



۱. تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید.

$$T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۱. نمایش ماتریسی تبدیل T را بر حسب پایه های استاندارد فضای \mathbb{R}^2 پیدا کنید.

۲. رتبه و فضای پوچ ماتریس T را تعیین کنید.

۲. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید:

۱. یک پایه یکامتعامل برای فضای پوچ ماتریس A بیابید.

۲. رتبه ماتریس A را بیابید.

۳. یک پایه متعامد برای فضای سطری ماتریس A بیابید.

۳. عملگر خطی $T: V \rightarrow V$ را روی فضای متناهی البعد V در نظر بگیرید. با فرض آنکه $T^2 = 0$ باشد نشان دهید:
 $\text{rank}(T) \leq \frac{1}{2} \dim(V)$

۴. ماتریس های مربعی $A_{n \times n}, B_{n \times n}$ را در نظر بگیرید. موارد زیر را اثبات کنید:

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq \text{rank}(AB) + n \quad ۱.$$

۲. اگر A_1, A_2, \dots, A_k ماتریس های مربعی $n \times n$ باشند و داشته باشیم $A_1 A_2 \dots A_k = 0$ آنگاه نشان دهید
 $\sum_{i=1}^k \text{rank}(A_i) \leq (k-1)n$.

۵. ماتریس $A_{n \times n}$ را در نظر بگیرید به طوری که $a_{ij} = i + j$. رتبه ماتریس A را بدست بیاورید.

۶. ماتریس های مربعی A, B را در نظر بگیرید بطوری که $AB = 2A + 3B$ باشد. نشان دهید $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ است.

۷. ماتریس $N_{12 \times 12}$ را در نظر بگیرید به طوری که $N^4 = 0$ باشد. کوچک ترین کران پایین برای $\text{rank}(N)$ کدام است؟ (لطفا اثبات هم بیاورید)