \begin{bmatrix} w \\ -9w-3 \\ w+1 \\ -2w \end{bmatrix} \xrightarrow{w=0} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{x^*}$$

Date: Sub:

(4

$A \rightarrow$ قطری‌پذیر

$B = PAP^{-1} \rightarrow$ A, B متشابه $\Big\} \rightarrow$ B قطری‌پذیر ؟

$A = QDQ^{-1} \rightarrow$ قطری شدنی است

$B = PAP^{-1} \rightarrow PQDQ^{-1}P^{-1}$

$\rightarrow (PQ)D(PQ)^{-1}$

$\xrightarrow{PQ = y} yDy^{-1} \Rightarrow B = yDy^{-1} \rightarrow$ پس B نیز قطری شدنی است.

Date: Sub:

5)

1) $A_{2\times2} \to A^2 \neq 0 \,,\; A^3 = 0 \to$ وجود دارد؟ A

با توجه به قضیه کیلی همیلتون و چندجمله‌ای مینیمال ماتریس A خواهیم داشت:

اگر $A^3 = 0$ باشد چندجمله‌ای مینیمال ماتریس A حداقل درجه 3 خواهد داشت در حالی که با استفاده از قضیه کیلی همیلتون می‌دانیم ماکسیمم درجه n خواهد داشت پس:

$A^3 = 0 \xrightarrow{\text{مینیمال}} p(A)$ حداقل درجه $\underline{3}$

$n = 2 \to A_{2\times2} \xrightarrow[\text{کیلی همیلتون}]{} p(A)$ حداکثر درجه $\underline{n = 2}$ (تناقض) $\times$

پس همچین ماتریسی وجود ندارد.

Elipon

Date: Sub:

$A \to$ قطری بشود

$B = P\lambda P^{-1} \to$

$A = QDQ^{-1} \to$

$B = P\lambda P^{-1} \to$

$\to (PQ) D$

$\underline{PQ = Y} \to YD$

Date: Sub:

(5

(2

$$B_{3\times3} \longrightarrow B^2 = A \ , \ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix} \longrightarrow B^2 = \begin{bmatrix} a^2+eb+ch & ab+bf+ic & ac+bg+cj \\ ea+ef+gh & eb+f^2+ig & ec+fg+gj \\ ah+hj+ie & bh+if+ij & ch+ig+j^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \longrightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

$$\xrightarrow{\lambda=A} A(A-1)(A-3)=0$$

$$A(A^2+3-A-3A)=0$$

$$A^3+3A-4A^2=0$$

حل با استفاده از مثلث ؟

$$3A = -A^3+4A^2$$

$$\Rightarrow A = (-A^3+4A^2)\frac{1}{3}$$

$$B^2 = (-A^3+4A^2)\frac{1}{3} \qquad ?$$

Elipon

-6

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|U\Sigma V^T x\|_2 \quad \Big\} \text{(I)}$$

$$\|U\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ux\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{x^T \underbrace{U^T U}_{I} x} = \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{x^T x} = 1 \rightarrow \text{(I)}$$

$$\Rightarrow \max_{\|x\|_2=1} \|\Sigma V^T x\| = \max_{\substack{\|y\|_2=1 \\ y=V^T x}} \|\Sigma y\| = \max \underbrace{\sigma_i}_{\text{مقادیر تکین}} = \bar{\sigma}$$

$$\Rightarrow \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \bar{\sigma}$$

به همین طریق نیز می‌توان $\min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \min \sigma_i = \underline{\sigma}$ ثابت کرد :

$$\min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \min_{\|x\|_2=1} \|U\Sigma V^T x\|_2 = \min_{\|x\|_2=1} \|\Sigma V^T x\|_2$$

$$\rightarrow \min_{\substack{\|y\|_2=1 \\ y=V^T x}} \|\Sigma y\| = \min \underbrace{\sigma_i}_{\text{مقادیر منفرد}} = \underline{\sigma}$$

$$\rightarrow \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \underline{\sigma}$$

Date: Sub:

$$A_{m\times n} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_2 \leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2 \quad -7$$

$x\in\mathbb{R}^n \rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$: داریم

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \leq \max_{\|x\|_2=1} \underbrace{\|Ax\|_2}_{\|A\|_2} \times \sqrt{n} = \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

$$\Rightarrow \|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \leq \max_{\|x\|_\infty=1} \underbrace{\|Ax\|_\infty}_{\|A\|_\infty} \times \sqrt{m} = \sqrt{m}\,\|A\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\,\|A\|_\infty \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_2 \leq \|A\|_\infty$$

پس :

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_2 \leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

Elipon