به نام خدا

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

درس جبرخطی
نیم‌سال اول ۰۳-۰۲
استاد: دکتر سرافراز

تمرین سری چهارم

---

۱. دترمینان ماتریس زیر را یک بار با روش تبدیل به فرم سطري پلکانی کاهش یافته و یک بار با دترمینان ماتریس هاي بلوکی محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

۲. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را تعیین کنید:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

۳. فرض کنید M ماتریس وارون پذیر به صورت $M = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ و M^{-1} برابر با $\begin{bmatrix} X & U \\ Y & V \end{bmatrix}$ باشد

همچنین اندازه X هم ۲ در۲ باشد:

۱. مقدار V را بیابید.

۲. مقدار عبارت $|M||V|$ را بدست آورید.

۴. اگر A یک ماتریس ۳در۳ بصورت $\begin{bmatrix} 100 & 2 & 3 \\ 3 & 200 & 1 \\ 2 & 1 & 300 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه مقدار A^5 را بدست آورید.

(راهنمایی: از قضیه کیلی همیلتون بهره ببرید)

۵. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد که همه درایه هاي قطر اصلی آن ۰ و بقیه درایه هاي آن ۱ باشند. مقادیر ویژه و فضاي ویژه متناظر با هر یک از این مقادیر ویژه را حساب کرده و رابطه اي براي محاسبه دترمینان این ماتریس ارائه دهید.

۶. A و B دو ماتریس $n \times n$ هستند بگونه اي که $AB = BA$ است. نشان دهید این دو ماتریس حداقل یک بردار ویژه مشترک دارند.

۷. اگر ضریبی از یکی از سطرهای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را به یکی از سطرهای آن اضافه نماییم و آن را ماتریس B بنامیم، با استفاده از تعریف دترمینان نشان دهید: $det(A) = det(B)$.

۸. موارد زیر را نشان دهید:

۱. عدد صفر مقدار ویژه ماتریس T است اگر و تنها اگر T وارون ناپذیر باشد.

۲. اگر λ یک مقدار ویژه برای ماتریس T باشد، چنانچه T وارون پذیر باشد، $\frac{1}{\lambda}$ یک مقدار ویژه برای T^{-1} می‌باشد.

۳. چنانچه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ مقادیر ویژه ماتریس T باشند، آنگاه مقادیر ویژه ماتریس $T + pI$ برابر است با $\{\lambda_1 + p, \dots, \lambda_n + p\}$ و بردارهای ویژه آن همان بردارهای ویژه T می‌باشد.

۴. درایه های روی قطر یک ماتریس بالا یا پایین مثلثی، مقادیر ویژهٔ آن ماتریس هستند.

۹. موارد زیر را با کمک تعریف دترمینان اثبات کنید:

۱. دترمینان ماتریس پایین مثلثی $A_{n\times n}$ برابر است با حاصلضرب درایه های روی قطر آن:

$$det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

۲. دترمینان ماتریس بالا مثلثی بلوکی M که بلوک های روی قطر آن $A_1, A_2, \dots, A_n$ می‌باشد، برابر است با:

$$det(M) = det(A_1)det(A_2)\dots det(A_n)$$

(راهنمایی: از روش استقرا برای اثبات این موضوع استفاده کنید.)

۱۰. فرض کنید v یک بردار ویژه برای ماتریس A مرتبط با مقدار ویژه λ باشد. نشان دهید:

۱. بردار v یک بردار ویژه برای A^p نیز هست و مقدار ویژه مرتبط با آن λ^p است. $(p \in \mathbb{N})$

۲. برای هر چند جمله ای $f(t)$، $f(\lambda)$ یک مقدار ویژه برای $f(A)$ است.

۱۱. موارد زیر را به کمک معادله مشخصه نشان دهید:

۱. مجموع مقادیر ویژه یک ماتریس برابر است با مجموع درایه های روی قطر آن.

۲. حاصلضرب مقادیر ویژه یک ماتریس برابر است با دترمینان آن ماتریس.

۱۲. با استفاده از کاربرد دترمینان در محاسبه مفاهیم هندسی ، برنامه‌ای بنویسید که مختصات ۴ نقطه در فضا را به عنوان ورودی بگیرد. و سپس :

۱. اگر این ۴ نقطه روی یک خط بودند، کلمه line و معادله‌ی خط را در خروجی چاپ کند.

۲. اگر این ۴ نقطه در یک صفحه و روی یک مثلث بودند، کلمه triangle و مساحت مثلث را در خروجی چاپ کند.

۳. اگر این ۴ نقطه در یک صفحه روی یک متوازی‌الاضلاع بودند، کلمه parallelogram و مساحت متوازی‌الاضلاع را در خروجی چاپ کند.

۴. در صورتی که هیچ کدام از شرایط بالا برقرار نبودند، کلمه none را در خروجی چاپ کند.

نمونه‌ای از هر کدام از ۳ حالت بالا در برنامه خود گزارش کنید.(برای محاسبه‌ی دترمینان، استفاده از توابع آماده آزاد است.)

۱۳. فرض کنید تبدیل‌های A ، B ، C و D به صورت زیر تعریف شده باشند :

۱. A دوران حول محور $(3.8, 1.7, 1.3)$

۲. B قرینه حول محور $(9.3, -6.7, 1.5)$

۳. C تجانس با ضریب 5.7 و مرکز روی مبدا.

۴. D اسکیل با ضریب $(3, 5.6, -3.5)$ در راستای محور x, y, z .

بدون استفاده از تشکیل معادله و تنها با استفاده از مفهوم، یک بردار ویژه برای هر کدام از این تبدیل‌ها به همراه دلیل مشخص کنید.

۱۴. از بین مفاهیم Eigenfrequency ، Eigenfaces و Eigenvoices ، به دلخواه تحقیق کرده و کمی در مورد نحوه استفاده از مقادیر و بردارهای ویژه در آن‌ها توضیح دهید. (اگر مفهوم دیگری نیز می‌شناسید که علاقه دارید در مورد استفاده از مقادیر و بردارهای ویژه در آن توضیح دهید، می‌توانید به جای این سه ، در مورد آن بنویسید.)