



به نام خدا  
سیستم‌های کنترل پیشرفته  
تمرین سری سوم  
۱۴۰۳-۱۴۰۲



تاریخ بارگذاری: ۱۴۰۲/۰۹/۰۲

تاریخ تحویل: ۱۴۰۲/۰۹/۱۷

دستیار آموزشی مسئول: نوید دهبان (naviddhn@gmail.com)

خواهشمند است جهت تحویل تمرین به نکات زیر توجه داشته باشید:

۱. دانشجویان می‌توانند سوالات خود را پیرامون تمرین، با دستیار آموزشی مسئول از طریق راه‌های ارتباطی در نظر گرفته شده، مطرح کنند.
۲. پاسخ‌های خود را، تا موعد ذکر شده به صورت یک فایل PDF یکپارچه، در سامانه ایلرن بارگذاری نمایید. توجه داشته باشید که فایل ارسالی نیاز به چرخش یا تغییر وضوح نداشته باشد.
۳. در صورتی که در سوالات، شبیه‌سازی از شما خواسته شده بود، صرفاً نتایج را در فایل PDF بیاورید. کد و فایل‌های شبیه‌سازی را به صورت یک فایل zip همراه تمرین ارسال نمایید.

## سوال ۱

نقاط تعادل سیستم‌های زیر را بیابید و نوع پایداری را در نقاط تعادل هم به روش خطی سازی و هم به روش لیاپانوف (برای نقاط پایدار) بررسی کنید.  
(الف)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_1x_2 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_1x_2 + x_1 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 2x_2 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_2^2 \end{cases}$$

## سوال ۲

سیستم زیر را در نظر بگیرید. نقاط تعادل سیستم را بیابید. برای نقطه تعادل سیستم در مبدا، ابتدا با خطی سازی سیستم و تشکیل معادله لیاپانوف پایداری را بررسی کنید و سپس با انتخاب یک تابع لیاپانوف مناسب، پایداری سیستم غیرخطی را مورد بررسی قرار دهید.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_2^3 \end{aligned}$$

## سوال ۳

سیستم اسکالر  $\dot{x} = ax^p + g(x)$  را در نظر بگیرید که در آن  $P$  یک عدد صحیح مثبت است و  $g(x)$  رابطه‌ی  $|g(x)| \leq k|x|^{p+1}$  را در یک همسایگی از مبدا ارضا می‌کند. نشان دهید که مبدا این سیستم به صورت مجانبی پایدار است، اگر  $P$  فرد باشد و  $a < 0$ . همچنین نشان دهید مبدا این سیستم ناپایدار است اگر: (الف)  $P$  فرد باشد و  $a > 0$  (ب)  $P$  زوج باشد و  $a \neq 0$

## سوال ۴

سیستم

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + b, \\ \dot{x}_2 = -cx_2 + x_1(\alpha - \beta x_1 x_2) \end{cases}$$

را که در آن تمامی ثابت‌ها و ضرایب مثبت هستند، در نظر بگیرید. نشان دهید نقطه تعادل این سیستم پایدار است. (تابع لیاپانوف را با ساختار  $V(z) = k_1 z_1^4 + k_2 z_1^2 + k_3 z_2^2$  در نظر بگیرید.)

## سوال ۵

سیستم

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + 8(x_1^2 + x_2^2)\sin(2t), \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 - x_1 + 8(x_1^2 + x_2^2)\cos(2t), \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید.

(الف) با تعریف یک تابع لیاپانوف مناسب، پایداری مبدا را نشان دهید و تخمینی از ناحیه جذب ارائه کنید.  
 (ب) با استفاده از نرم‌افزار MATLAB پاسخ زمانی سیستم را در بازه‌ی  $[0, 40]$  ثانیه به ازای شرایط آغازین  $(\frac{1}{6}, 0)^T$ ،  $(\frac{1}{10}, \frac{1}{4})^T$  و  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{10})^T$  به دست آورده و در سه نمودار مجزا رسم کنید. آیا نتایج شبیه‌سازی با نتایج بند (الف) مطابقت دارد؟ توضیح دهید.