



به نام خدا
سیستم‌های کنترل پیشرفته
تمرین سری اول
۱۴۰۳-۱۴۰۲



تاریخ بارگذاری: ۱۴۰۲/۰۷/۲۴

تاریخ تحویل: ۱۴۰۲/۰۸/۱۲

دستیار آموزشی مسئول: **عرفان باقری سولا، مصطفی حمیدی فرد** (erfan.b.soula@ut.ac.ir, mhamidifard@ut.ac.ir)

خواهشمند است جهت تحویل تمرین به نکات زیر توجه داشته باشید:

۱. دانشجویان می‌توانند سوالات خود را پیرامون تمرین، با دستیار آموزشی مسئول از طریق راه‌های ارتباطی در نظر گرفته شده، مطرح کنند.
۲. پاسخ‌های خود را، تا موعد ذکر شده به صورت یک فایل PDF یکپارچه، در سامانه ایلرن بارگذاری نمایید. توجه داشته باشید که فایل ارسالی نیاز به چرخش یا تغییر وضوح نداشته باشد.
۳. نگارش پاسخ‌ها به ترتیب و خوانا باشد. مسیر حل دارای نمره است و در صورت خوانا نبودن، نمره آن قسمت کسر خواهد شد.

سوال ۱

به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) تمام مقادیر ممکن برای x و y را به نحوی بیابید که مجموعه بردارهای زیر مستقل خطی باشد.

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 2y^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ xy \end{pmatrix} \right\}$$

ب) طبق نتایج بخش قبل، یک مقدار دلخواه برای x و y انتخاب کنید به نحوی که α یک پایه برای \mathbb{R}^3 باشد. حال ماتریس تبدیل پایه P از β به α را بیابید.

$$\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$$

سوال ۲

بعد فضای جواب دستگاه های معادلات خطی زیر را مشخص کنید و سپس معادلات را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 5x_5 = 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = -3 \\ 5x_1 - 12x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 7 \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \quad (۲)$$

سوال ۳

درستی یا نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

الف) $rank(A^k) \geq k \cdot rank(A) - (k-1)n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

ب) $rank(A^k) \leq rank(A)$

ج) اگر فضای پوچی A تهی باشد آنگاه $rank(AB) = rank(A)$

د) فضای پوچی A بر $range(A^T)$ عمود است.

ه) به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $rank(xy^T) = 1$

و) در صورتی که ماتریس متقارن A مثبت معین باشد آنگاه ماتریس $Q^T A Q$ نیز مثبت معین خواهد بود.

سوال ۴

از سیگنال آنالوگی با فرکانس ۱ هرتز نمونه برداری و در بردار $x \in \mathbb{R}^n$ ذخیره شده است. ماتریس $D \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n}$ را بیابید که در بردار x ضرب شده و مشتق عددی این سیگنال را برگرداند. رنک ماتریس D و یک پایه برای فضای پوچی آن بدست آورید.

مشتق عددی یک سیگنال برابر است با:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &\in \mathbb{R}^{n-1} \\ x_i^{(1)} &= \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}, i = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (۳)$$

الف) ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & a \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

به ازای چه مقادیری از a مقادیر ویژه این ماتریس برابر ۰، ۳ و -۳ خواهد شد؟

ب) A یک ماتریس 3×3 است و داریم: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ اگر $Av = -v$ و $Aw = 2w$ ، بردار b را به شکلی بدست آورید که رابطه زیر برقرار باشد:

$$b = A^5 \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

ج) تمام مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1001 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 1003 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 1005 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 1007 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 1009 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1011 \end{bmatrix}$$

سوال ۶

دو سیستم مجزا وجود دارد که قصد داریم مقدار یک کمیت در سیستم اولیه را با استفاده از مقدار کمیت دیگری در سیستم دوم کنترل کنیم، از این رو هر دو سیستم را در قالب یک سیستم کلی مدل کرده‌ایم. ماتریس مدلسازی سیستم کلی به صورت زیر در می‌آید. برای آنالیز این سیستم نیاز به فرم جردن و ماتریس Q داریم. فرم جردن و ماتریس Q را برای ماتریس A بدست آورید. (راهنمایی: با توجه به صورت سوال سعی کنید فرم جردن ماتریس‌های کوچکتری را حل کنید)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

سوال ۷

الف) سیستم اولیه‌ای وجود دارد که ورودی بردار می‌گیرد و در ماتریس B ضرب کرده و در خروجی، برداری با ابعاد یکسان تولید می‌کند. در یک فرایند طراحی قرار است چند نمونه یکسان از این سیستم را سری (Cascade) کرده و خروجی را آنالیز کنیم. با فرض آنکه ۱۰۰ سیستم به صورت سری قرار گرفته باشند و ماتریس تمامی سیستم‌ها، ماتریس B باشد آنگاه سیستم معادلی که به جای این سیستم‌های سری می‌توان قرار داد دارای چه ماتریس معادلی است؟

$$B = \begin{bmatrix} -7 & 4 & -4 \\ -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ب) شرایط لازم و کافی برای ماتریس X را به گونه‌ای بدست بیاورید تا عبارت زیر به ازای k ثابت برقرار باشد.

$$X^k = X, \quad X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

الف) a و b در چه شرایطی صدق کنند تا عبارت زیر همواره به ازای هر x_1, x_2, x_3 مخالف صفر، نامنفی باشد:

$$y = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2bx_1x_3 + ax_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \quad (۵)$$

ب) در صورتی که A یک ماتریس متقارن باشد، شرایطی را برای λ پیدا کنید که به ازای آن ماتریس $B = A + \lambda I$ مثبت معین شود.