



به نام خدا
دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده برق و کامپیوتر

درس تحقیق در عملیات

پروژه درس

دی ۱۴۰۲

فهرست سوالات

سوال ۱.....	۳
سوال ۲.....	۵
سوال ۳.....	۶
نکات تحویل:	۸

سوال ۱

مشکل حمل و نقل و توزیع کالا از مبدا به مقصد یکی از مسائلی است که نیاز به حل به وسیله الگوریتم‌های بهینه‌سازی دارد. در این موضوع، هدف به حداقل رساندن هزینه‌های حمل و نقل در حالی است که محدودیت‌های موجود در منابع و نیازهای هر منطقه برآورده شود.

در اینجا ما مشکل حمل و نقل را با استفاده از مثالی نشان می‌دهیم. در این مثال دو کارخانه (Gou, Arn) و شش گره مشتری واقع در ۸ شهر اروپایی وجود دارد که در نقشه زیر نشان داده شده است. گره‌های مشتری با برجسب قرمز و کارخانه‌ها با برجسب آبی مشخص شده‌اند.



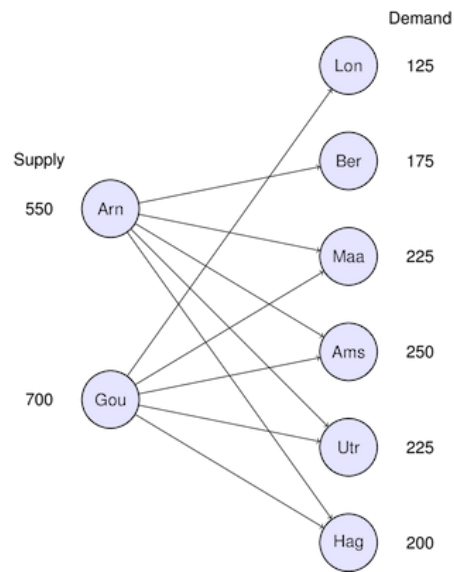
شکل ۱. نقشه کارخانه‌ها و مشتری‌ها

هزینه حمل و نقل کالا بین کارخانه و هر مشتری بر حسب واحد یورو به ازای هر تن کالا آورده شده است. در ستون آخر نیز میزان تقاضای هر گره مشتری درج شده است. در سطر آخر، میزان موجودی هر کارخانه قرار گرفته است.

جدول ۱. میزان تقاضای هر گره بر حسب تن و هزینه ارسال بر حسب یورو به ازای هر تن

Customer/Source	Arnhem[euro/ton]	Gouda[euro/ton]	Demand [tons]
London	-	2.5	125
Berlin	2.5	-	175
Maastricht	1.6	2.0	225
Amsterdam	1.4	1.0	250
Utrecht	0.8	1.0	225
The Hague	1.4	0.8	200
Supply [tons]	550 tons	700 tons	

مسئله را می‌توان به صورت زیر تصویرسازی کرد که هر متقاضی باید میزان نیاز خود را از دو کارخانه تامین کند.



شکل ۲. تصویرسازی صورت مسئله

بین هر کارخانه و هر مشتری، یک پارامتر $T[c,s]$ داریم که نشان‌دهنده هزینه ارسال کالا از این مسیر به ازای هر تن است که در جدول ذکر شده بود. پارامتری که باید تعیین گردد، میزان کالایی است که باید از طریق هر کارخانه ارسال شود، که آن را به عنوان متغیر تصمیم‌گیری غیرمنفی، $x[c,s]$ نشان خواهیم داد. در اینجا، هدف به حداقل رساندن کل هزینه حمل و نقل به همه مشتریان است.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{c \in \text{Customers}} \sum_{s \in \text{Sources}} T[c,s] x[c,s] \\ & \sum_{c \in \text{Customers}} x[c,s] \leq \text{Supply}[s] \quad \forall s \in \text{Sources} \\ & \sum_{s \in \text{Sources}} x[c,s] = \text{Demand}[c] \quad \forall c \in \text{Customers} \end{aligned}$$

۱. با استفاده از پکیج Pyomo مسئله را طرح کرده و سپس حل نمایید.
۲. در بخش قبل مسئله در حالتی حل گردید که Arn و Gou به ترتیب ۵۵۰ و ۷۰۰ تن تولیدی داشتند. حال این مسئله را یک بار دیگر با فرض تولیدی به ترتیب ۶۰۰ و ۶۵۰ حل کنید.
۳. دو حالت توزیع کالا بین کارخانه‌ها را با هم مقایسه کنید و نشان دهید کدامیک مزیت بیشتری دارد.

سوال ۲

در مسائل بهینه‌سازی، به‌ویژه زمانی که با توابع درجه دوم سروکار داریم، الگوریتم گرادیان نزولی (gradient descent) روشی پرکاربرد برای یافتن نقطه بهینه تابع است.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x + p$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x)$$

که Q یک ماتریس مثبت معین متقارن، q یک بردار و p یک اسکالر است. در الگوریتم گرادیان نزولی، همواره با گام α در خلاف گرادیان تابع حرکت می‌کنیم تا به نقطه بهینه برسیم. حال عملکرد الگوریتم گرادیان نزولی را می‌توان با انتخاب یک اندازه گام بهینه در هر تکرار تا حد زیادی بهبود داد. در این بخش قرار است ثابت کنید که طول گام (step size) بهینه α برای الگوریتم گرادیان نزولی هنگامی که به تابع درجه دوم داده شده اعمال می‌شود به صورت زیر است:

$$\alpha = \frac{\nabla f(x)^T \nabla f(x)}{\nabla f(x)^T Q \nabla f(x)}$$

برای اثبات این قضیه به ترتیب مراحل زیر را طی کنید:

۱. ابتدا گرادیان تابع درجه دو $\nabla f(x)$ را محاسبه کنید.
۲. از آنجا که تنها جهت گرادیان برای بهینه‌سازی مهم است، گرادیان محاسبه شده را نرمالایز کنید.
۳. متغیر α باید به گونه‌ای تعیین گردد که تابع $f(x - \alpha \nabla f(x))$ را نسبت به خود کمینه کند. در نتیجه مشتق نسبت به α را برابر صفر قرار داده و بدین صورت مقدار بهینه برای α را بدست آورید.
۴. الگوریتم گرادیان نزولی با طول گام بهینه را در زبان پایتون و برای مقادیر زیر پیاده‌سازی کرده و مقدار بهینه x را گزارش کنید.

$$Q = \begin{pmatrix} 48 & 12 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 13 \\ 23 \end{pmatrix}, p = 4, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 23 \\ 37 \end{pmatrix}$$

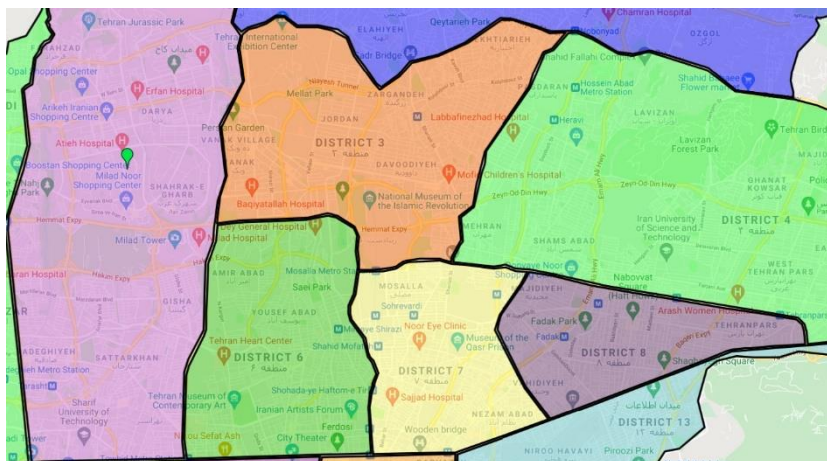
۵. حال با فرض طول گام ثابت، مسئله را دوباره حل کرده و نقطه کمینه تابع را بیابید. (برای تحلیل این بخش حداقل دو طول گام متفاوت را بیازمایید)

سوال ۳

هدف این سوال ترکیب دانشی که در این درس به دست آمده و مهارت به کارگیری برنامه‌نویسی زبان پایتون برای طراحی و حل یک مسئله بهینه‌سازی در دنیای واقعی می‌باشد. در این مسئله یافتن بهترین مسیر با توجه به شروط مورد بررسی قرار گرفته است. در ابتدا داده‌های مورد نیاز (مانند نام مکان‌ها و مختصات) جمع‌آوری شده و به شما داده شده است و باید نمودار مدل آن را طراحی کنید. در قسمت دوم، مدل بهینه‌سازی را با استفاده از داده‌های آماده شده در قسمت اول تعریف می‌کنیم تا بهترین مسیر بین دو مکان متمایز را با حداقل کردن هزینه از نظر مسافت، ترافیک و غیره پیدا کند. رویه‌های اجرای قسمت ۱ و ۲ به طور مفصل در این ادامه توضیح داده شده‌اند.

تولید داده

برای این منظور از نقشه گوگل شهر تهران استفاده شده است که دارای اطلاعات مطلوب از فاصله‌ها و وضعیت ترافیک مسیرها می‌باشد. حداقل ده مکان از جمله دانشگاه‌ها، بیمارستان‌ها، ایستگاه‌های مترو و ... در منطقه ۳ و منطقه ۶ که در شکل ۱ نشان داده شده است در نظر گرفته می‌شود. سپس ویژگی‌های زیر برای مکان‌های انتخابی استخراج می‌شود:

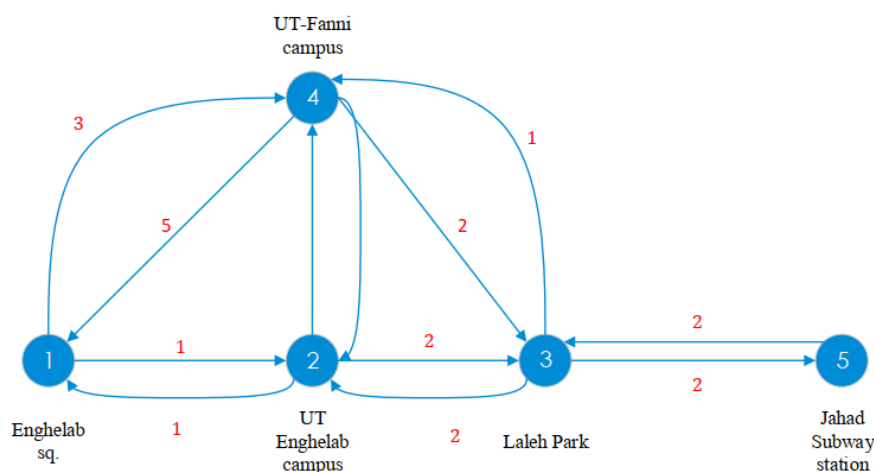


شکل ۳. نقشه برخی مناطق تهران

- شاخص مکان: تخصیص هر مکان یک عدد
- نام مکان: نام مکان‌ها به انگلیسی
- عرض جغرافیایی، طول جغرافیایی: مختصات مکان‌ها
- همسایگان: شاخص‌های مکان‌های مجاور
- وزن همسایگان: وزن (هزینه) بین دو مکان متمایز که براساس گزارش‌های نقشه گوگل از فاصله، زمان و وضعیت ترافیک مشترک است.

نمودار مدل

در این مرحله، شما باید یک نمودار از مدل خود، از جمله نام گره‌ها، شاخص‌ها و وزن هر مسیری که استفاده می‌کنید را ترسیم کنید. به عنوان مثال، یک گراف نمونه با پنج مکان در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۴: یک نمودار نمونه از پنج مکان در منطقه ۶ تهران

نمودار پیاده‌سازی شده خود را در گزارش بیاورید.

حداقل مسیریابی هزینه

در این بخش، هدف شما مدل کردن مساله بهینه‌سازی با توجه به هزینه‌ها و محدودیت‌ها است. ابتدا در مورد مشخصات و محدودیت‌های مدل در گزارش خود توضیح دهید.

پس از تعیین مدل و محدودیت‌ها، یک کد پایتون بنویسید که مسیر بهینه بین هر دو مکان مشخص را با استفاده از داده‌های آماده شده ای که به شما داده شده است محاسبه کند. کد پایتون شما به عنوان ورودی مبدا و مقصد داده شده را می‌گیرد و سپس مسیر بهینه را باز می‌گرداند. خروجی‌های کد عبارتند از:

- شاخص‌های مبدا و مقصد همراه با مختصات آن‌ها
- شاخص‌های همه مکان‌ها در مسیر بهینه
- هزینه کل مسیر بهینه

نکته: شما می‌توانید از کتابخانه‌های pulp یا mip در پایتون برای مدل‌سازی و حل مشکل بهینه‌سازی خود استفاده کنید.

نکات تحویل:

- مهلت تحویل این پروژه تا ساعت ۱۲ شب ۱۹ دی میباشد.
- انجام این تمرین به صورت **یک نفره** است.
- برای انجام این تمرین تنها مجاز به استفاده از زبان برنامه نویسی **پایتون** هستید.
- در صورت وجود تقلب نمره تمامی افراد شرکت کننده در آن **۰** لحاظ میشود.
- لطفا پاسخ تمرین خود را (به همراه کد/گزارش سوال کامپیوتری) به صورت زیر در صفحه درس آپلود نمایید:

HW [HW number] _ [Last name] _ [Student number].zip

- در صورت وجود هر گونه ابهام یا مشکل میتوانید از طریق ایمیل (shervinmahmoudi2005@gmail.com, farbodsiahkali80@ut.ac.ir) با مسئول حل تمرین در تماس باشید.