Date: LA HW#3 Sub: ۸۱۰۱۹۹۶۴۲ پارسا تقی

۱)

۱)

R^2 پایه استاندارد $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\rightarrow T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$\rightarrow T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e \\ f \\ d \end{bmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(-2\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = -2T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right) + 3T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \\ 7 \end{bmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(3\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

$\rightarrow \underline{T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)} = \begin{bmatrix} -4 \\ -23 \\ -9 \end{bmatrix}$

$\underline{T} = \underset{\substack{3\times 2 \\ m\times n}}{\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 16 & -23 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}} \rightarrow$ برحسب $\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 16 & -23 \end{bmatrix} = C \rightarrow \det(C) \neq 0 \rightarrow \underline{Rank(T) = 2}$ 2)

$N(T) = n - Rank(T) = 2 - 2 = 0 \rightarrow \underline{N(T) = 0}$

12

$N(A) = n - Rank(A) = 3 - 2 = 1$ 11

$$Ax = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = 1$ یکا متعامد:

بردارها دو به دو برهم عمود

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\xrightarrow{x_2 = 0} N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow$$ چون تنها یک بردار است شرط عمود بودن، در مورد صدق ندارد.

$$\Rightarrow \{ |x_1|^2 + |x_3|^2 = 1 \quad , \quad x_1 + x_3 = 0$$

$$\Rightarrow N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C \rightarrow \det(C) \neq 0 \rightarrow Rank(A) = 2$ 12

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 13

$R(A) = \text{span}\{[1 \ 0 \ 1], [0 \ 1 \ 0]\}$

Date: Sub:

$T: V \to V \quad , T^2 = 0 \quad , \text{Rank}(T) \leq \frac{1}{2}\dim(V) \ ?$ - 3

$x \in R(T) \to \exists y, Ty = x \xrightarrow{\times T} T^2 y = Tx$

$\to 0 = Tx$

$\to x \in N(T)$

$\to R(T) \subseteq N(T)$

$\Rightarrow \text{Rank}(T) \leq N(T)$

$\text{Rank}(T) + N(T) = \dim(V)$

$\to \text{Rank}(T) + \text{Rank}(T) \leq \dim(V)$

$\text{Rank}(T) \subseteq N(T)$

$\Rightarrow 2\text{Rank}(T) \leq \dim(V)$

$\Rightarrow \text{Rank}(T) \leq \frac{1}{2}\dim(V)$

4)

$\text{Rank}(A+B) \leq \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B)$ 1)

$\to \dim(R(A+B)) \leq \dim(R(A)) + \dim(R(B))$

$\to \begin{cases} V+W = \{x \mid x = v+w \ , v \in V, w \in W\} \\ \dim(V+W) \leq \dim(V) + \dim(W) \end{cases}$

$\Rightarrow \text{Rank}(A+B) \leq \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B) \ \checkmark$

Elipon

Date: Sub:

$\mathrm{Rank}(A) + \mathrm{Rank}(B) \leq \mathrm{Rank}(AB) + n$ (1,4

$\dim(N(AB)) \leq \dim(N(A)) + \dim(N(B))$

$\rightarrow \mathrm{Rank}(AB) - n \leq \mathrm{Rank}(A) - n + \mathrm{Rank}(B) - n$

$\rightarrow \mathrm{Rank}(A) + \mathrm{Rank}(B) \leq \mathrm{Rank}(AB) + n$

که پس کافی است این عبارت اثبات شود:

$x \in N(B) \rightarrow x \in N(AB) \rightarrow N(B) \subseteq N(AB)$

$\rightarrow \begin{cases} \dim(N(B)) = a \\ \{v_1, \dots, v_a\} \end{cases} , \begin{cases} \dim(N(AB)) = a + b \\ \{v_1, \dots, v_a, w_1, \dots, w_b\} \end{cases}$

$\Rightarrow \{Bw_1, \dots, Bw_b\} \rightarrow$ مستقل خطی

$\Rightarrow \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_b w_b = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_a v_a$

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_b = \beta_1 = \dots = \beta_a = 0$

$\Rightarrow \{ A(Bw_i) = 0, \forall i \rightarrow Bw_i \in N(A)$

$\Rightarrow \{Bw_1, \dots, Bw_b\} \subseteq N(A)$

$\Rightarrow \dim(N(A)) \geq b$

$\underbrace{\dim(N(AB))}^{a+b} \leq \underbrace{\dim(N(A))}_{\geq b} + \overbrace{\dim(N(B))}^{a} \rightarrow \checkmark\ 3$

اثبات شد.

Elipon

$$\Rightarrow \quad Rank(A) + Rank(B) \leq Rank(AB) + n$$

و داریم $\quad Rank(A+B) \leq Rank(A) + Rank(B)$

پس :

$$\Rightarrow Rank(A+B) \leq Rank(A) + Rank(B) \leq Rank(AB) + n$$

(4

(2

$A_1 A_2 \ldots A_K = 0 \quad , A_{n \times n}$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{K} Rank(A_i) \leq (K-1)n$$

$$\longrightarrow Rank(A_1 A_2 \cdots A_{K-1}) + Rank(A_K) \leq \cancel{Rank(A_1 A_2 \cdots A_K)} + n$$

$$\Rightarrow \Big\{ Rank(A_1 A_2 \cdots A_{K-1}) \leq n - Rank(A_K)$$

$$\longrightarrow Rank(A_1 A_2 \cdots A_{K-2}) + Rank(A_{K-1}) \leq \underbrace{Rank(A_1 A_2 \cdots A_{K-1})}_{n - Rank(A_K)} + n$$

$$\Rightarrow \Big\{ Rank(A_1 A_2 \cdots A_{K-2}) \leq 2n - Rank(A_K) - Rank(A_{K-1})$$

اگر ادامه بدهیم : $\quad Rank(A_1) \leq (K-1)n - \sum_{i=2}^{K} Rank(A_i)$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{K} Rank(A_i) + Rank(A_1) \leq (K-1)n$$

$$\Rightarrow \Big\{ \sum_{i=1}^{K} Rank(A_i) \leq (K-1)n$$

Date: Sub:

$A_{n\times n} \rightarrow a_{ij} = i+j \rightarrow Rank(A) = ?$ 15

فرض : $A_{2\times 2}$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\det(A) \neq 0 \rightarrow Rank(A) = 2$

فرض : $A_{3\times 3}$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\det(A) = 0$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ یک زیر ماتریس 2x2 لحاظ داریم

$\rightarrow \det C \neq 0 \rightarrow Rank(A) = 2$

پس با تعمیم همین راه می‌توان نتیجه گرفت ماتریس $A_{n\times n}$ با شرط $a_{ij} = i+j$ حتماً یک زیر ماتریس 2x2 که دترمینان آن صفر نیست دارد پس

$\Rightarrow Rank(A) = 2$

Date: Sub:

A, B — مربعی , $AB = 2A + 3B$ 16

$\Rightarrow \{ \operatorname{Rank}(A) = \operatorname{Rank}(B)$?

$x \in N(B) \rightarrow \cancel{ABx} = 2Ax + \cancel{3Bx} \rightarrow 2Ax = 0$

$\rightarrow Ax = 0 \rightarrow x \in N(A)$

$\rightarrow N(B) \subseteq N(A)$ I

$y \in N(A) \rightarrow \cancel{yAB} = \cancel{2yA} + 3yB \rightarrow 3yB = 0$

$\rightarrow yB = 0$

$\rightarrow y \in N(B) \rightarrow N(A) \subseteq N(B)$ II

I, II $\rightarrow N(A) = N(B)$

$$\begin{cases} N(A) = -\operatorname{Rank}(A) + n \\ N(B) = -\operatorname{Rank}(B) + n \end{cases} \xrightarrow{N(A) = N(B)} \operatorname{Rank}(A) = \operatorname{Rank}(B)$$

[illegible]