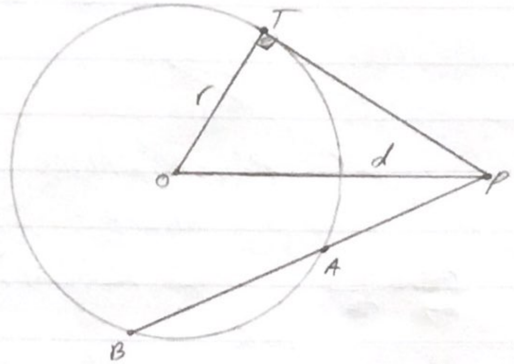
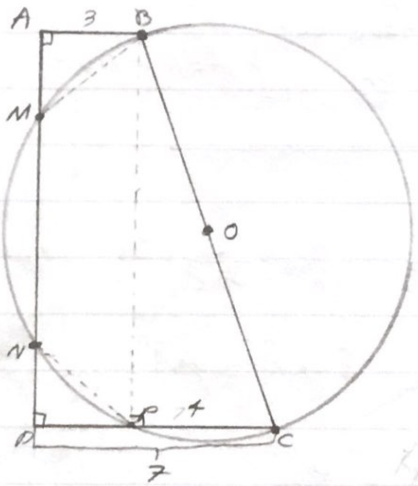
توان نقطهٔ P را به دایرهٔ C(O) اینگونه بیان می‌کنیم:



$$P^{P}_{C(O)} : |d^2 - r^2| = PT^2 = PA.PB$$



$AM.MP = ?$

$$B\hat{P}C = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90$$

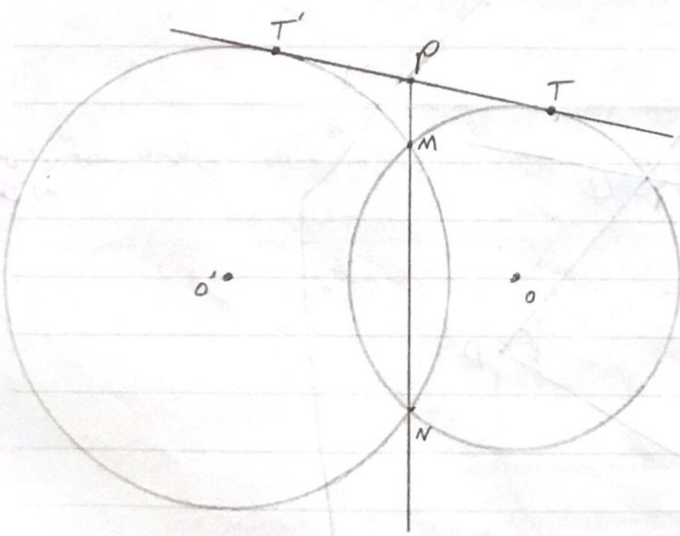
$$DP = 3 \Rightarrow PC = 4$$

$$\boxed{DN \times MD = 3 \times 7 = 21}$$

$$\left.\begin{array}{l} N\hat{P}B = \dfrac{\widehat{BMN}}{2} \\ MBP = \dfrac{\widehat{NMB}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow N\hat{P}B = M\hat{B}P \Rightarrow N\hat{P}D = ABM$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{NP} = \widehat{MB} \Rightarrow NP = MB \\ AB = DP = 3 \\ N\hat{P}D = A\hat{B}M \end{array}\right\} \overset{\triangle}{ABM} = \overset{\triangle}{DPN}$$

$$AM.MP \Rightarrow DN = AM \Rightarrow DN.MD \Rightarrow AM.MP = 21$$



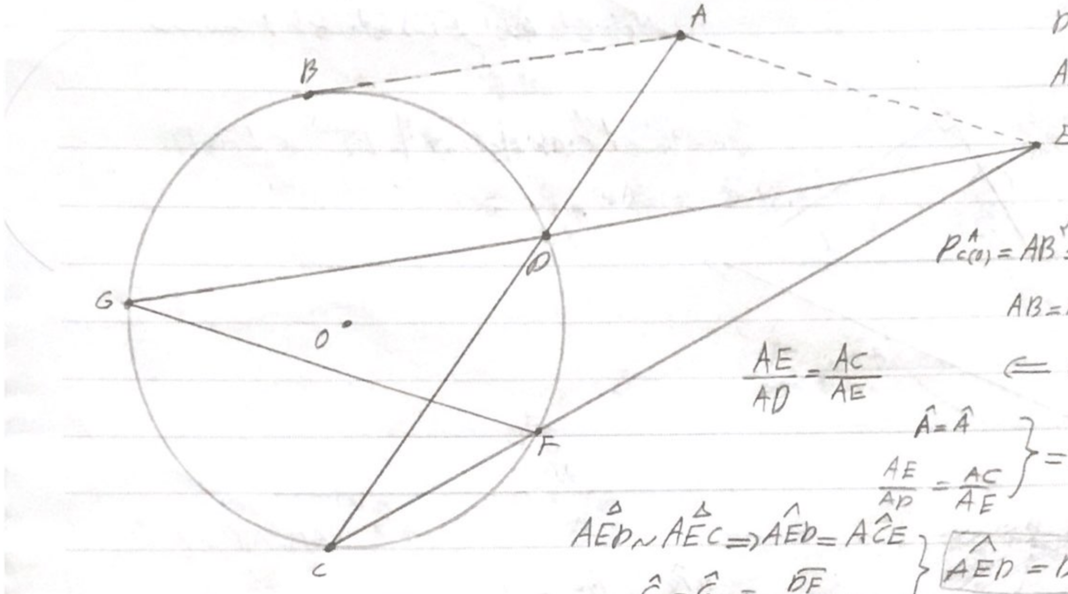
حکم: $PT' = PT$

$$\left.\begin{array}{l} P^{P}_{C(O)} = PT^2 = PM.PN \\ P^{P}_{C(O')} = PT'^2 = PM.PN \end{array}\right] \Downarrow$$

$$P^{P}_{C(O)} = P^{P}_{C(O')}$$

$$PT^2 = PT'^2$$

$$PT = PT'$$



حکم: $D\hat{G}F = A\hat{E}D$

ثابت کنید: $AE \parallel GF$

$P^{A}_{C(O)} = AB^2 = AD \cdot AC$

$AB = AE$

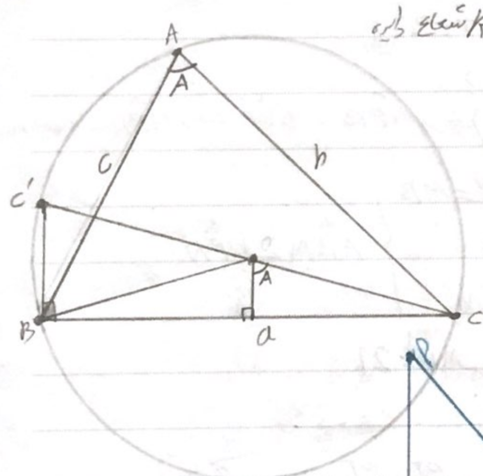
$\Leftarrow AE^2 = AD \cdot AC$

$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AE}$

$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{A} \\ \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AE}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AED} \sim \overset{\triangle}{AEC}$

$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{AED} \sim \overset{\triangle}{AEC} \Rightarrow A\hat{E}D = A\hat{C}E \\ \hat{C} = \hat{G} = \frac{\overset{\frown}{DF}}{2}\end{array}\right\} \boxed{A\hat{E}D = D\hat{G}F}$

R شعاع دایره



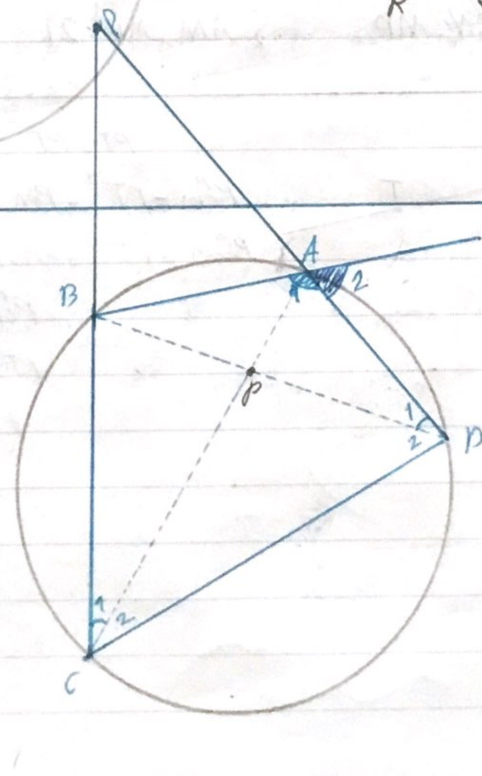
ثابت کنید: $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$

$\sin C' = \frac{a}{2R}$ $\quad \hat{C}' = \hat{A} \Rightarrow \sin\hat{A} = \frac{a}{2R}$

$\sin\hat{A} = \frac{a/2}{R} = \frac{a}{2R}$

$AP \cdot PC = BP \cdot PD$

$PB \cdot PC = PA \cdot PD$

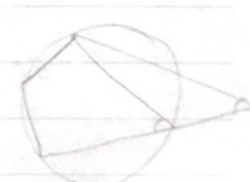


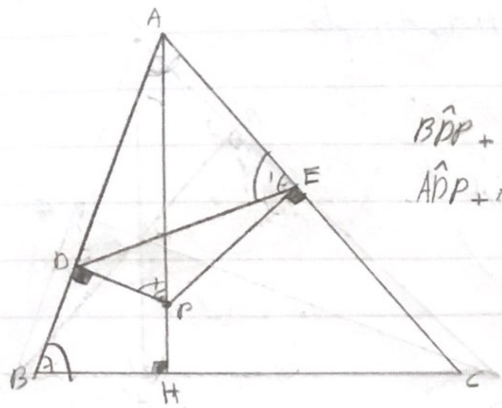
$\hat{D} + \hat{B} = 180$

$\hat{D}_1 = \hat{C}_1$

$C = A_2$

عکس این قضیه با برهان خلف است

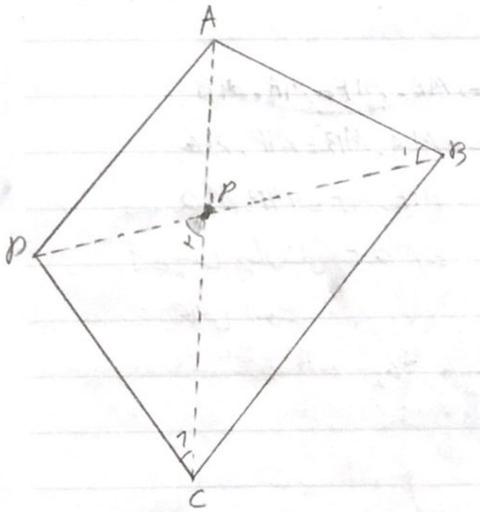




ثابت کنید BDEC چهارضلعی محاطی است.

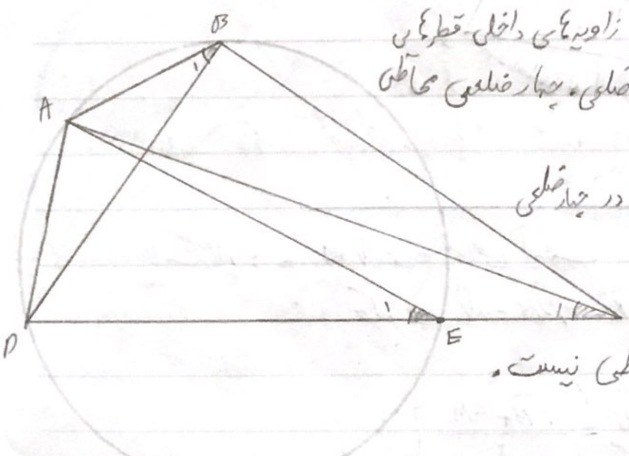
حکم: $E_1 = B$

$$\left.\begin{array}{l} B\hat{D}P + B\hat{H}P = 180 \quad BDPH \text{ محاطی} \Rightarrow B = P_1 \\ A\hat{D}P + A\hat{E}P = 180 \quad ADPE \text{ محاطی} \Rightarrow P_1 = E_1 \end{array}\right\} E_1 = P_1$$



فرض: $AP.PC = BP.PD$ حکم: $B_1 = C_1$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = P_2 \\ \frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PC} \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{B}P \sim D\hat{P}C \Rightarrow B_1 = C_1$$



ثابت کنید که در صورتی که در یک چهار ضلعی اگر زاویه‌های داخلی قطرهایی که به یک ضلع نگاه می‌کنند، برابر باشند، چهارضلعی، چهارضلعی محاطی است.

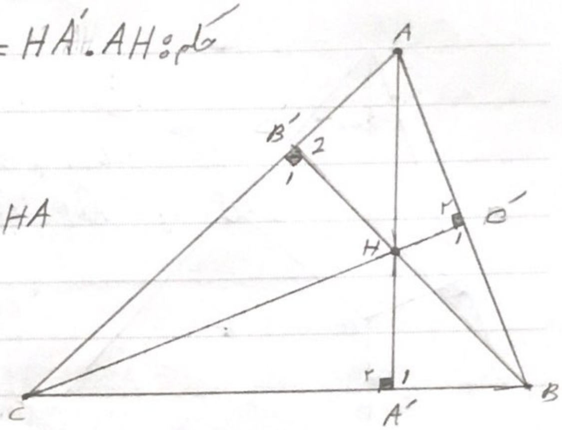
فرض: $C_1 = B_1$ در چهارضلعی ABCD

برهان خلف: فرض می‌کنیم که ABCD یک رأسش روی دایره نیست، یعنی چهارضلعی محاطی نیست.

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = B_1 \\ B_1 = E_1 = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \end{array}\right\} C_1 = E_1$$

⇐ برای اینکه همچین چیزی درست نیست (AC با AE موازی نیست) پس چهار ضلعی غیر محاطی نیست.

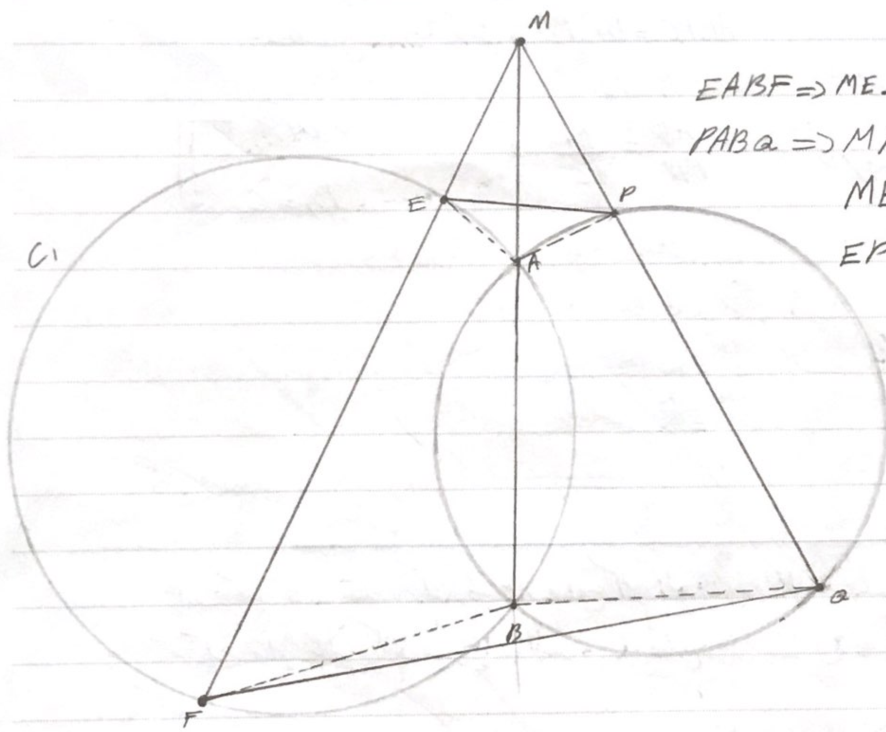
حکم: $HB.HB' = HC.HC' = HA'.AH$



$C'_1 + B'_1 = 180 \Rightarrow CB'C'B$ محاطی $\Rightarrow C'H.HC = B'H.HB$

$A'_2 + C'_2 = 180 \Rightarrow AC'A'C$ محاطی $\Rightarrow C'H.HC = A'H.HA$

$HB.HB' = HC.HC' = HA'.AH$

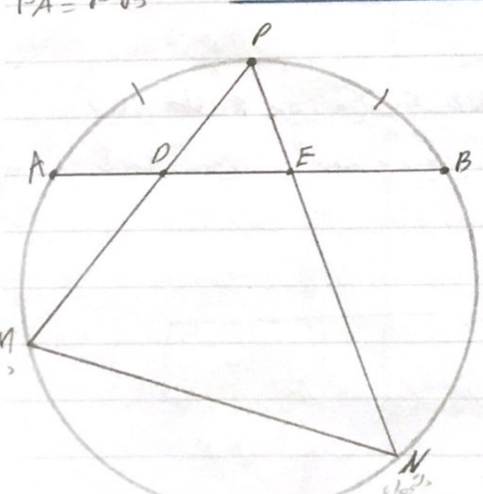


$EABF \Rightarrow ME.MF = MA.MB$

$PABQ \Rightarrow MA.MB = MP.MQ$

$ME.MF = MP.MQ$ پس چهارضلعی $EPQF$ محاطی است

$\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{PB}$

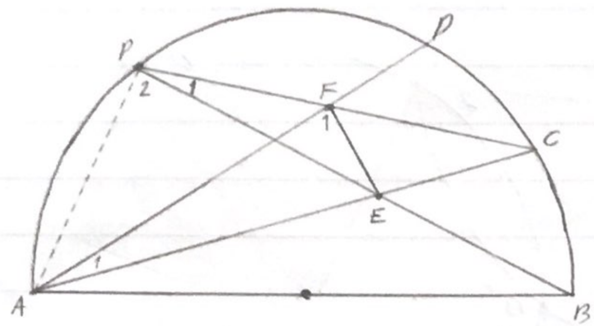


ثابت کنید: $DENM$ محاطی است

حکم: $P\hat{D}B = \hat{N}$

$$\left.\begin{array}{l} P\hat{D}B = \dfrac{\overset{\frown}{PB} + \overset{\frown}{AM}}{2} \\ \hat{N} = \dfrac{\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{AM}}{2} \\ \overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{PB} \end{array}\right\} P\hat{D}B = \hat{N}$$

$\Rightarrow MDEN$ محاطی



ثابت کنید: $AD \perp EF$

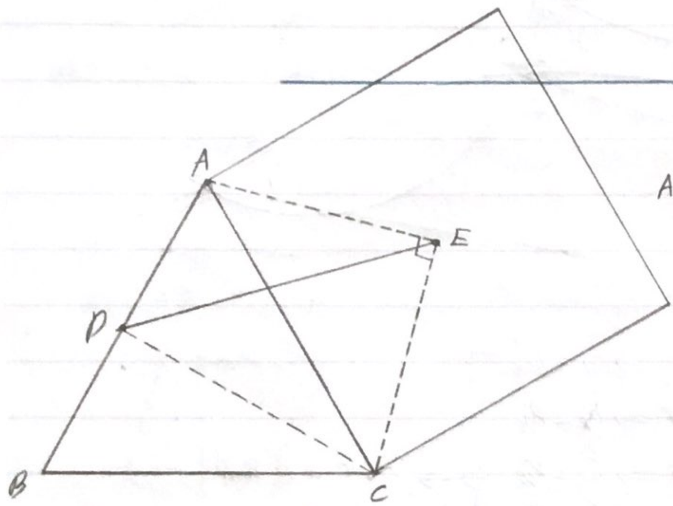
حکم: $\widehat{AFE} = 90^\circ$

فرض: $\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{CB}$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} \\ P_1 &= \frac{\overset{\frown}{CB}}{2} \\ \overset{\frown}{DC} &= \overset{\frown}{CB} \end{aligned}\right\} A_1 = P_1$$

پس چهارضلعی PFEA محاطی است

بنابراین: $\left.\begin{aligned} F_1 &= P_2 \\ P_2 &= 90 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{F_1 = 90}$

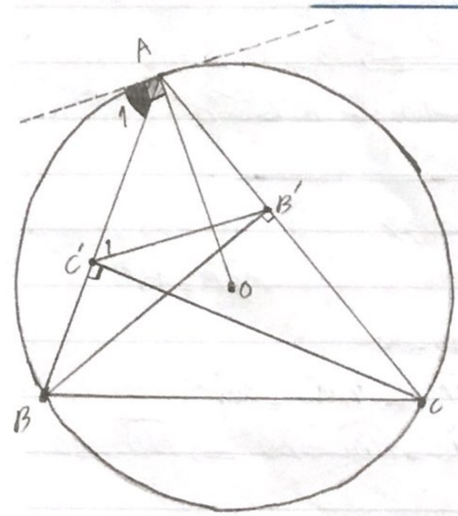


اندازه $\widehat{ABE}$ را بیابید:

$\widehat{ADC} = \widehat{E} = 90^\circ$

$\widehat{D} + \widehat{E} = 180 \Rightarrow ADCE$ محاطی

$\widehat{ADE} = \widehat{ACE} = \boxed{45^\circ}$

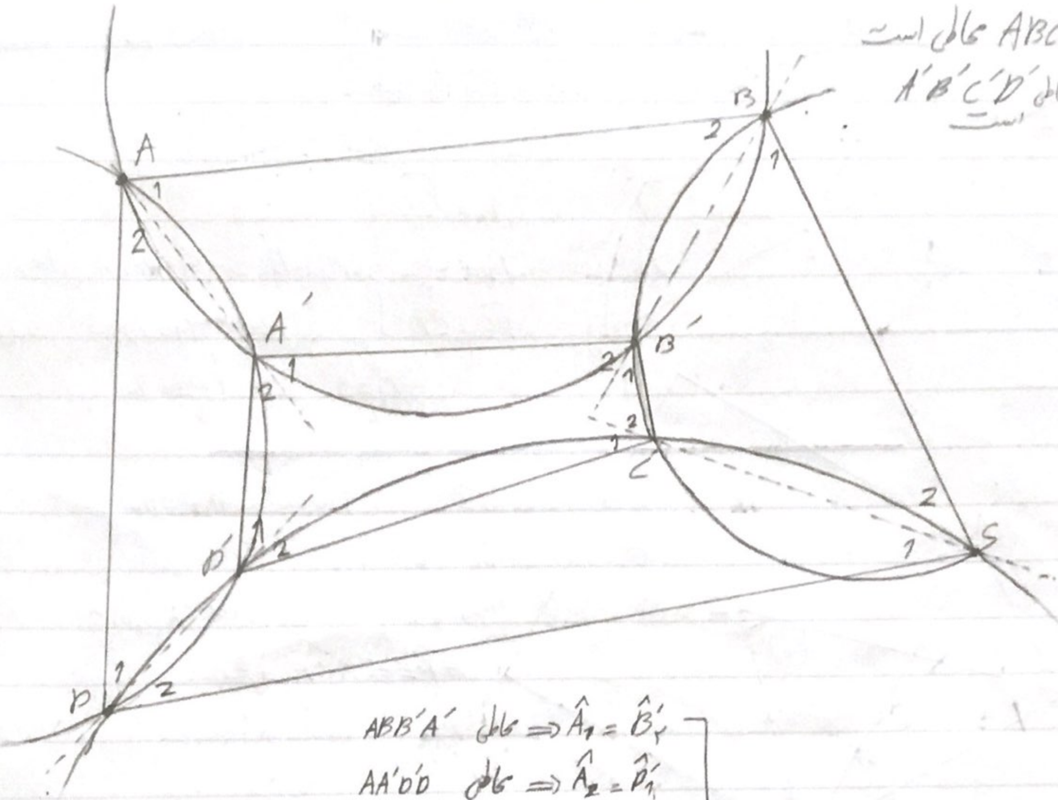


حکم: $OA \perp C'B'$

حکم معادل: $C'_1 = A_1$

$$\left.\begin{aligned} CC'B + BB'C = 180 &\Rightarrow C = C'_1 \\ A_1 = C &= \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{aligned}\right\} A_1 = C'_1$$

فرض: ABCD محاطی است
حکم: A'B'C'D' محاطی است



$ABB'A'$ محاطی $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}'_2$
$AA'D'D$ محاطی $\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D}'_1$
$DD'C'C$ محاطی $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}'_2$
$CBB'C'$ محاطی $\Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{B}'_1$

$\oplus \rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B}' + \hat{D}'$

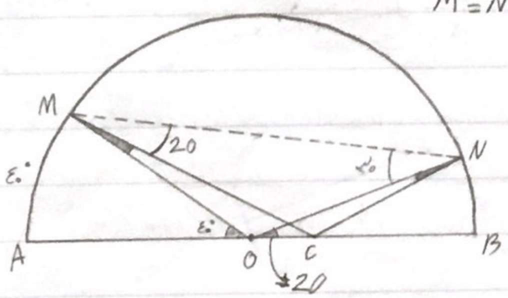
$\hat{A} + \hat{C} \xrightarrow{ABCD \text{ محاطی}} \hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰ \Longrightarrow \hat{B}' + \hat{D}' = ۱۸۰$

$A'B'C'D'$ محاطی است

فرض: $\hat{M} = \hat{N} = ۱۰^\circ$ و $\widehat{AM} = ۴۰^\circ$

$\widehat{BN}$: ?

$\widehat{MOB} = ۱۴۰^\circ$



$\hat{M} = \hat{N} = ۱۰^\circ \Rightarrow OMNC$ محاطی

$OM = ON \Rightarrow \widehat{MNO} = \widehat{NMO} = 30^\circ$

$OMNC$ محاطی $\Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{NOC} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{NB} = 20^\circ$

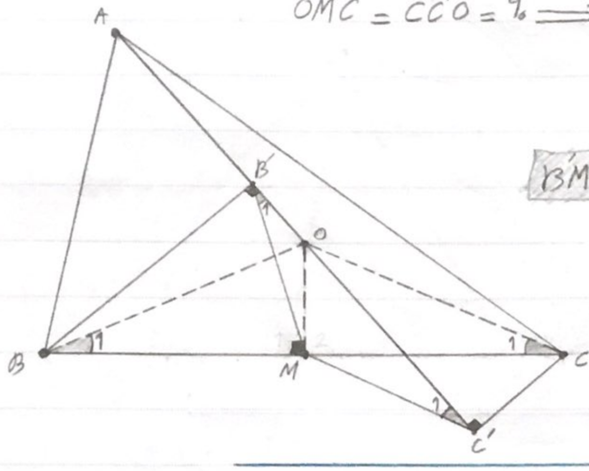
حکم: $C'M = B'M$

$\widehat{BB'O} + \widehat{BMO} = 180 \Longrightarrow BB'OM$ محاطی $\Rightarrow \hat{B'_1} = \hat{B_1}$

$\widehat{OMC} = \widehat{CC'O} = 90 \Longrightarrow CC'MO$ محاطی $\Rightarrow \hat{C_1} = \hat{C'_1}$

$BO = OC \Rightarrow \hat{B_1} = \hat{C_1}$

$\boxed{B'M = C'M} \Longleftarrow \hat{B'_1} = \hat{C'_1}$



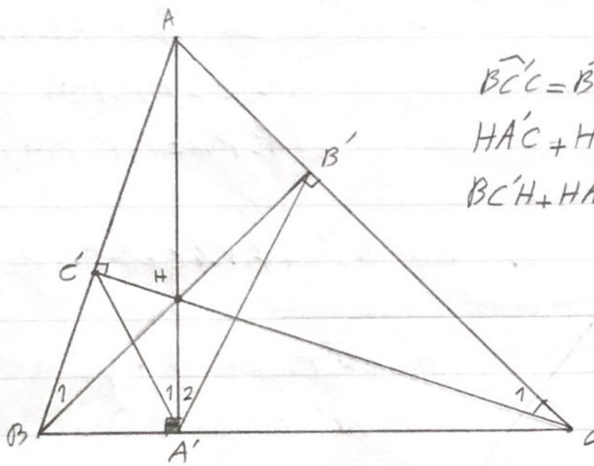
حکم: $A'_1 = A'_2$

$\widehat{BC'C} = \widehat{BB'C} = 90 \Longrightarrow BC'B'C$ محاطی $\Rightarrow \hat{B_1} = \hat{C_1}$

$HA'C + HB'C = 180 \Longrightarrow B'HA'C$ محاطی $\Longrightarrow \hat{A'_2} = \hat{C_1}$

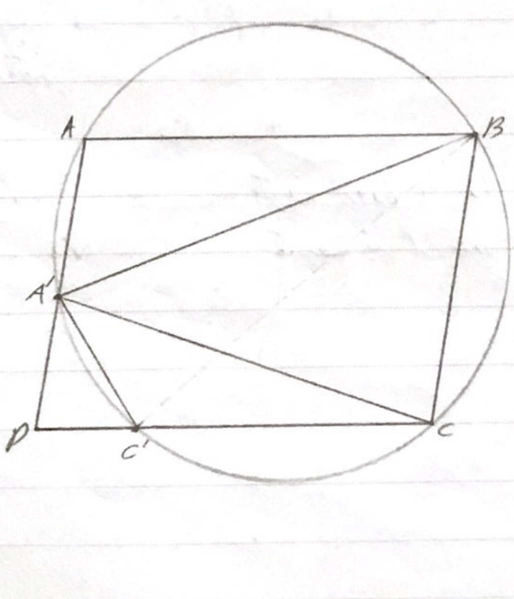
$BC'H + HA'B = 180 \Longrightarrow BC'HA'$ محاطی $\Longrightarrow \hat{B_1} = \hat{A'_1}$

$A'_1 = A'_2$

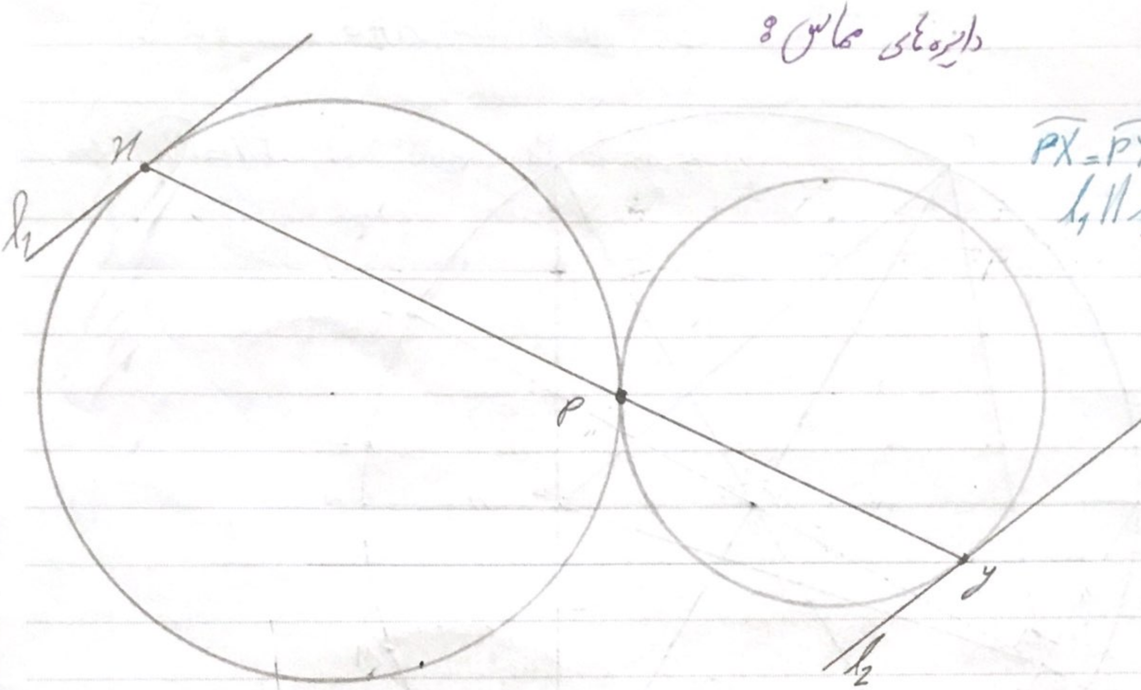


ثابت کنید: $\dfrac{A'D}{A'C'} = \dfrac{A'C}{A'B}$

حکم:



دایره‌های مماس :

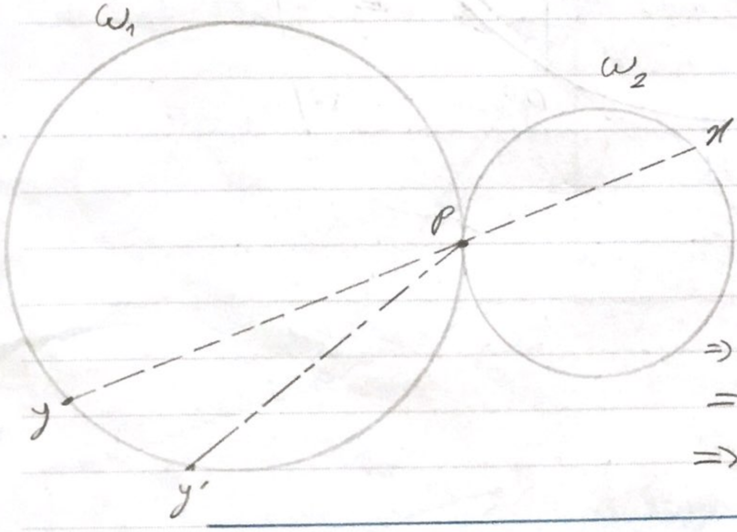


لم: #1

$\widehat{PX} = \widehat{PY}$ ، $l_1 \parallel l_2$

لم: #2

$PX = PY \Rightarrow X, P, Y$ همخط



اثبات: XP را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ ω_1 را در نقطهٔ y' قطع بکند

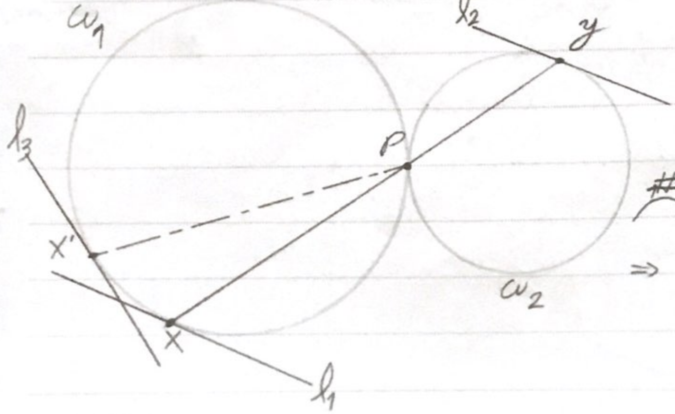
$\Rightarrow X\hat{P}B = Y\hat{P}C \Rightarrow \widehat{XP} = \widehat{PY'} = \widehat{PY} \Rightarrow Y\hat{P}Y' = 0$

$\Rightarrow$ y و y' : منطبق $\Rightarrow$

$\Rightarrow X, P, Y$ همخط

لم: #3 (مهم)

همخط: $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow x, P, y$



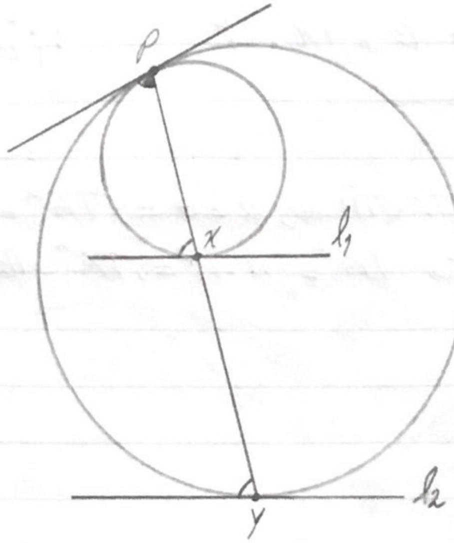
اثبات: yP را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ ω_1 را در x' قطع کند.

$\xrightarrow{\#1}$ $l_2 \parallel l_3$ ، $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow l_1 \parallel l_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x, x'$ منطبق

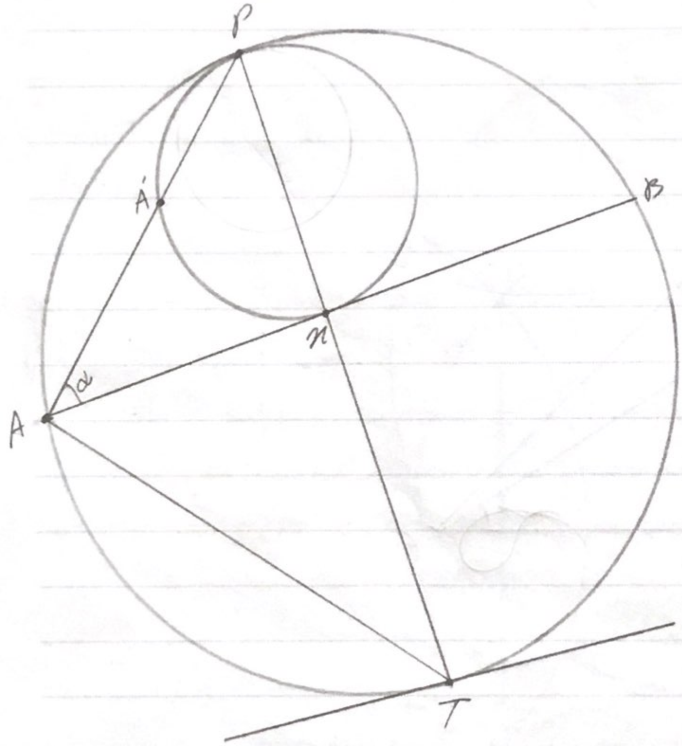
Subject: 11 — مماس درونی : — Date:

$\overset{\frown}{PX} = \overset{\frown}{PY},\ l_1 \parallel l_2$: لم #4



$$\left.\begin{array}{l} \hat{P} = \dfrac{\overset{\frown}{PY}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{PX}}{2} \\ \hat{x} = \dfrac{\overset{\frown}{Px}}{2} \\ \hat{y} = \dfrac{\overset{\frown}{Py}}{2} \end{array}\right\} \hat{y} = \hat{x} \Rightarrow l_1 \parallel l_2$$

$\overline{TA} = \overline{TB}$ لم (مهم) : #5



* اثبات :

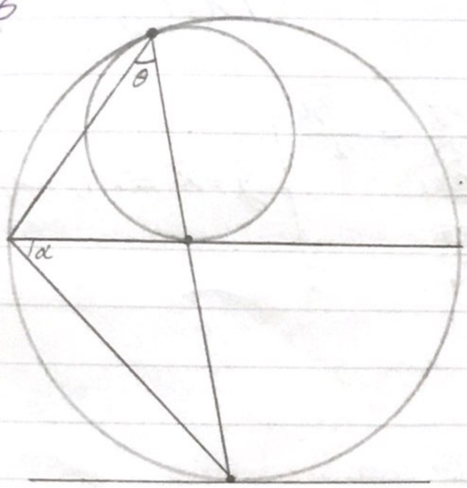
$\alpha = \frac{\overset{\frown}{PB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{Px} - \overset{\frown}{A'x}}{2}$, $\overset{\frown}{Px} = \overset{\frown}{PT},\ \overset{\frown}{A'M} = \overset{\frown}{AT}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{PT} - \overset{\frown}{AT},\ \overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{PT} - \overset{\frown}{BT}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{BT} \Rightarrow \overline{AT} = \overline{TB}$

#6

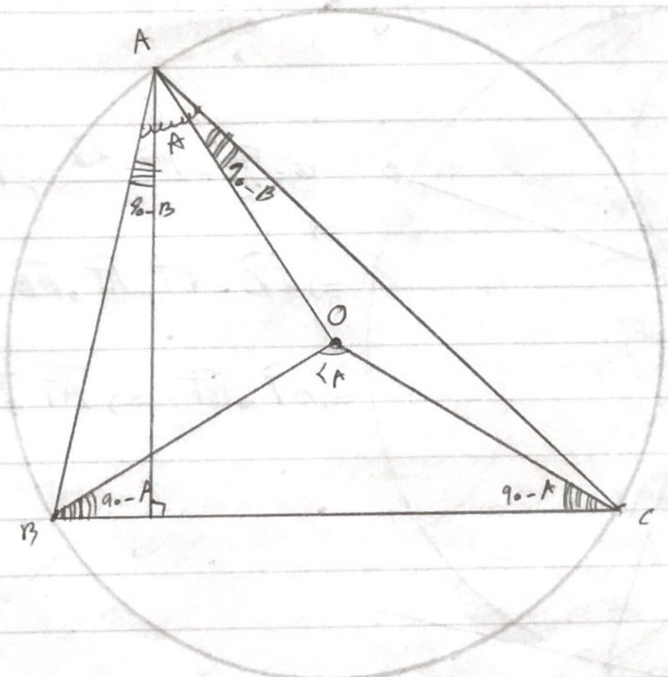


$TA^2 = TB^2 = Tx . TP$:لم خیلی مهم **

:اثبات *

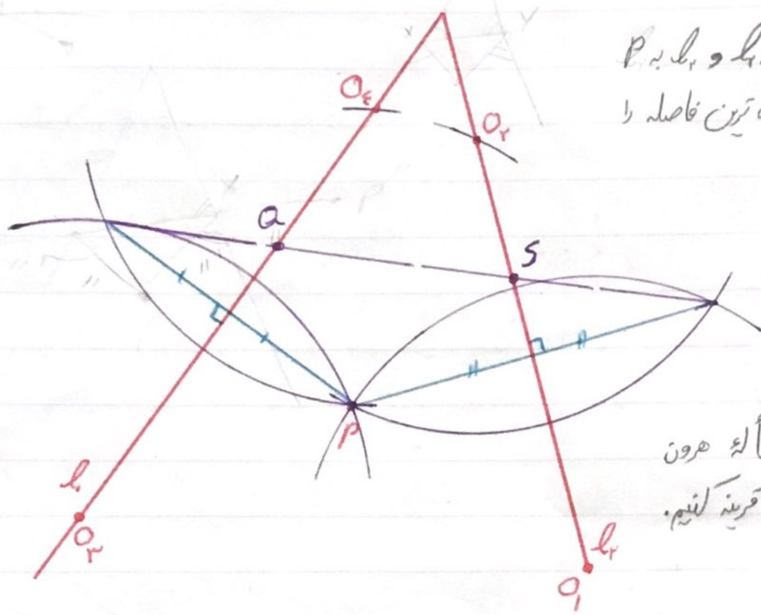
$\#5 : \overline{TA} = \overline{TB} \Rightarrow \alpha = \theta \Rightarrow TA^2 = Tx . TP$

به طریق مشابه $\rightarrow$ $TB^2 = Tx . TP \Rightarrow TA^2 = TB^2 = Tx . TP$



رسم : (پرگار و خط کش)

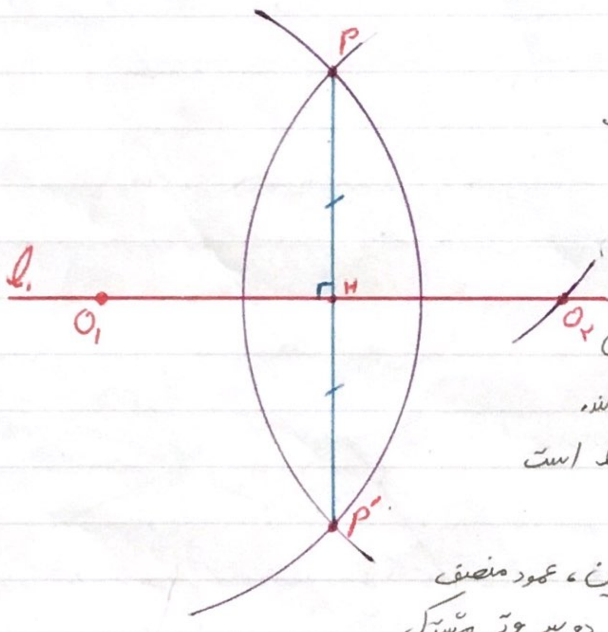
سوال : خطوط P به l_1 و l_1 به l_2 و l_2 به P را به گونه رسم کنید که کوتاه ترین فاصله را طی کند.



برای اینکار باید طبق مسألهٔ هرون P را نسبت به l_1 و l_2 قرینه کنیم.

قرینه کردن P نسبت به l_1 :

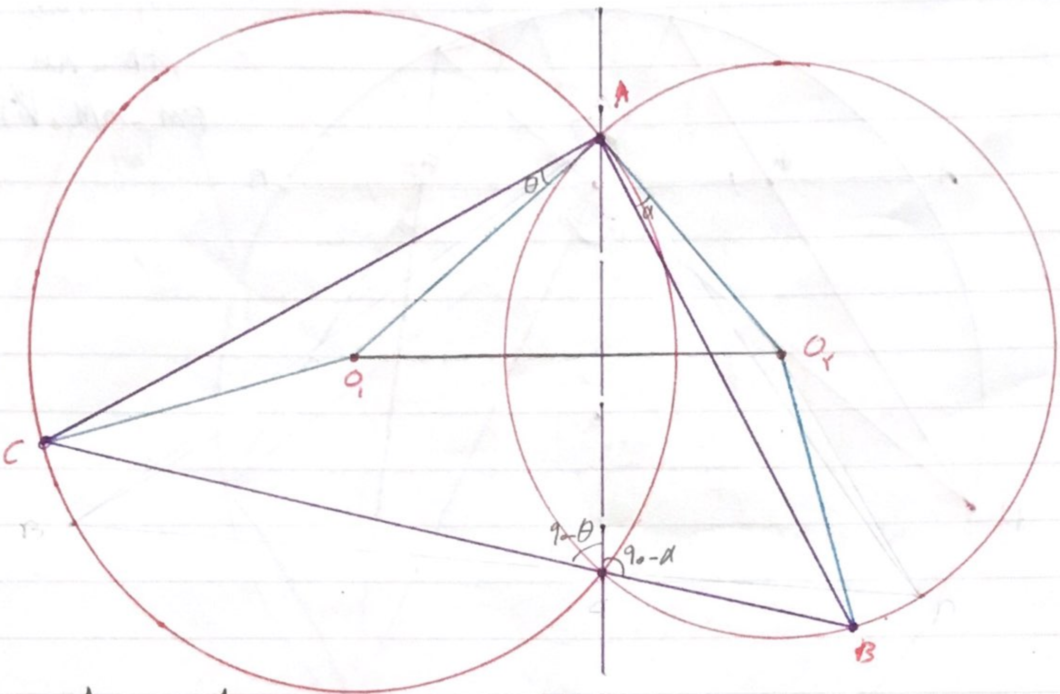
① مرکزی دلخواه (O_1) روی l_1 انتخاب می‌کنیم و کمانی از P می‌گذرانیم.



② سپس کمانی دلخواه گذرنده از P به مرکز O_2 (بر روی l_1) می‌زنیم تا کمان ابتدایی را در P' قطع کند.

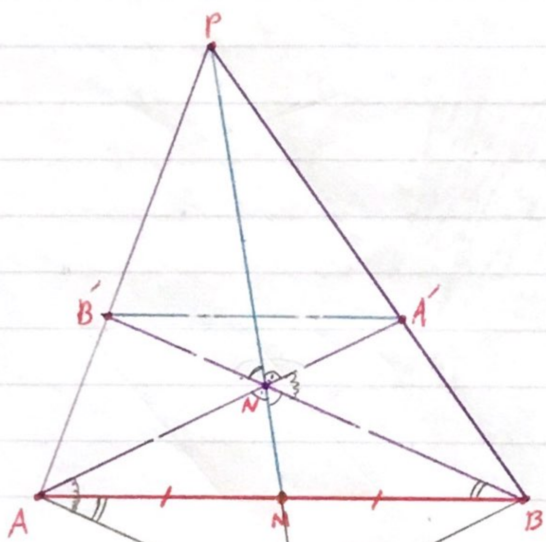
P' همان قرینهٔ P نسبت به l_1 است

اثبات : از آنجایی که خط المرکزین، عمود منصف وتر مشترک است، بنابراین دو سر وتر مشترک نسبت خط المرکزین قرینه است



$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AO_1O_2}$

لم: $\alpha=\theta$



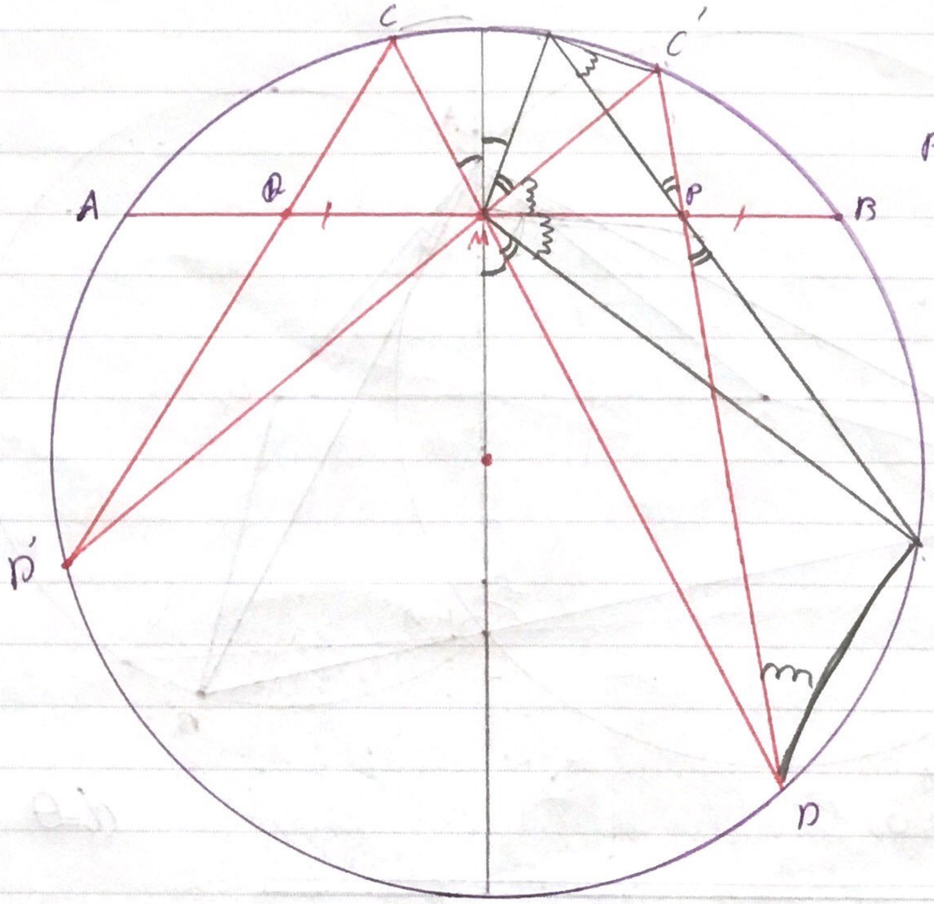
لم: کشیدن خطی موازی AB

(P دلخواه است)

اگر دو خط از A و B از N دلخواه بر روی میانه بگذرانیم تا PB و PA را در A' و B' قطع کند؛ آنگاه: $A'B' \parallel AB$

اثبات: نقطهٔ N را نسبت به M قرینه می‌کنیم، از آنجا که $N'B \parallel NA'$ و $AN' \parallel B'N$ است بنابراین $B'A'N \sim ABN'$ است

پس $A'\hat{B'}N = B\hat{A}N' = N\hat{B}A$ است



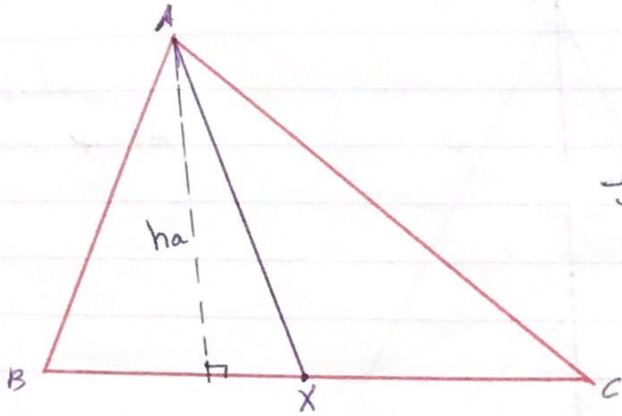
قضیهٔ پروانه:

اگر $MB = AM$

آنگاه $PM = QM$

Subject: Date:

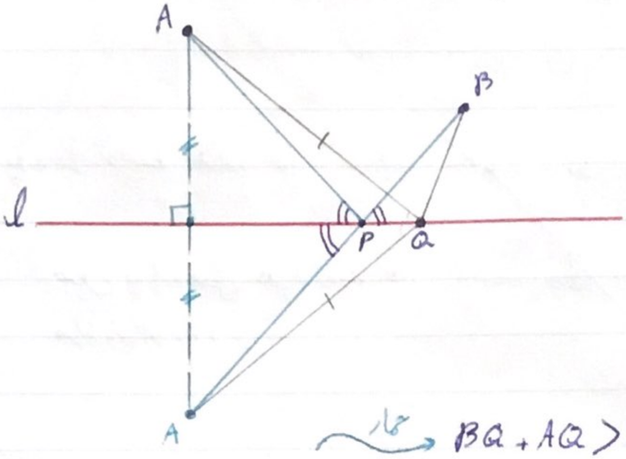
$$\frac{S_{ABX}}{S_{AXC}} = \frac{BX}{XC}$$ ثابت کنید 8



$$\left.\begin{aligned} S_{ABX} &= \tfrac{1}{2} \cdot XB \cdot h_a \\ S_{AXC} &= \tfrac{1}{2} \cdot XC \cdot h_a \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{S_{ABX}}{S_{AXC}} = \frac{BX}{CX}}$$

* مسألهٔ هرون P را روی l پیدا کنید طوری که: $AP+BP$ min



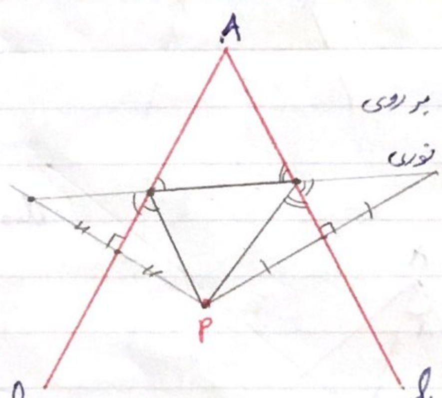
A را قرینه می‌کنیم تا A' به وجود آید و از آن به B وصل می‌کنیم

اثبات: Q را روی l به طور دلخواه انتخاب می‌کنیم.

$\xrightarrow{\text{حمار}}$ $BQ+AQ > BP+AP$ ... ✓

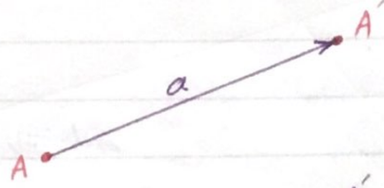
توجیه فیزیکی: پرتوی نور را طوری از A بر آینهٔ l بتابانید که بازتابش آن از B بگذرد

توجیه: اگر آینه دیدیم تصویر نقاط را در آینه ایجاد کنیم.

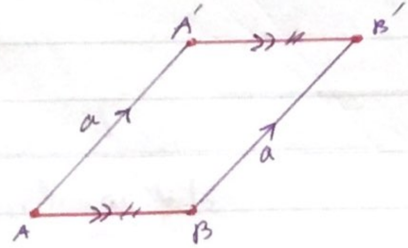


مسأله: B و C را طوری بر روی l_1 و l_2 انتخاب کنید که نوری که از P به $l_1(B)$ و $l_2(C)$ برخورد کند و به P برگردد

انتقال: انتقال یک تبدیل هندسی است. در این تبدیل نقطه A در راستای معلوم به مقدار مشخص جابه‌جا می‌شود

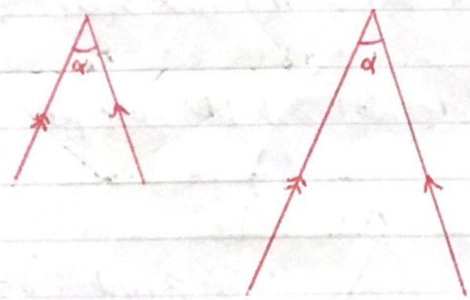


* پاره‌خط توسط انتقال کجا می‌رود؟

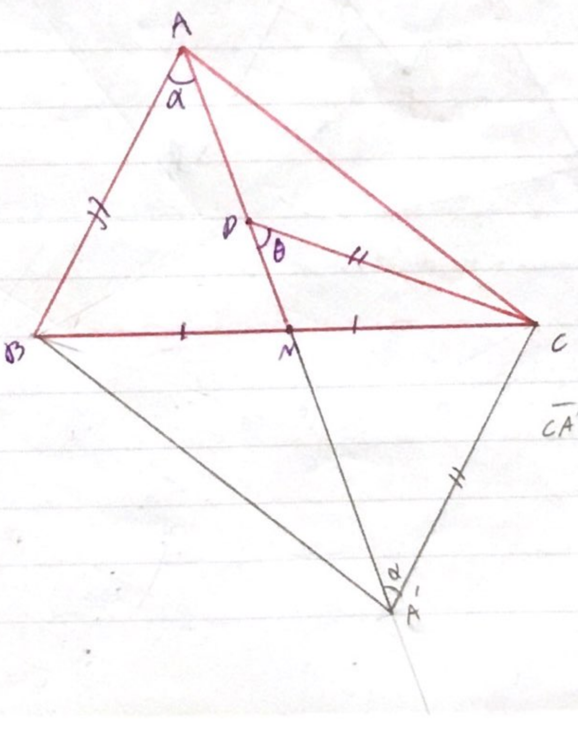


تبدیل به پاره‌خطی هم اندازه و موازی خودش می‌شود

* تحت انتقال زاویه به یک زاویه دیگر هم اندازه می‌شود که اضلاعش موازی با زاویه اولیه است

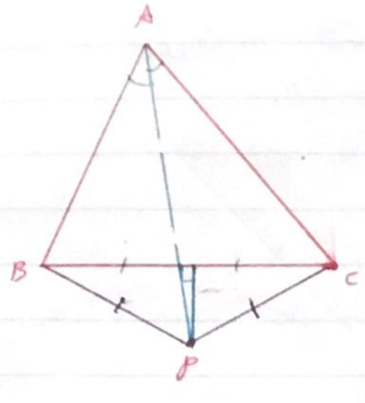


مثال: ثابت کنید: $\alpha = \theta$

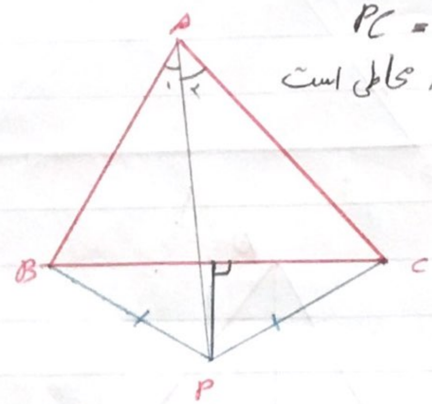


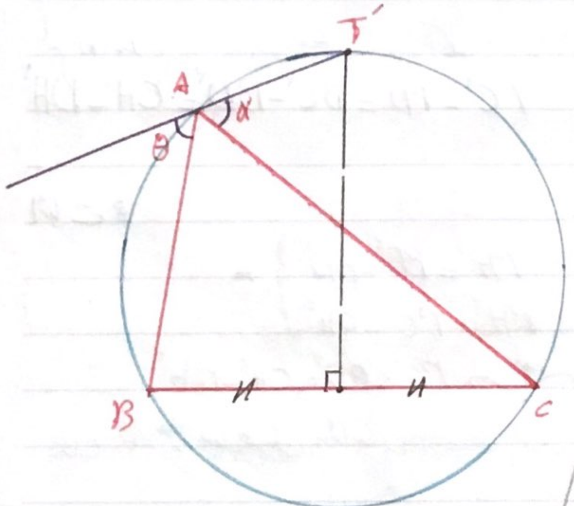
$CA' = CD \Rightarrow \alpha = \theta$

قضیهٔ 8 محاطی: ABPC محاطی است



نتیجه: اگر $PC = BP$
آنگاه: ABPC محاطی است
و $A_1 = A_2$



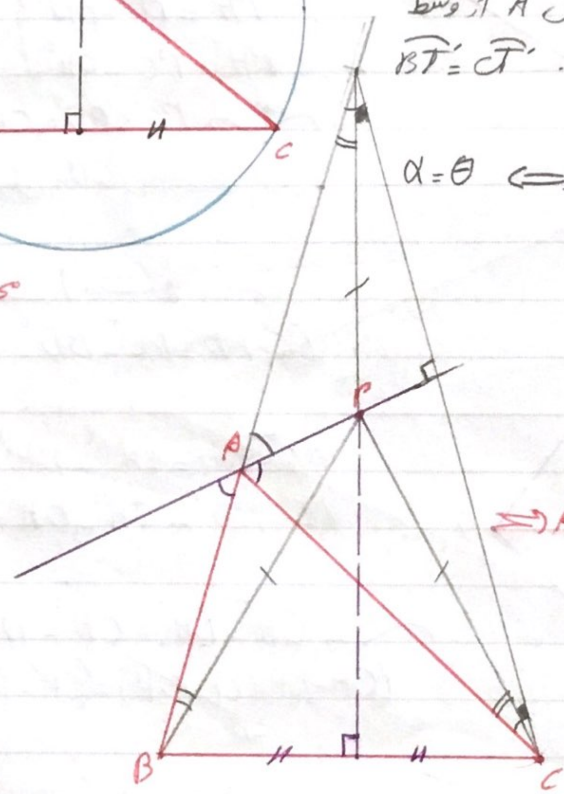


عمود منصف $\overline{BC}$ و نیم ساز خارجی $\hat{A}$ در محیط دایره برخورد می کنند

نتیجهٔ مهم: نیم ساز خارجی A از وسط $\overset{\frown}{BC}$ می گذرد. $\overset{\frown}{BT'} = \overset{\frown}{CT'}$

$\alpha = \theta \iff BT' = T'C$

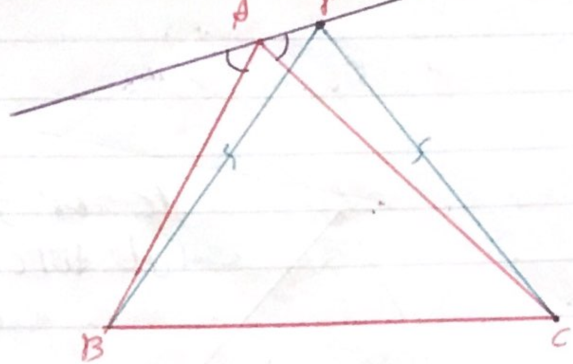
$ABCT'$: محاطی

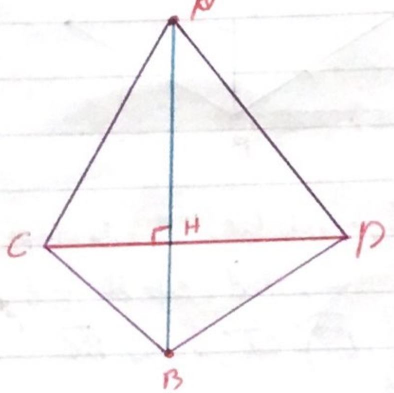


$\Rightarrow ABCP$ محاطی

قضیه ۹ محاطی:

ABCP محاطی است





لم تعامد: اگر $A\hat{H}C=90$ باشد، آنگاه:

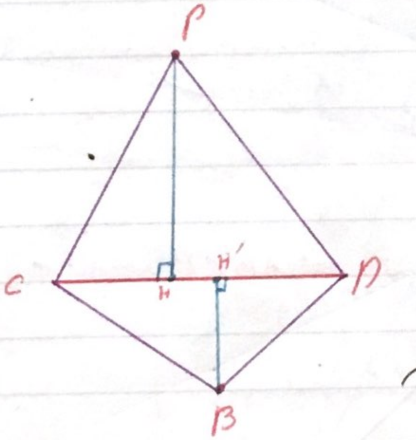
$$PC^2 - PD^2 = BC^2 - BD^2 = CH^2 - DH^2$$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} PH^2 = PD^2 - HD^2 \\ PH^2 = PC^2 - CH^2 \end{array}\right\} *$$

$$\xrightarrow{(*)} PC^2 - PD^2 = CH^2 - DH^2$$

برای B نیز به طریق مشابه



عکس لم نیز درست است:

فرض: $PC^2 - PD^2 = BC^2 - BD^2$

حکم: $H \equiv H'$

$$\left.\begin{array}{l} BC^2 - BD^2 = CH'^2 - DH'^2 \\ PC^2 - PD^2 = CH^2 - DH^2 \end{array}\right\} (*)$$

$$\xrightarrow{(*)} CH^2 - DH^2 = CH'^2 - DH'^2$$

$$(CH-DH)(\underbrace{\cancel{CH+DH}}_{CD}) = (CH'-DH')(\overbrace{\cancel{CH'+DH'}}^{CD})$$

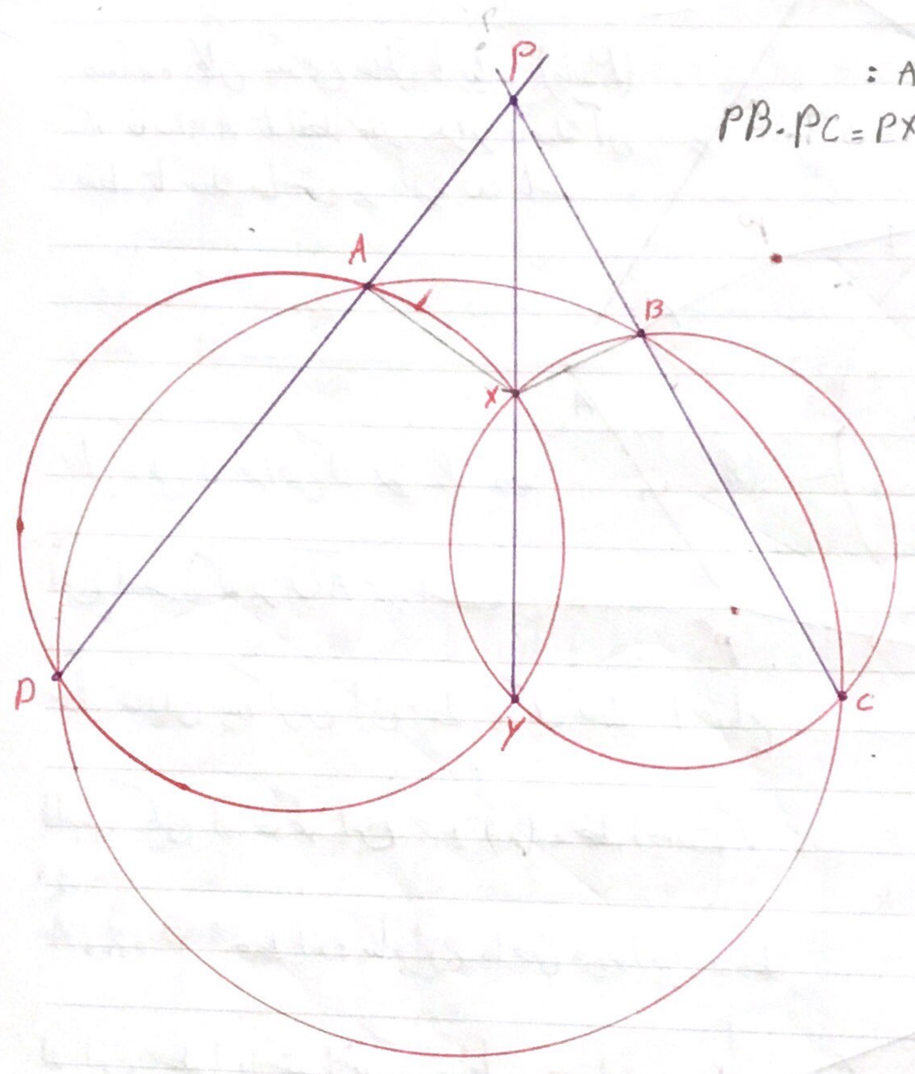
$$\Rightarrow CH - DH = CH' - DH' \quad (**)$$

$\xrightarrow{(**)}$ و $\xrightarrow{\text{حالت تساوی مزدوج}}$ $CH = CH'$ و $DH = DH'$

$\Rightarrow H \equiv H'$

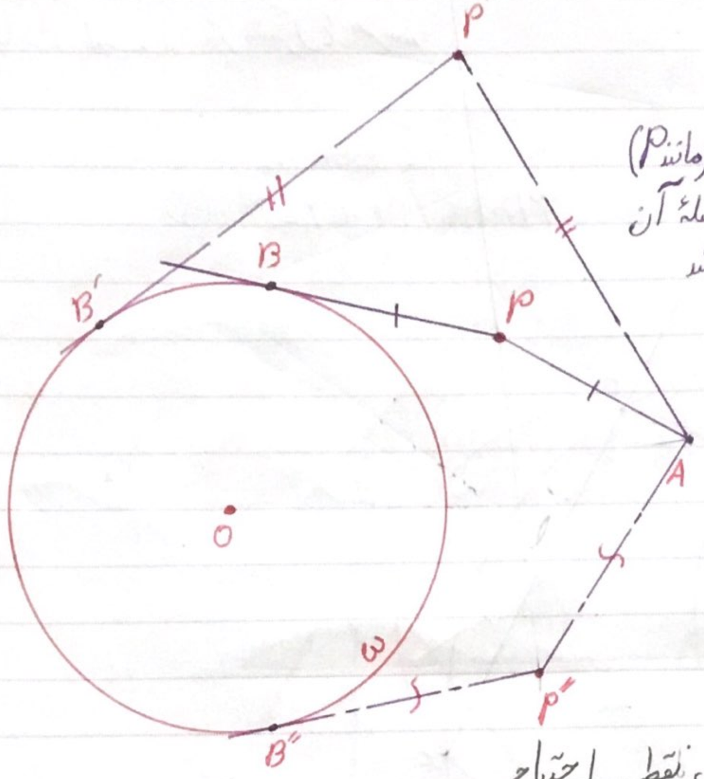
Subject: ۲۳ Date:

ثابت کنید ۳ وتر مشترک ۳ همرسند



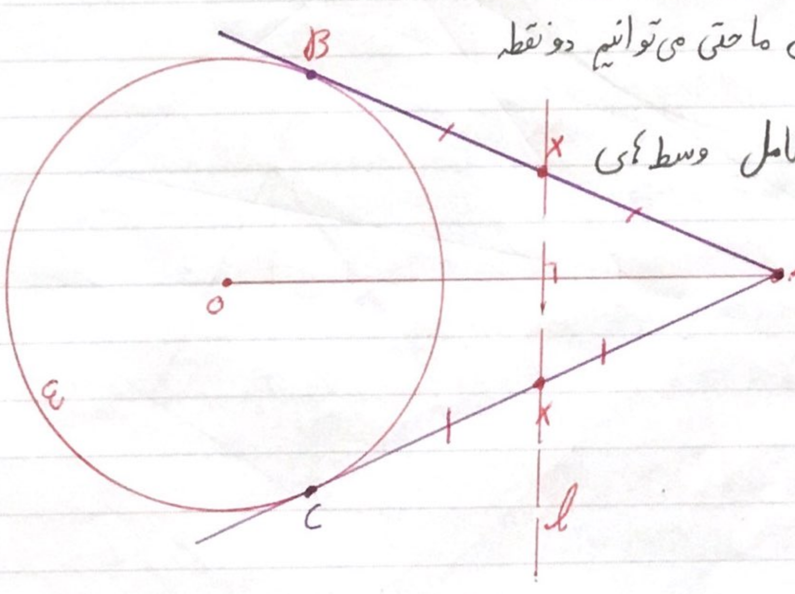
در چهارضلعی محاطی ABCD :

$$PB \cdot PC = PX \cdot PY = PA \cdot PD$$

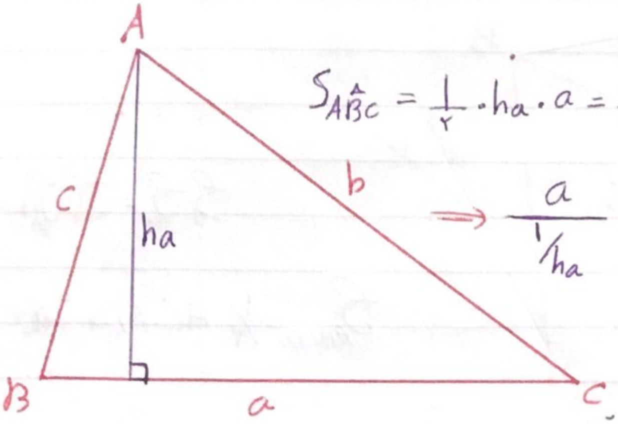


مسأله ۸: مکان هندسی نقاطی را بیابید (مانند P) که فاصلهٔ A تا نقطهٔ مذکور برابر فاصلهٔ آن نقطه تا نقطهٔ مماسش بر دایرهٔ ω باشد

حل: یکی از خواص که خط l دارد این است که بر $\overline{AO}$ عمود است. حال ما برای پیدا کردن این خط به یک نقطه احتیاج داریم. یکی از نقاط این خط (X)، نقطه ایست که A و X و B همخط اند؛ بنابراین ما حتی می‌توانیم دو نقطه از این خط را داشته باشیم که شامل وسط‌های مماس‌های مرسوم از A به دایرهٔ ω می‌باشند



مثلثات:



$$S_{\hat{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot h_a \cdot a = \frac{1}{2} \cdot h_b \cdot b = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1/h_a} = \frac{b}{1/h_b} = \frac{c}{1/h_c}$$

نتیجهٔ مهم

با $1/h_a$ و $1/h_b$ و $1/h_c$ می‌توان مثلثی مشابه $\hat{ABC}$ ساخت

$$1/h_a + 1/h_b > 1/h_c$$

* مسأله: h_a و h_b و h_c داده شده، مثلث متناظر با آن‌ها را رسم کنید.

*1

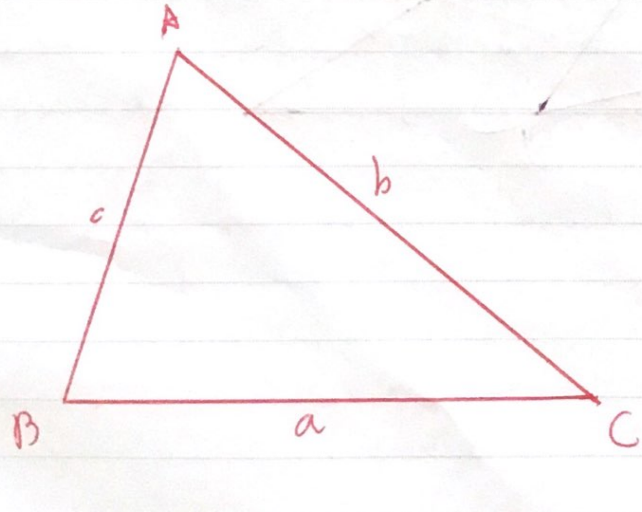
$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \\ h_a = b \cdot \sin\hat{C} \end{cases}$$

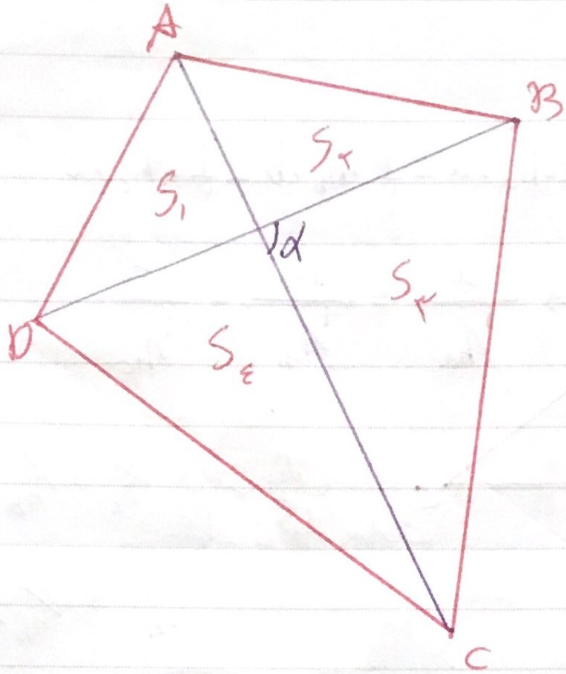
⇐ رابطهٔ 1 مساحت:

$$S = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin\hat{C} = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin\hat{A} = \frac{1}{2} \cdot ac \cdot \sin\hat{B}$$

تمرین:

$$S = abc/4$$





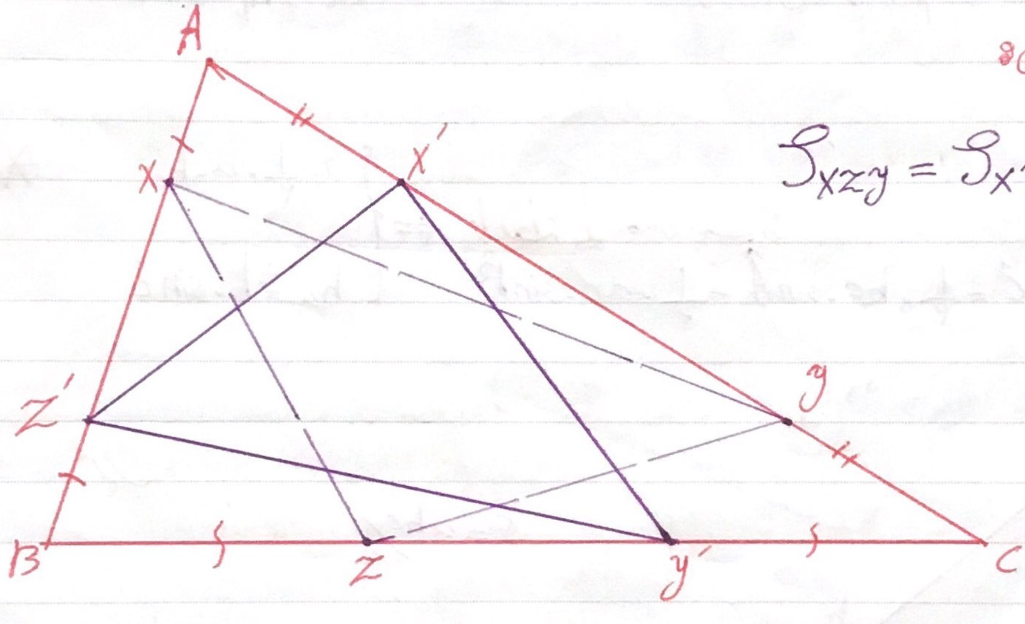
تمرین:

ثابت کنید:

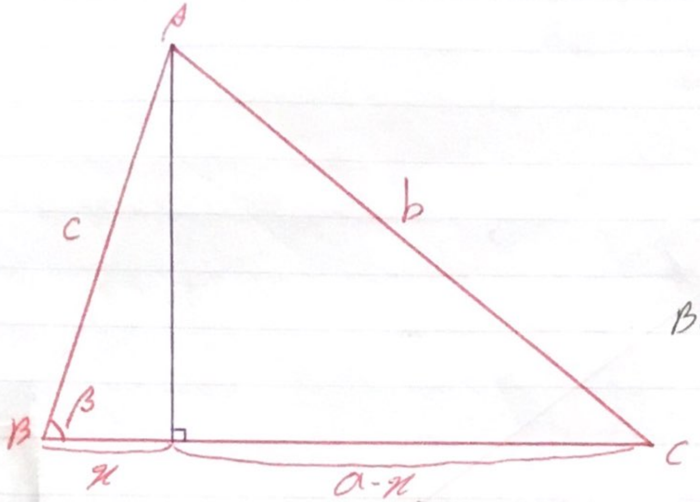
۱) $S_1 S_3 = S_2 S_4$

۲) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD \times \sin\alpha$

سوال ۵۰۰۰ تومانی:



$$S_{XZY} = S_{X'Z'Y'}$$



BC = C

$$\left.\begin{aligned} ha^2 + x^2 &= C^2 \\ ha^2 + (a-x)^2 &= b^2 \end{aligned}\right\} \overset{\ominus}{\Longrightarrow} a^2 - 2ax + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} = b^2 - c^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} &= x \\ \frac{x}{c} &= \cos\hat{\beta} \end{aligned}\right\} a^2 + c^2 - b^2 = 2ac\cos\hat{\beta}$$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A}$ * قضیهٔ کسینوس‌ها

$m^۲ = a^۲ + d^۲ - ۲ad\cos\alpha$

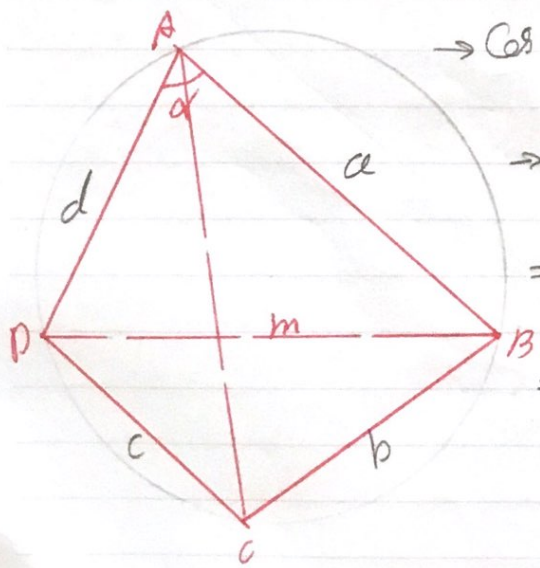
$\rightarrow \cos\alpha = \frac{a^۲+d^۲-m^۲}{۲ad}$ $\rightarrow m^۲ = b^۲ + c^۲ + ۲bc\cos\alpha$

$\Rightarrow m^۲ = b^۲ + c^۲ + \frac{bc}{ad}(a^۲ + d^۲ - m^۲)$

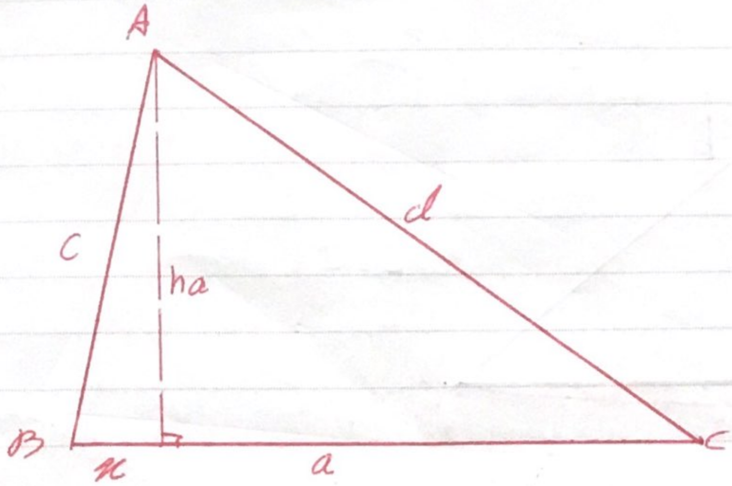
$\Rightarrow m^۲\left(1 + \frac{bc}{ad}\right) = b^۲ + c^۲ + \frac{bc}{ad}(a^۲ + d^۲)$

$\Rightarrow m^۲(ad + bc) = ad(b^۲ + c^۲) + bc(a^۲ + d^۲)$

⋮



رابطه هرون 8



$$c^2 - x^2 = h_a^2 = (c-x)(c+x) = \left(c - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)$$

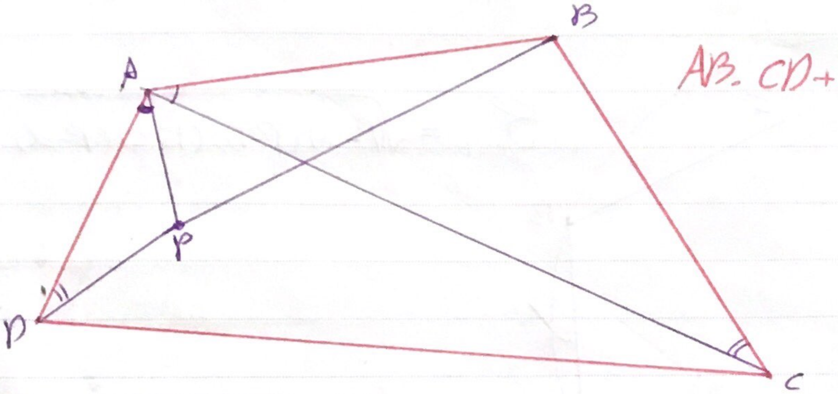
$$= \frac{1}{4a^2}(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b) \quad \mathrm{I}$$

$$2p = a+b+c \xrightarrow{\mathrm{I}} = \frac{1}{4a^2}\, 16\,(p-a)(p-b)(p-c)p$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow S = \frac{a}{2} h_a$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

برای چهار ضلعی دلخواه ABCD می‌توان گفت:



$AB\cdot CD + AD\cdot BC \geq AC\cdot BD$

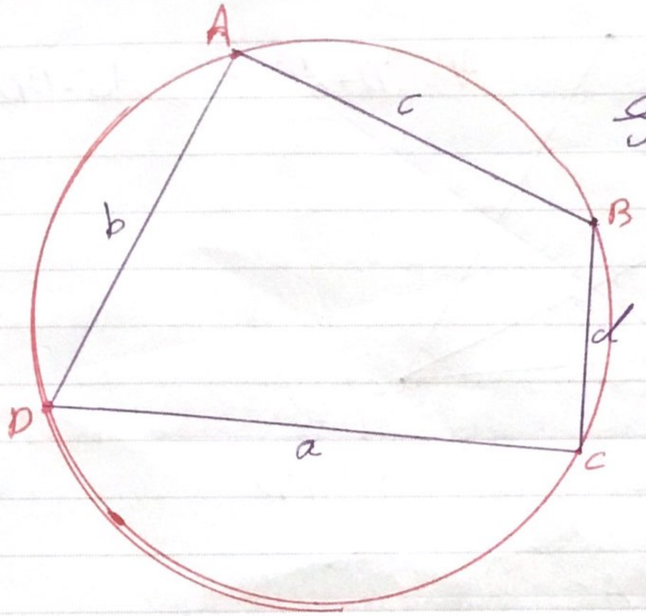
$A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{P}D \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{PD}{BC} \Rightarrow AD\cdot BC = AC\cdot PD$ I

$A\overset{\Delta}{P}B \sim A\overset{\Delta}{D}C \Rightarrow AB\cdot CD = BP\cdot AC$

$(I)(II)\ AD\cdot BC + AB\times DC = AC(BP+PD)\ ,\ BP+PD \geq DB$

$\Rightarrow AD\cdot BC + AB\cdot DC \geq AC\cdot DB$

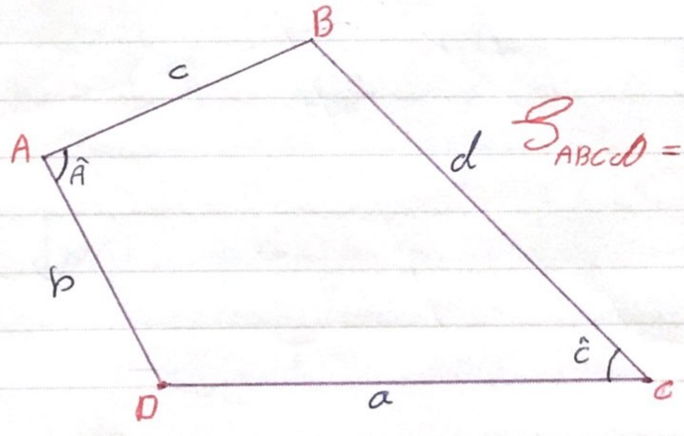
در چهارضلعی محاطی برای مساحت داریم:



$$S_{ABCD} = \sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d)}$$

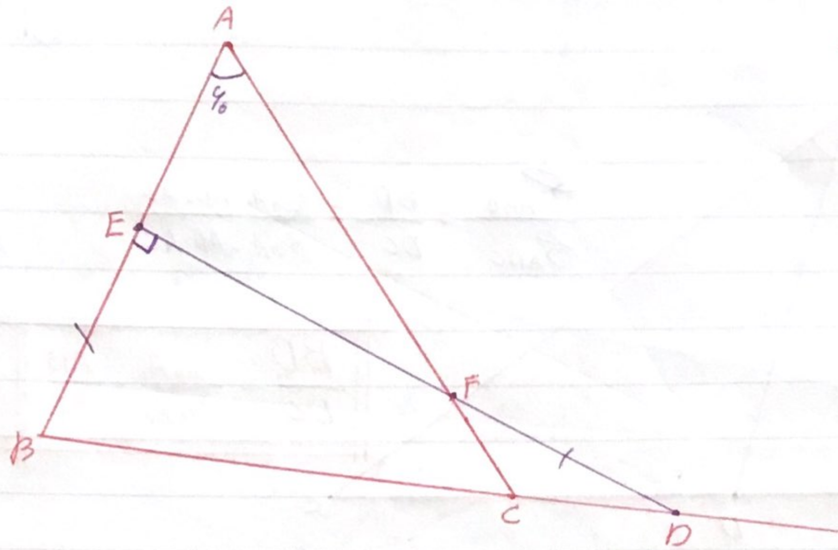
اثبات:

در تمامی چهارضلعی ها:



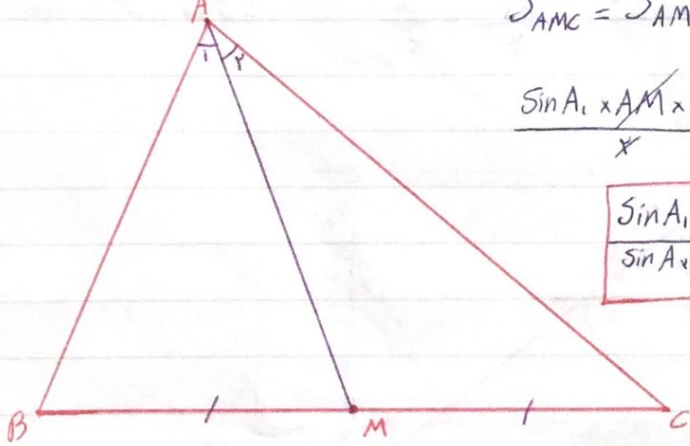
$$S_{ABCD} = \sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d) - \frac{1}{2}abcd(1+\cos(A+C))}$$

اثبات:



$\frac{BC}{CD}$ را بیابید

ثابت کنید: $\frac{\sin A_1}{\sin A_2} = \frac{AC}{AB}$

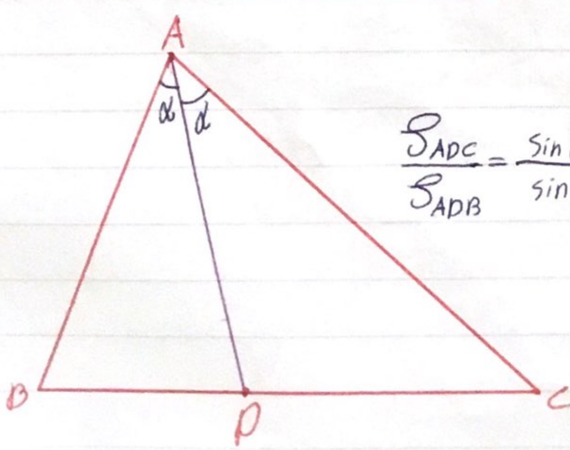


$S_{AMC} = S_{AMB} \Rightarrow$

$$\frac{\sin A_1 \times \cancel{AM} \times AB}{\cancel{2}} = \frac{\sin A_2 \times \cancel{AM} \times AC}{\cancel{2}}$$

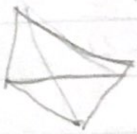
$$\boxed{\frac{\sin A_1}{\sin A_2} = \frac{AC}{AB}}$$

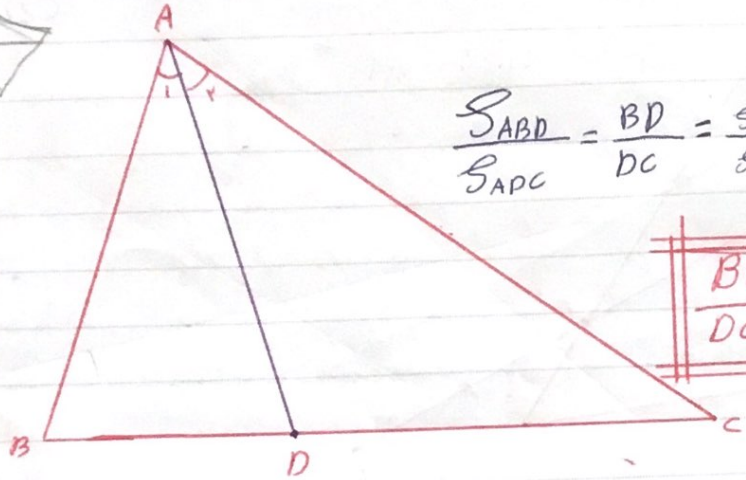
ثابت کنید: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$



$$\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}} = \frac{\sin\alpha \cdot AD \cdot AB}{\sin\alpha \cdot AD \cdot AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

لم کلیدی:



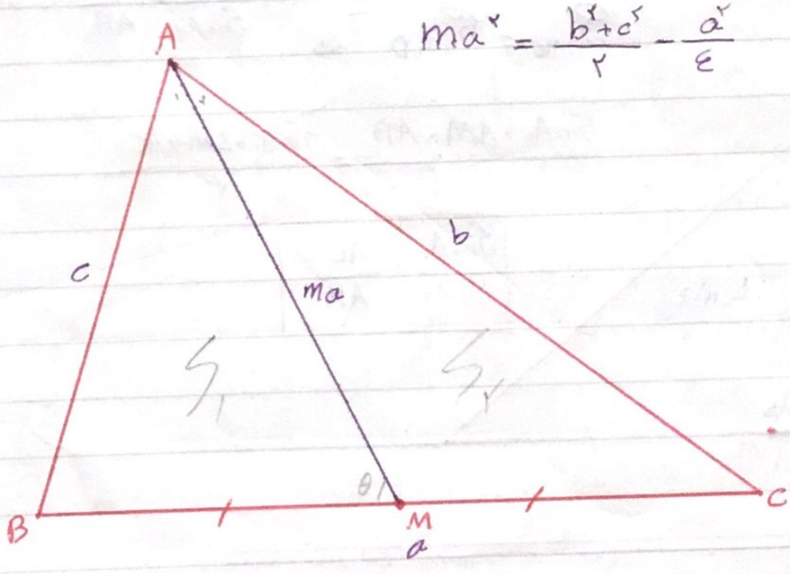


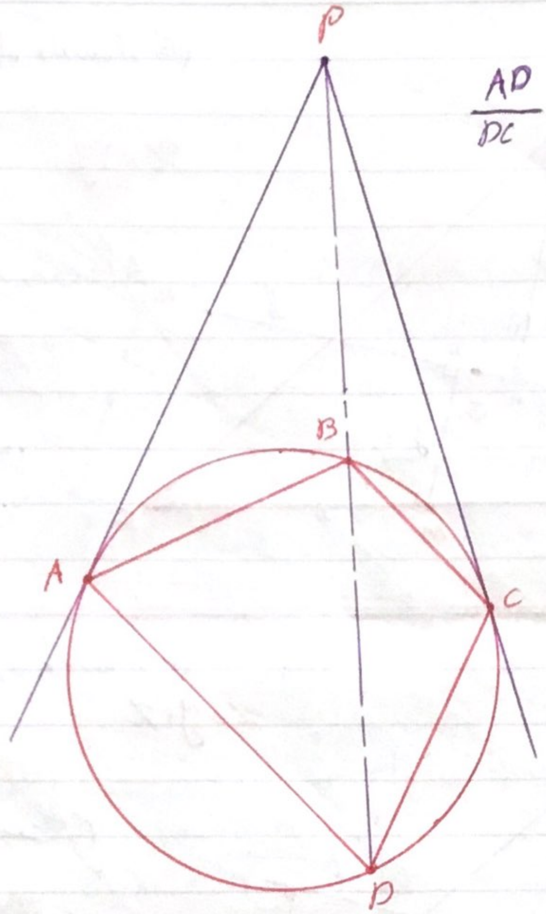
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC} = \frac{\sin A_1 \cdot \cancel{AD} \cdot AB}{\sin A_2 \cdot \cancel{AD} \cdot AC}$$

$$\boxed{\frac{BD}{DC} = \frac{\sin A_1}{\sin A_2} \cdot \frac{AB}{AC}}$$

محاسبهٔ طول میانه:

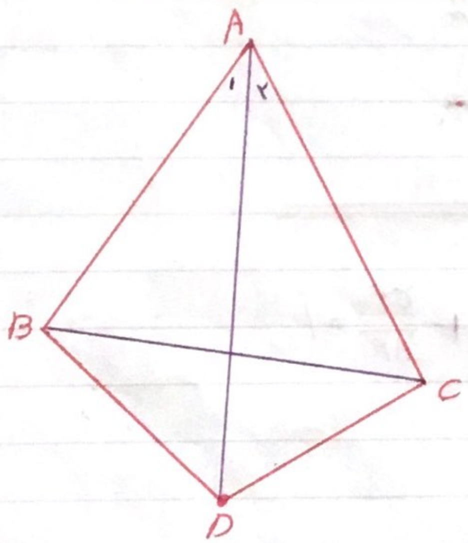
$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$





لم همساز:

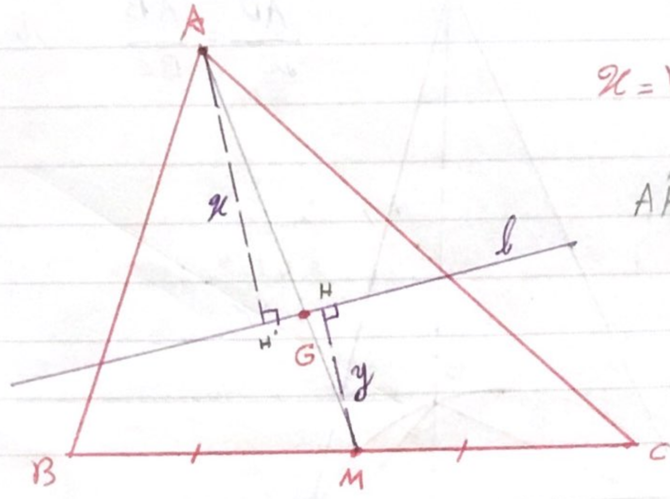
$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$



* لم شاه‌ کلید:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\sin \hat{A}_1}{\sin A_2} \cdot \frac{AB}{AC}$$

(l دلخواه گذرنده از G)



$x = 2y$

اثبات:

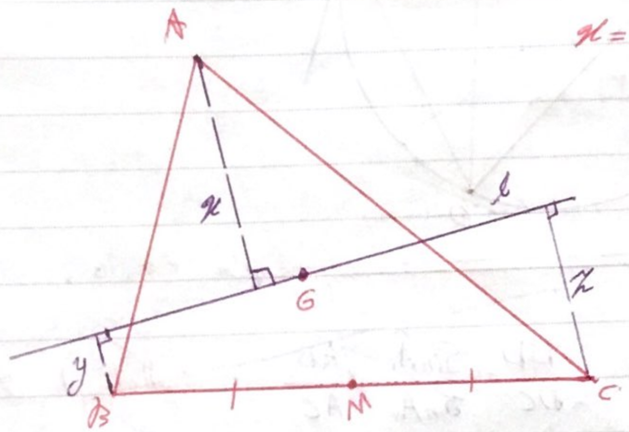
$A\hat{H'}G \sim M\hat{H}G$

$\Rightarrow \frac{MH}{AH'} = \frac{MG}{AG} = \frac{1}{2}$ ... ✓

برعکس لم نیز درست است.

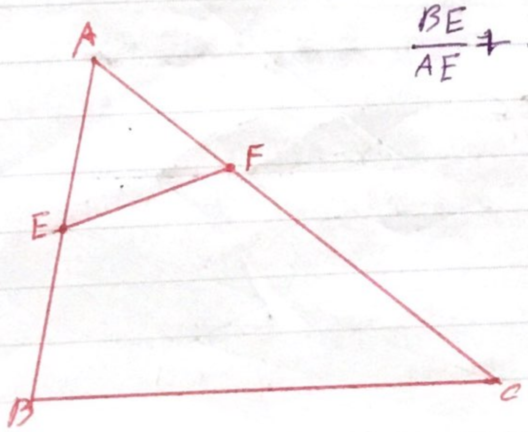
(l دلخواه گذرنده از G)

$x = y + z$



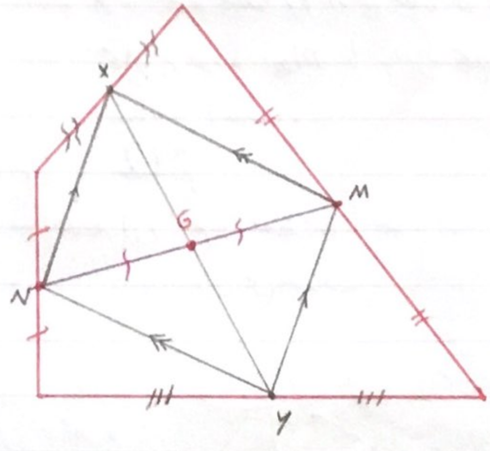
برعکس لم نیز درست است.

$\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = 1$

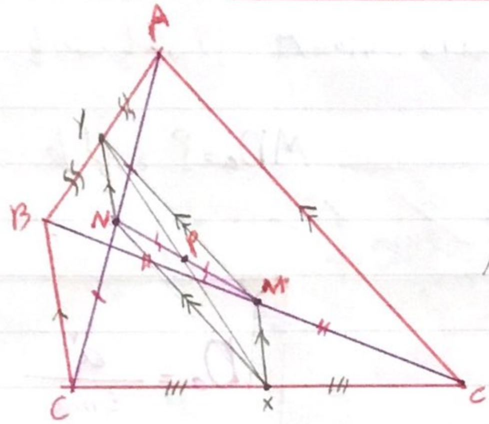


مرکز ثقل چهار ضلعی:

ثابت کنید G یکتاست:



MYNX متوازی الاضلاع
⇐ قطرها منصف اند



مسأله:

۱) ثابت کنید P همان G است

MXNY متوازی الاضلاع ⇐ XY و MN منصف اند

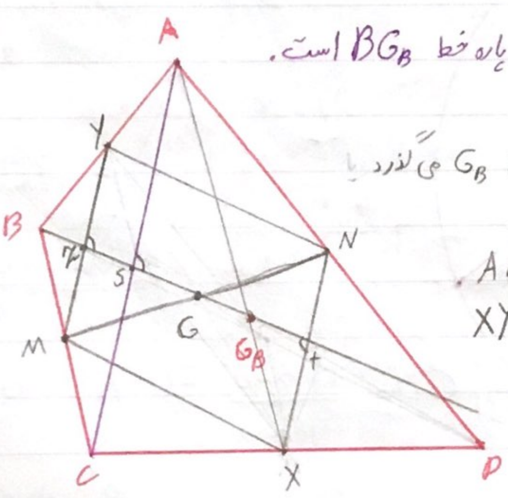
$\Rightarrow XP = PY \Rightarrow$

$\Rightarrow P \equiv G$

۲) ثابت کنید G_{ABCD} روی پاره خط BG_B است.

(G_B همان G مثلث ABC است)

می‌خواهیم ثابت کنیم که BG_{ABCD} از G_B می‌گذرد یا



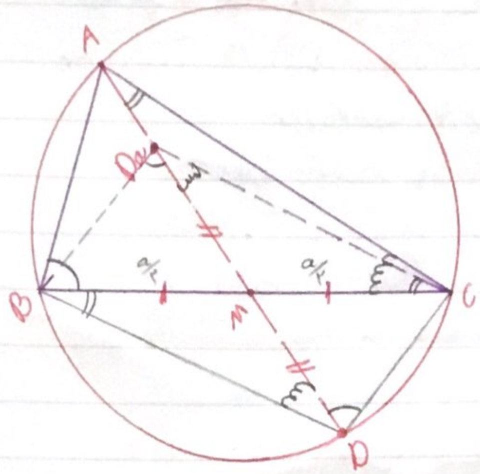
$$\left.\begin{array}{l} AC \parallel MY \\ XY \parallel MY \end{array}\right\} \Rightarrow AC \parallel XY$$

$$\Rightarrow B\hat{t}X = t\hat{S}A \Rightarrow \overset{\triangle}{XtG_B} \sim ASG_B$$

بنابراین کافی است که بگوییم نسبت تشابه آن‌ها ۲ است

$$\left.\begin{array}{l} Xt = ZY \\ ZY = \frac{1}{2} \cdot As \end{array}\right\} \Rightarrow Xt = \frac{1}{2} \cdot As \ldots \checkmark$$

نقطه دانا: قرینه شده نقطه D روی میانه که D محل برخورد m_a با دایره محیطی ABC است.



* نقطه دانا
نقطه ای مهم: نقطه دانا تشابه خوبی می سازد

$$\left.\begin{array}{l} MD_a = MD \\ BM = MC \end{array}\right\} \Rightarrow D_aCDB$$ متوازی الاضلاع

$C\hat{D}_aB = 180 - \hat{A}$ یادت باشد!

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = D_a \cdot m_a$$

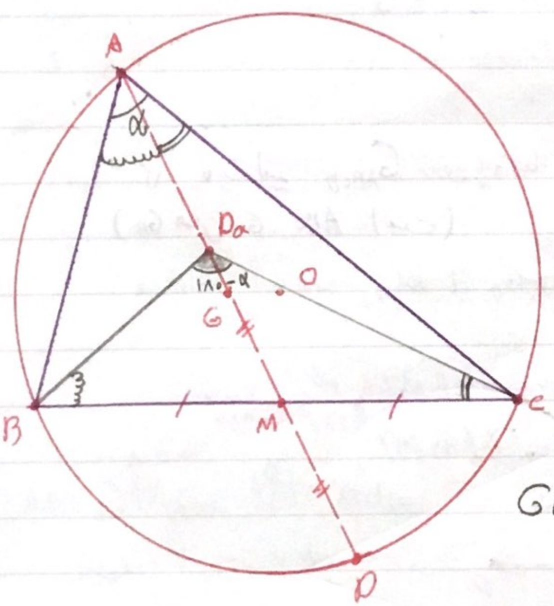
طول: $MD_a = ?$

$$\boxed{D_a = \frac{a^2}{4m_a}}$$

تنها یک نقطه روی میانه مانند P روی میانه است که $C\hat{P}B$ برابر مکمل A باشد

نکته

$$\boxed{D_a = \frac{a^2}{4m_a}}$$



* طول G: ☹

$$GD = x + \frac{1}{3} m_a = \frac{a^2}{4m_a} + \frac{m_a}{3}$$

$$= \frac{3a^2 + 4m_a^2}{12m_a} = \frac{3a^2 + 2(b^2+c^2) - a^2}{12m_a}$$

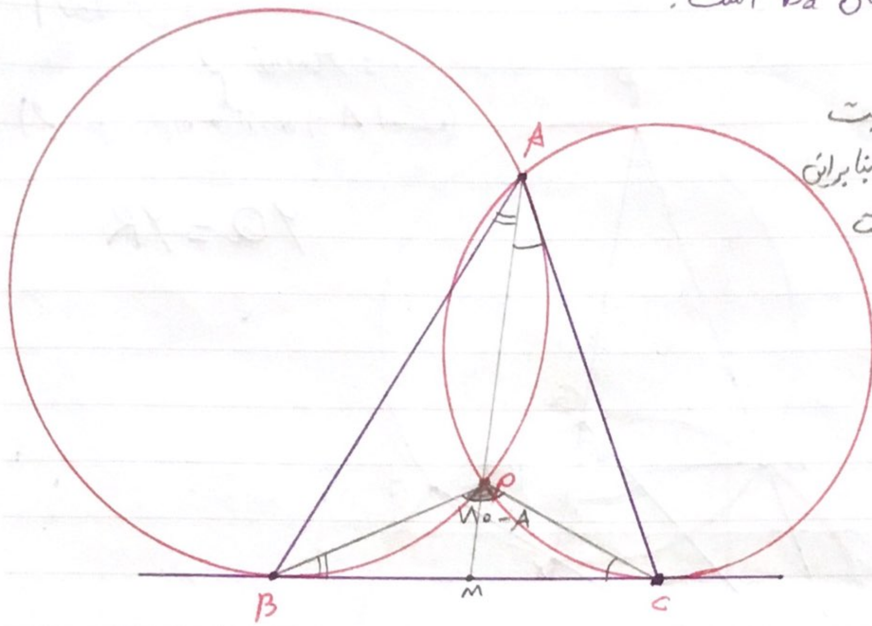
$$GD = \frac{a^2+b^2+c^2}{6m_a} \quad (I)$$

$$R^2 - OG^2 = AG \cdot GD$$

$$R^2 - OG^2 = \frac{2}{3} m_a \cdot \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6m_a}\right)$$

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$$

نتیجهٔ مهم: P همان D_a است.



قوت نقطهٔ M نسبت به دو دایره یکسان است بنابراین $BM=MC$ و AM میانه است

$B\hat{P}C = ۱۸۰ - \hat{A}$

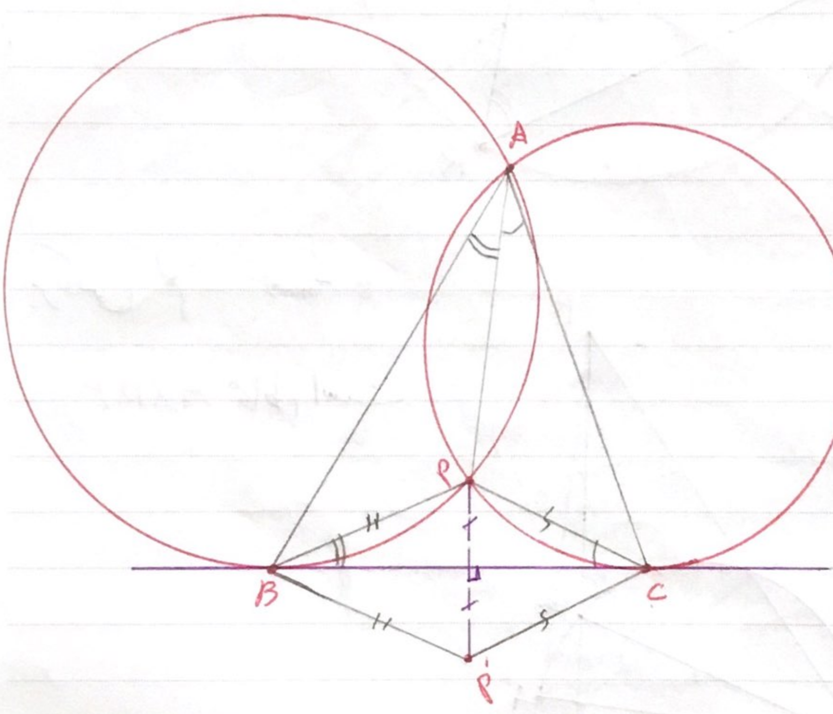
$\Rightarrow P \equiv D_a$

مسأله [illegible]:

ثابت کنید $ABP'C$ محاطی است

$P \equiv D_a$

$\Rightarrow CPB = ۱۸۰ - \hat{A}$



$\left.\begin{array}{l} PC = CP' \\ PB = P'B \\ BC \text{ مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{B\hat{P}C} = CP'B$

$\Rightarrow CP'B = ۱۸۰ - A$

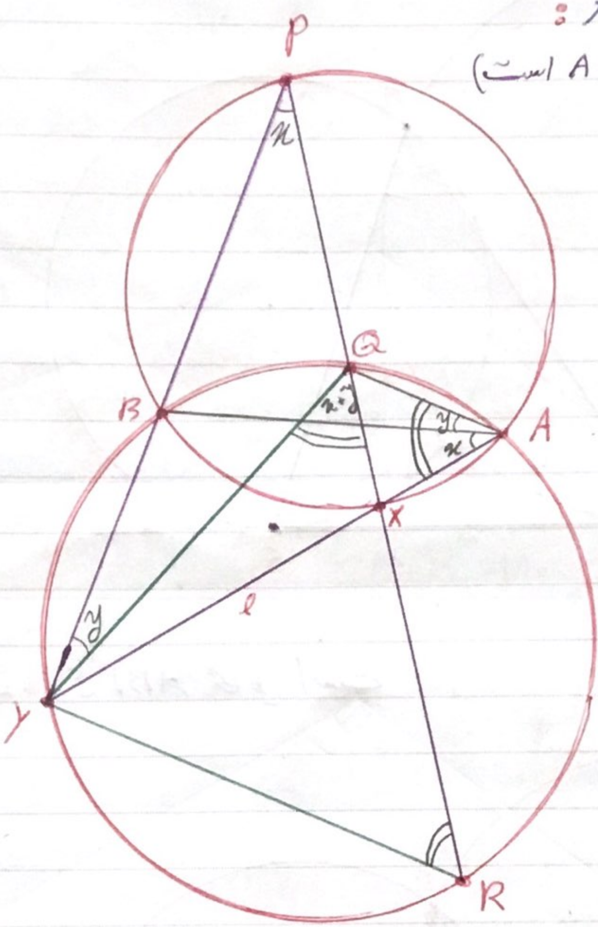
∴ ✓

انعکاس :

لم Aneri :

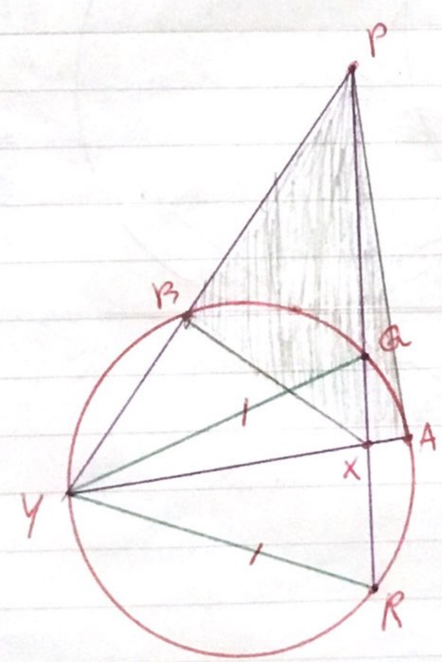
(ℓ خطی دلخواه و گذرنده از A است)

$YQ = YR$



برعکس لم Anini :

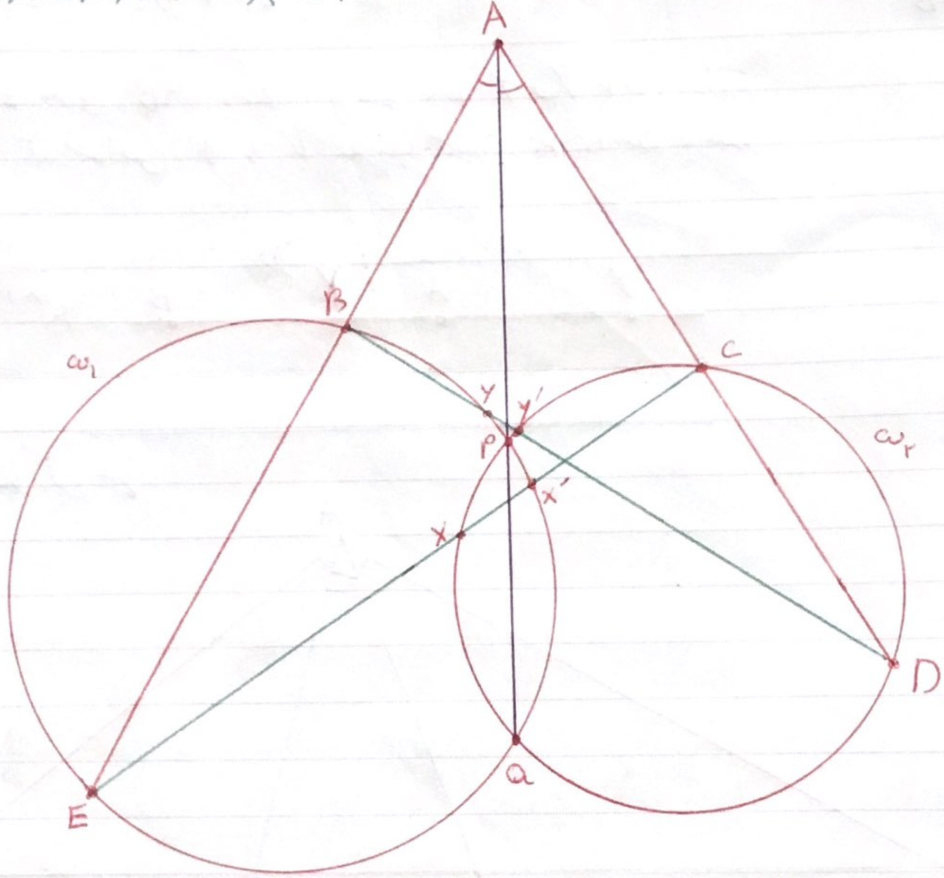
$AXBP$ محاط است



لم نیمساز AP :

هرگاه وتر مشترک ω_1 و ω_2 نیمساز A باشد، آنگاه :

$EX = DY$ و $CX' = BY'$

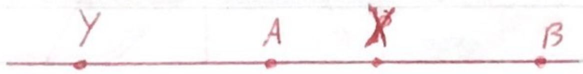


آپولونیوس و رفقا:

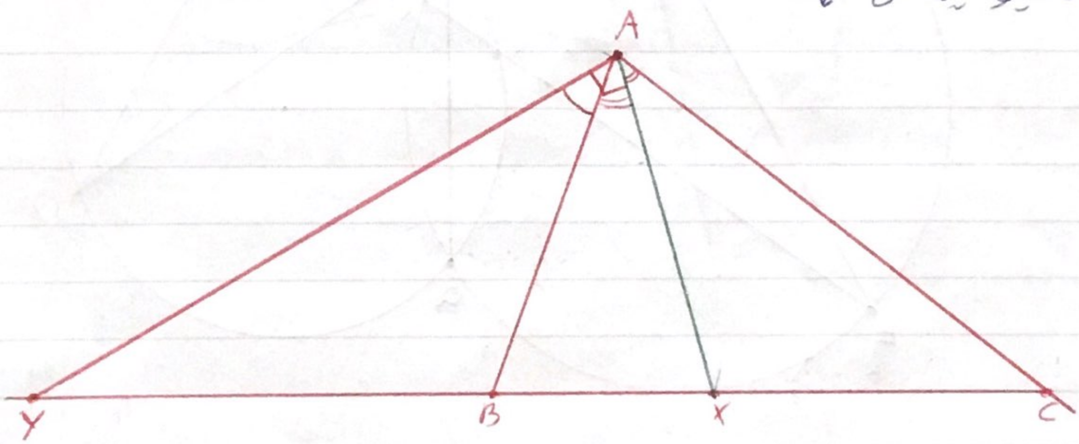
* ما در این درس به دنبال P های هستیم که: (k ثابت است) $\frac{PA}{PB}=k$

حالت خاص: روی $\overline{AB}$ دقیقاً دو نقطه مانند X و Y وجود دارند که خواص P را با ضریب ثابت k داشته باشند

$$\frac{XA}{XB}=\frac{YA}{YB}$$



* حالا اینو نگاه کن

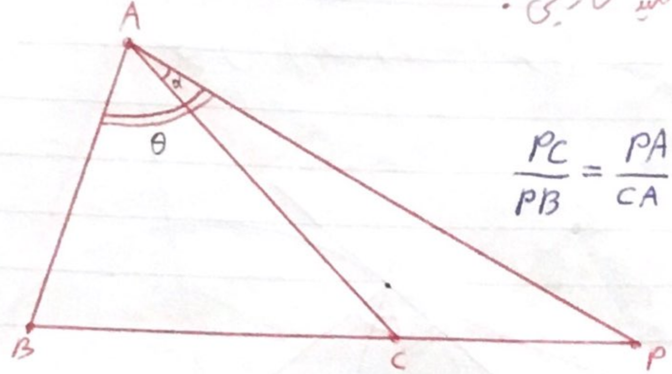


$$\frac{YB}{YC}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin)}{\sin(90+))} \xrightarrow[)+))=90]{\sin(90+))=\cos))} \frac{YB}{YC}=\frac{AB}{AC}\cdot\cancelto{1}{\frac{\sin)}{\cos))}}$$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BX}{XC} \longrightarrow \boxed{\frac{YB}{YC}=\frac{BX}{CX}}$$

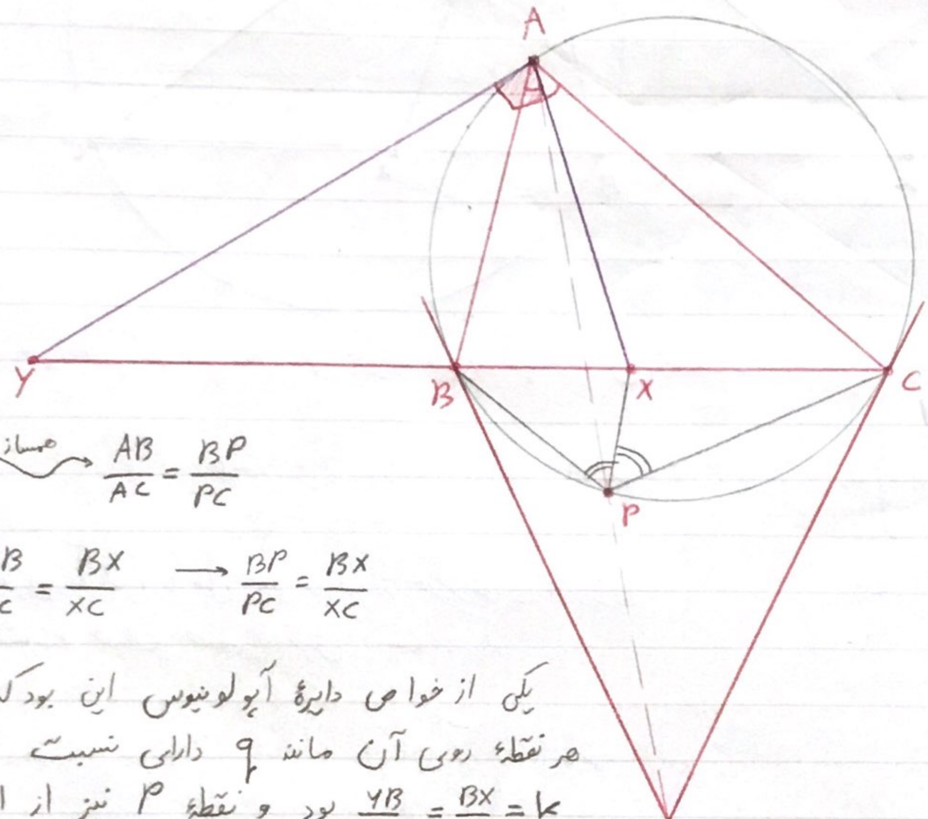
نتیجه! تمامی آن P های مورد نظر روی دایره ای به قطر $\overline{XY}$ قرار دارند که نام این دایره «آپولونیوس» است

★ گوشه نگاه لم کلید خارجی :



$$\frac{PC}{PB} = \frac{PA}{CA} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

★ دایرهٔ آپولونیوس گذرا از A، از P می‌گذرد

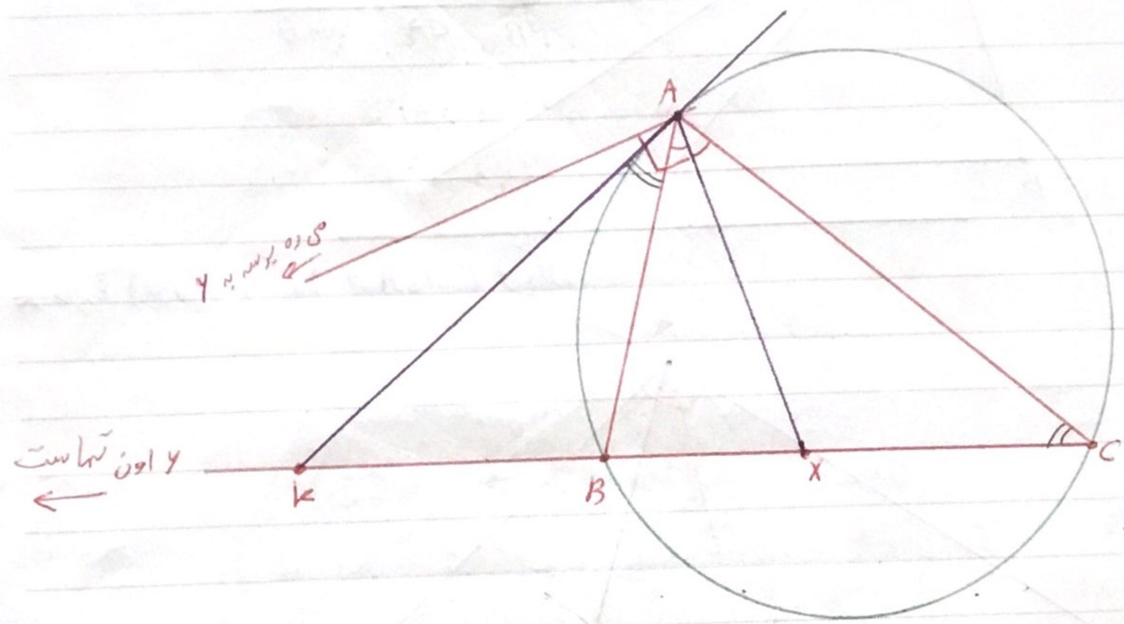


همساز $\rightsquigarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BP}{PC}$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC} \longrightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{BX}{XC}$$

یکی از خواص دایرهٔ آپولونیوس این بود که هر نقطهٔ روی آن مانند q دارای نسبت ثابت $\frac{YB}{YC} = \frac{BX}{CX} = k$ بود و نقطهٔ P نیز از این قاعده مستثنی نیست

مرکز دایرهٔ آپولونیوس (دقیقا وارد می‌شوند)

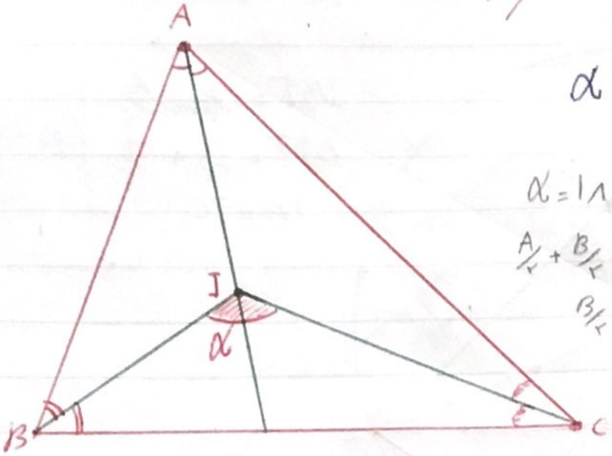


می‌خواهیم بگوییم که k مرکز دایرهٔ آپولونیوس هست.

$$\left.\begin{array}{l} k\hat{A}X = \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2} \\ k\hat{X}A = \hat{C} + \frac{A}{2} \\ Y\hat{A}X = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow kX = kA = kA \longrightarrow$$ k مرکز دایرهٔ آپولونیوسه

الان با کمی تأمل می‌توانیم از مرکز بودن k برای اثبات حرف صفحهٔ قبل استفاده کرد

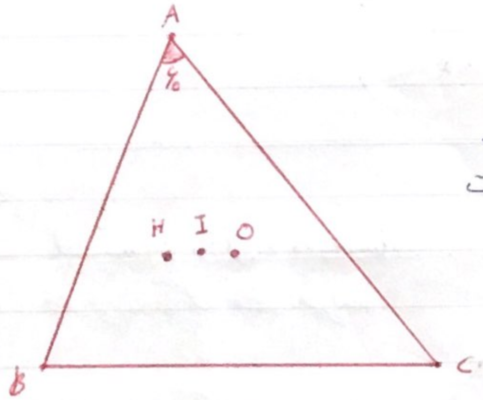
نیمساز



خواص زاویه‌ای:

$$\alpha = 90 + \frac{A}{2}$$

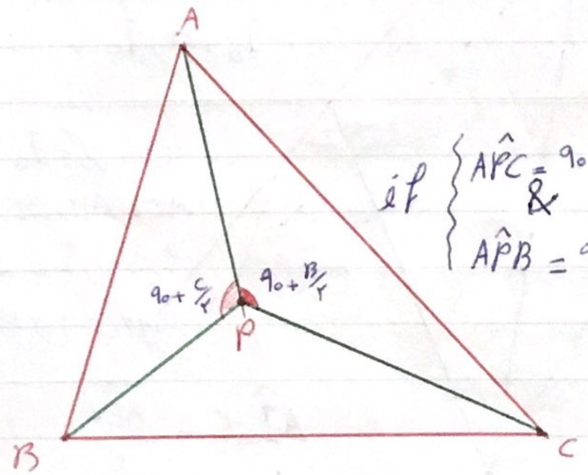
$$\left.\begin{aligned} &\alpha = 180 - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) \\ &\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90 \\ &\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90 - \frac{A}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\alpha = 180 - 90 + \frac{A}{2} \\ &\alpha = 90 + \frac{A}{2} \end{aligned}$$



تمرین:

۱) ثابت کنید $IO = IH$

۲) $BHICO$ محاطی است

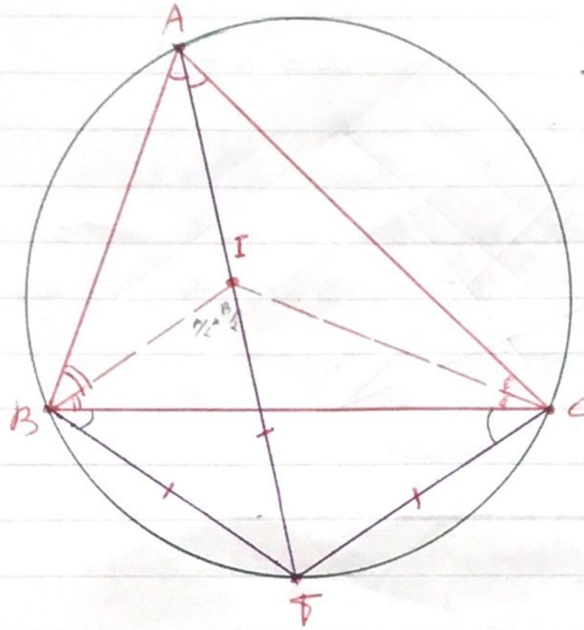


لم:

$$\text{if} \left\{\begin{aligned} &A\hat{P}C = 90 + \frac{B}{2} \\ &\& \\ &A\hat{P}B = 90 + \frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \text{ then} \Longrightarrow P \equiv I$$

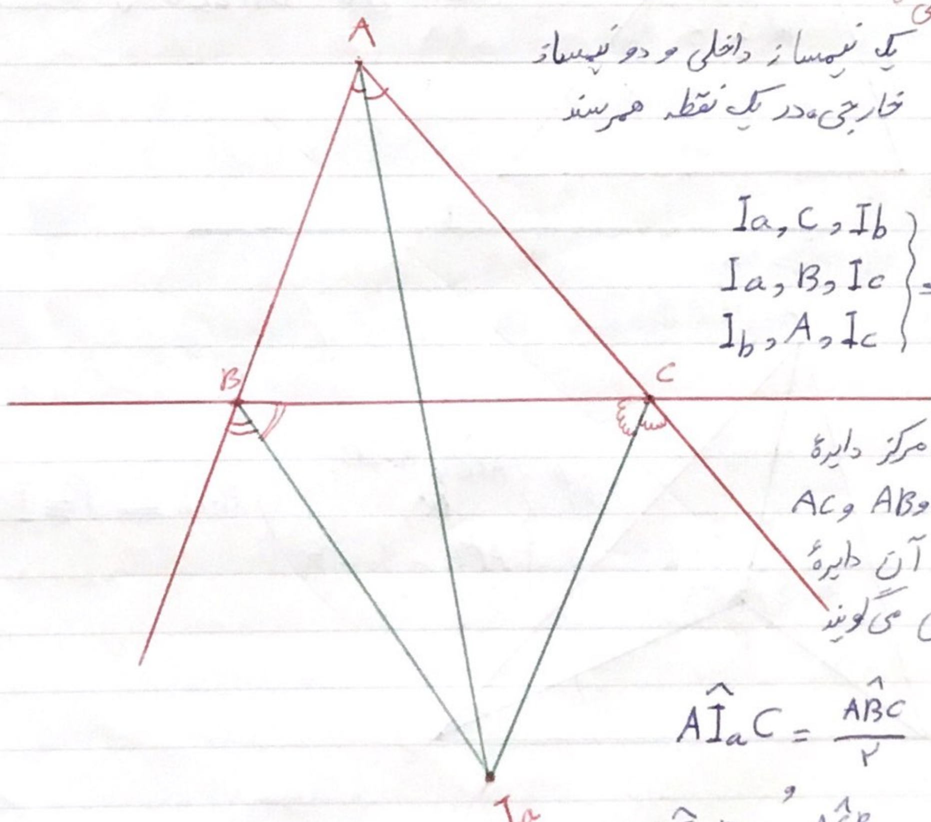
لم مهم: $TB = TC = TI$

$$\left.\begin{aligned} I\hat{B}T &= \frac{B}{2} + \frac{A}{2} \\ B\hat{I}T &= \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \\ TB &= TC \end{aligned}\right\} \Rightarrow TB = TC = TI$$



نیمساز خارجی:

یک نیمساز داخلی و دو نیمساز خارجی، در یک نقطه همرسند



نکته ۱:

$$\left.\begin{aligned} &I_a, C, I_b \\ &I_a, B, I_c \\ &I_b, A, I_c \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ همخط اند

نکته ۱: I_a مرکز دایره مماس بر AC و AB و BC است که به آن دایره نیمساز خارجی می‌گویند

نکته ۱:

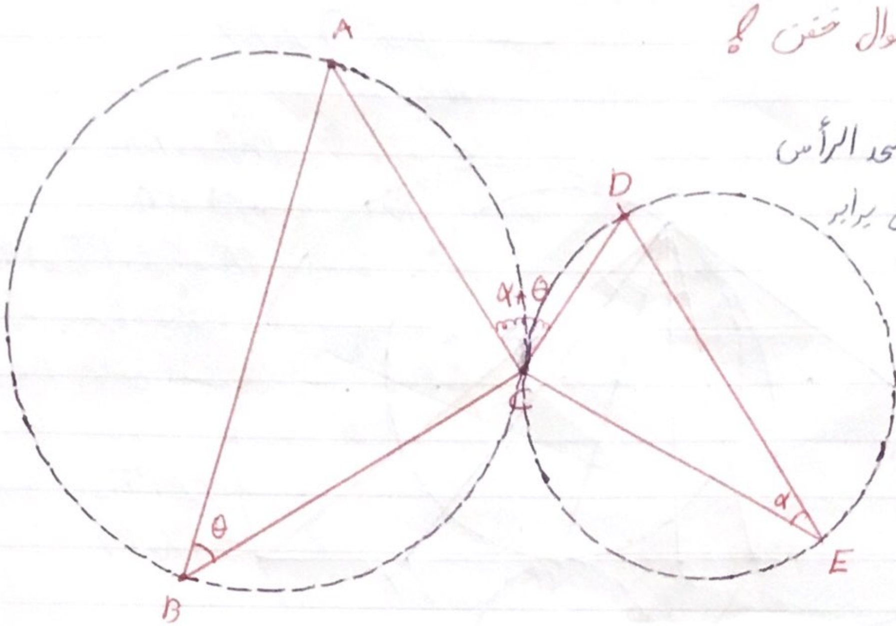
$$A\hat{I}_aC = \frac{A\hat{B}C}{2}$$

و

$$A\hat{I}_aB = \frac{A\hat{C}B}{2}$$

یک لم و یک سوال خفن !

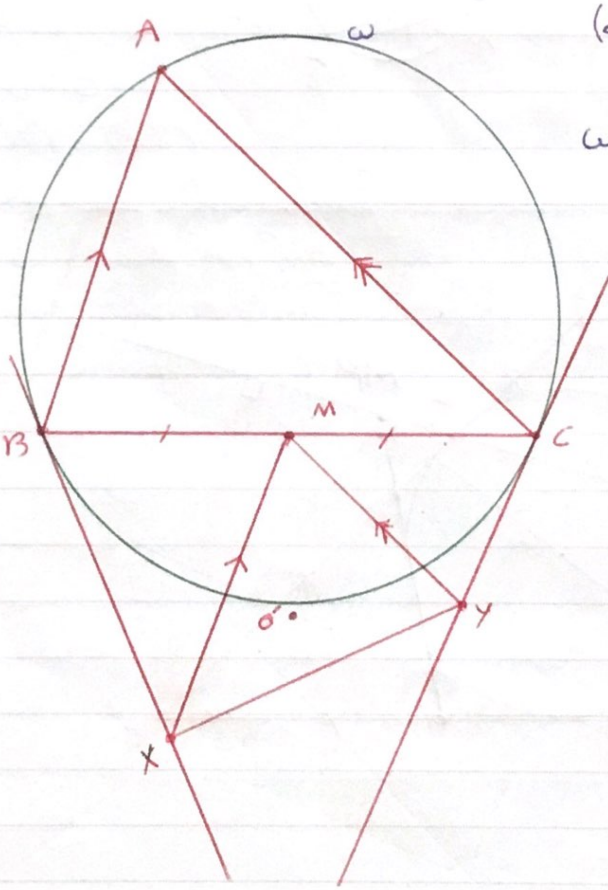
هرگاه در دو مثلث متحد الرأس جمع دو زاویه مانند شکل برابر زاویه خارجی دو مثلث شود آنگاه دایره محیطی های آن ها بر یکدیگر مماسند



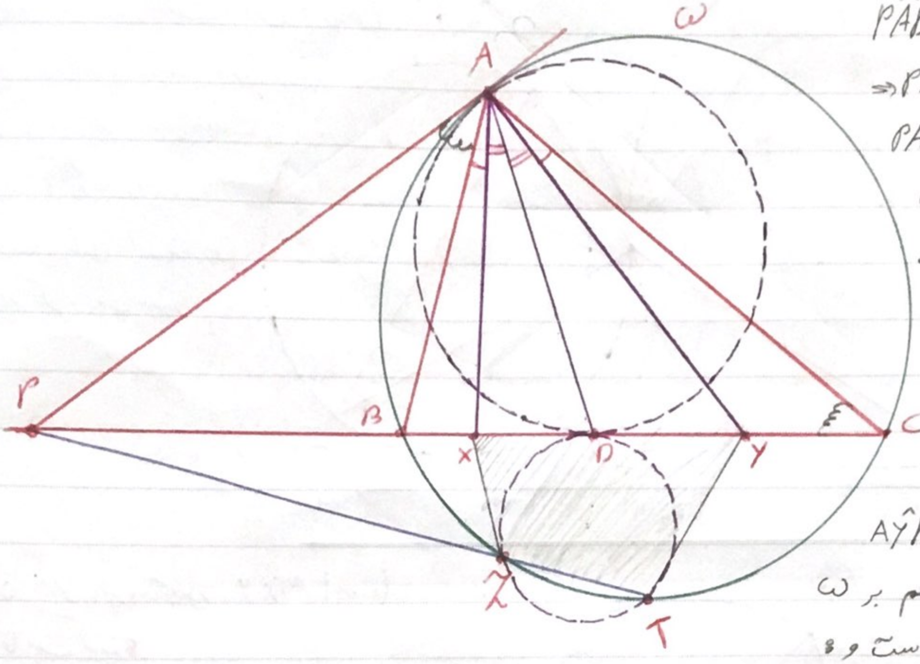
(O' مرکز دایرهٔ محیطی MXY است)

ثابت کنید

دایرهٔ $XO'Y$ بر ω مماس است



ثابت کنید: TZXY محاطی است



$P\hat{A}D = P\hat{D}A = \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2}$

$\Rightarrow PA = PD$

$PA^2 = PZ \cdot PT = PD^2$

بنابراین دایرهٔ $\overset{\triangle}{DZT}$ بر BC مماس است

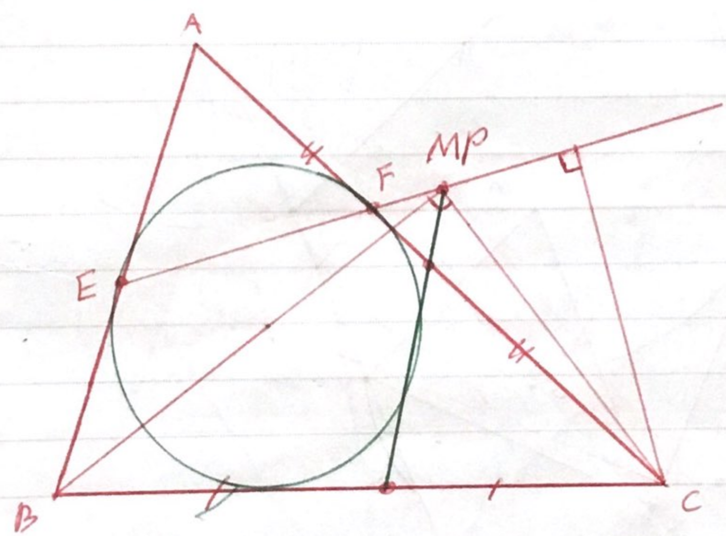
آرزو: $PZ.PT = PX.PY$

$A\hat{Y}B = P\hat{A}X = \hat{C} +)$

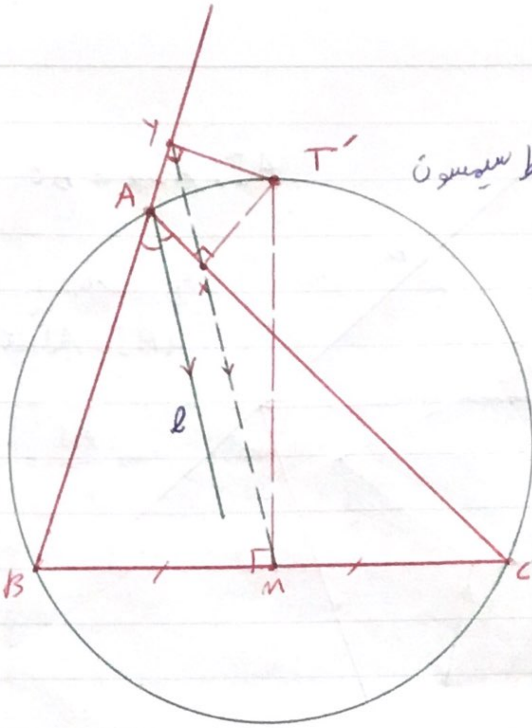
بنابراین دایرهٔ $\overset{\triangle}{AXY}$ هم بر ω و هم بر BC مماس است و:

$PX.PY = PA^2 = PZ.PT$ ...

MP:



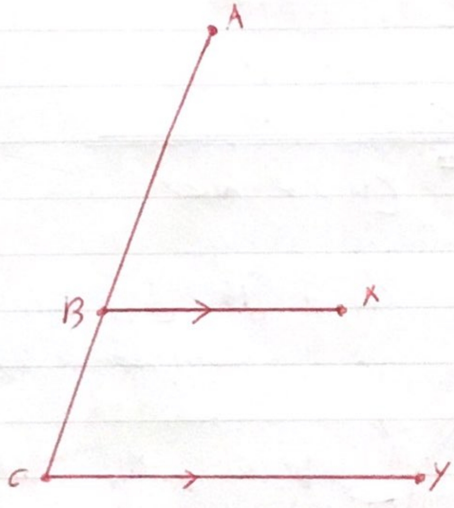
لم :



1) M و X و Y همخط اند و خط سیمسون T' نامیده می شود

۲) $l \parallel$ خط سیمسون T

لم موازی :

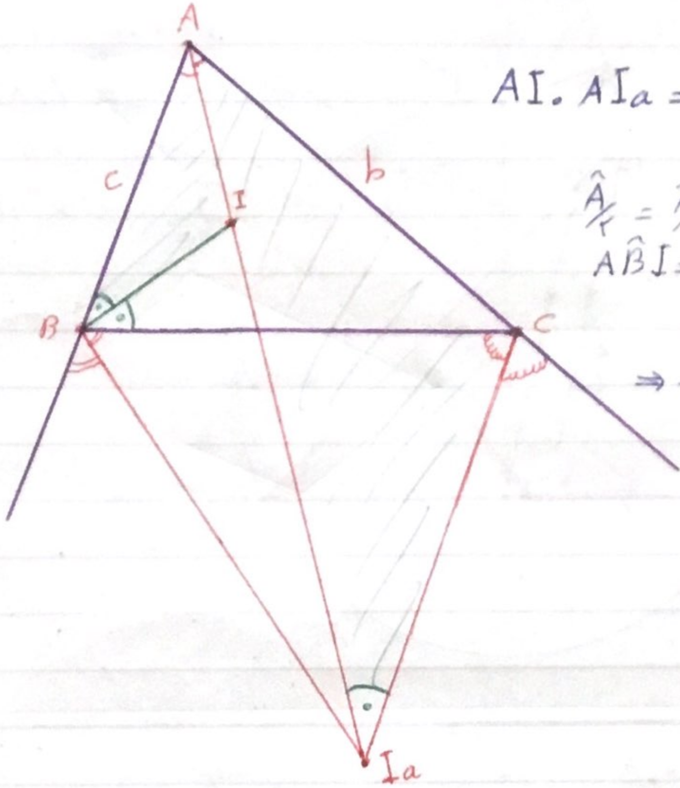


A, X, Y همخط

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{CY}$$

Subject: Date:



نکته ۱ : $AI \cdot AI_a = bc$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}}{2}\\ A\hat{B}I = A\hat{I_a}C\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABI} \sim \overset{\triangle}{ACI_a}$$

$$\Rightarrow \frac{AI}{b} = \frac{c}{AI_a} \Rightarrow AI \cdot AI_a = bc$$

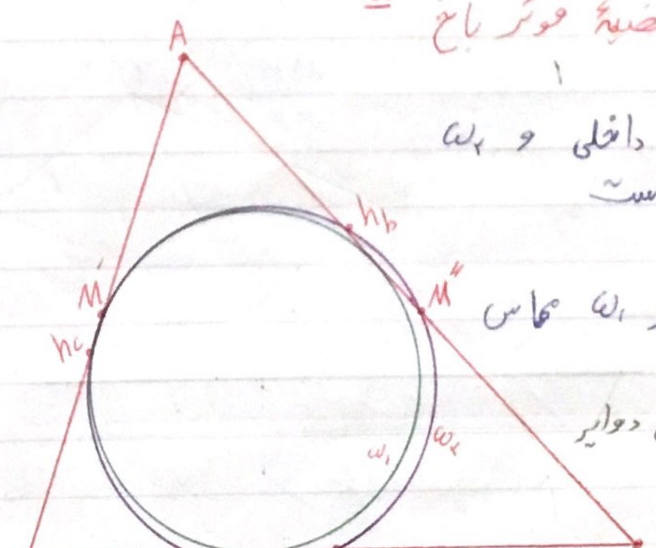
قضیهٔ فوئرباخ :

زنگ تفریح :

ω_1 دایرهٔ محاطی داخلی و ω_2 دایرهٔ نه نقطه است

ثابت کنید ω_2 بر ω_1 مماس است

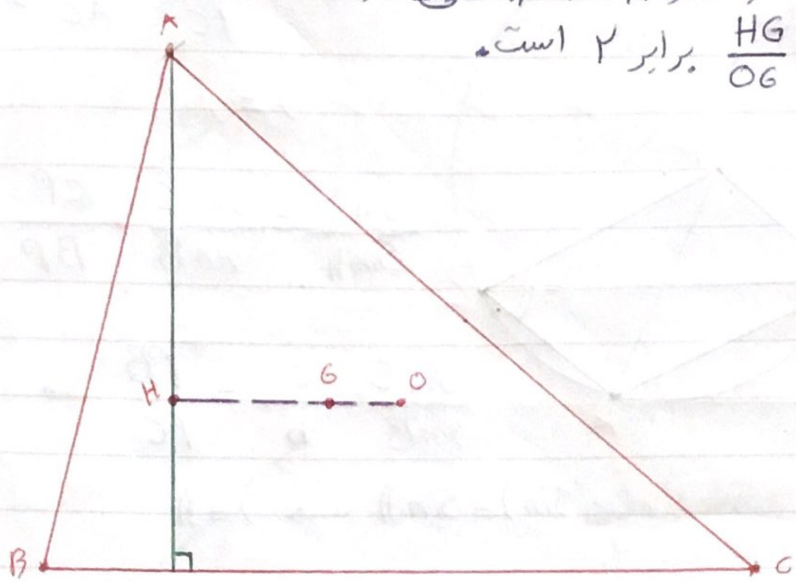
نکته : دایرهٔ نه نقطه به تمامی دوایر محاطی مماس است



Subject: Date:

نکته :

O و G و H نه تنها هم‌خط اند
بلکه $\frac{HG}{OG}$ برابر ۲ است.



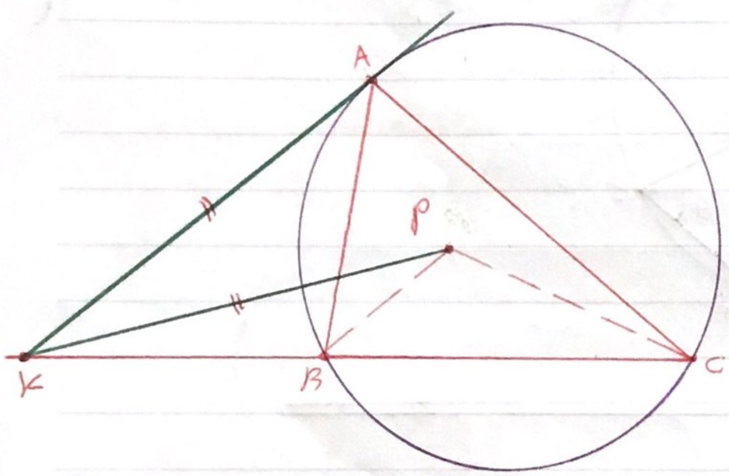
بازگشت به آپولونیوس

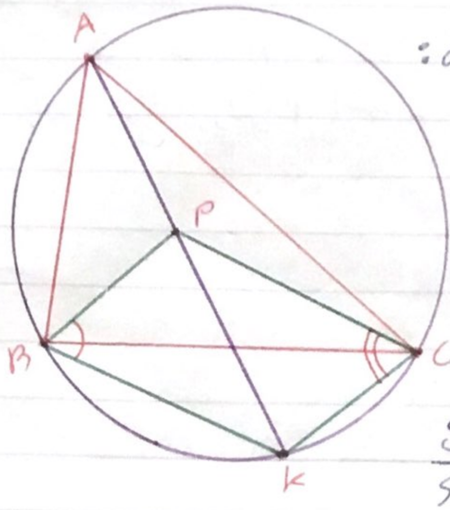
لم مهم

اگر $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$ باشند؛

آنگاه : $KA = KP$

و بالعکس





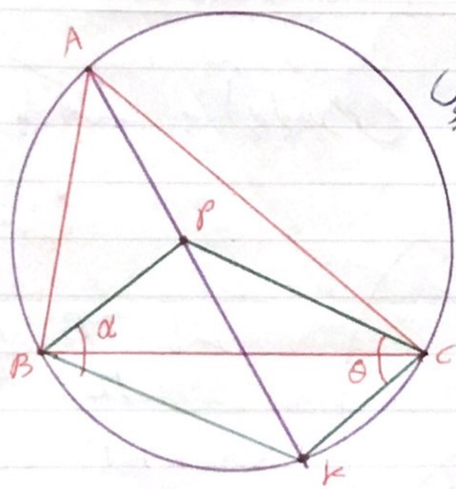
اگر $\frac{PB}{PC}=\frac{AB}{AC}$ باشد، آنگاه:

$\hat{)} = \hat{))}$

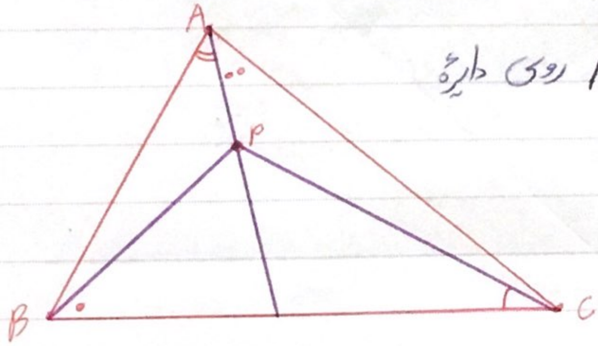
$$\frac{\sin)}{\sin))} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} \cdot \frac{CP}{BP}$$

$$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b} = \frac{PB}{PC} \Rightarrow$$

$$\sin) = \sin)) \rightarrow) =))$$

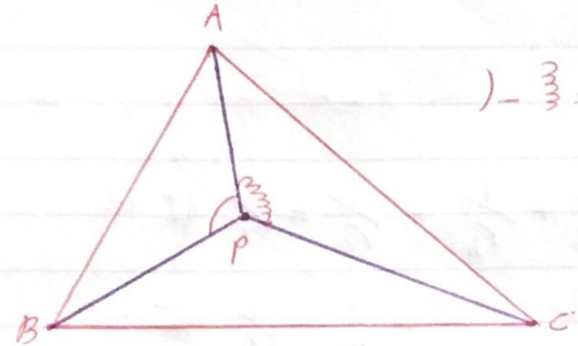


لم: P روی آپولونیوس $\Leftrightarrow \alpha = \theta$



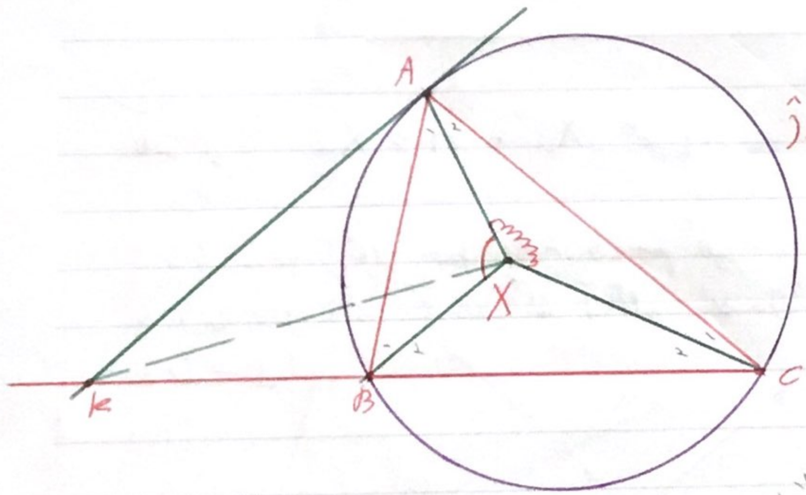
اگر $\circ + \circ\circ = (+ (($ آنگاه P روی دایره آپولونیوس است

* نمره ۸



$) - \xi = \hat{C} - \hat{B}$

← P روی آپولونیوس است



لم:

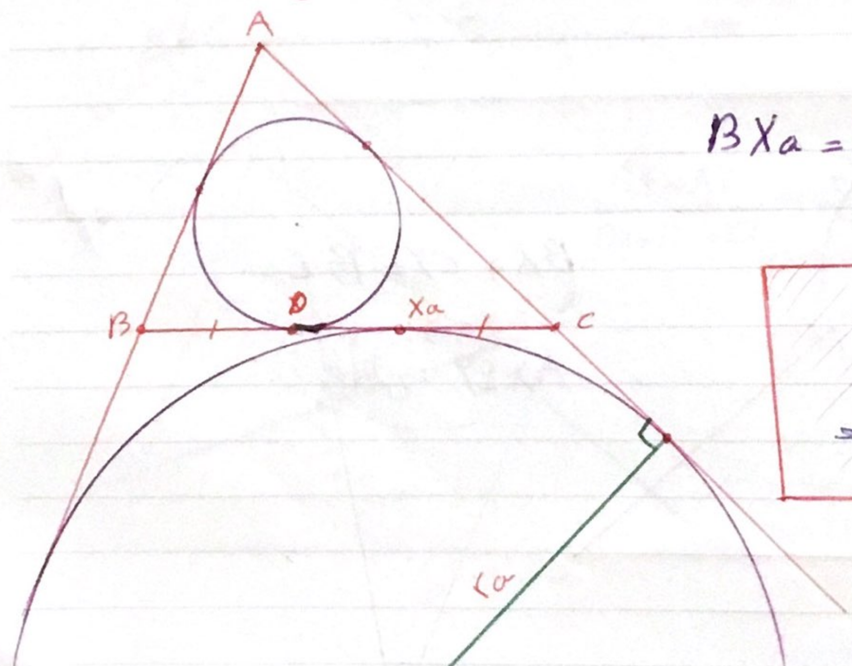
$\hat{)} - \hat{\xi} = \hat{C} - B \iff KX = KA$

$(۱۸۰ - A_1 - B_1) - (۱۸۰ - A_2 - C_1)$

$۱۸۰ - A_1 - B_1 - ۱۸۰ + A_2 + C_1$

$A_2 - A_1 + C_1 - B_1 \quad C - C_2 - B + B_2$

بررسی کردیم روی نیمساز و دوایر محاطی



$BX_a = CD$

$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}\, r_a\,(b + c - a)$

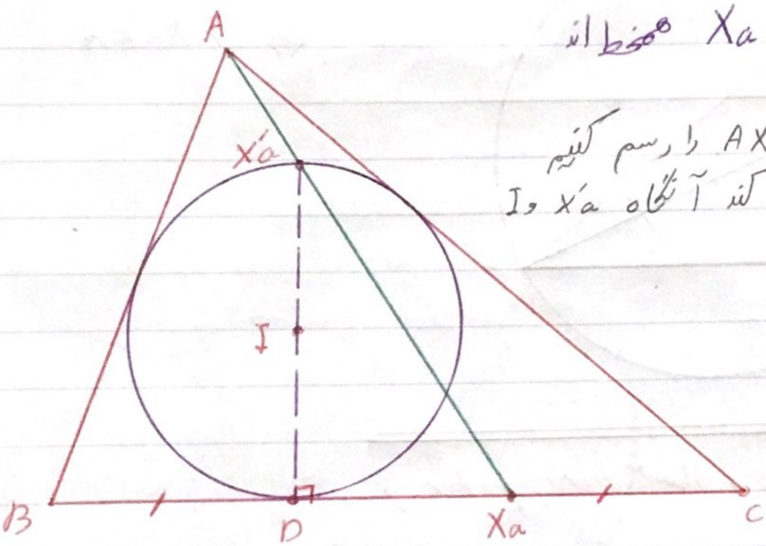
$\Rightarrow r_a = \frac{S}{p - a}$

روابط زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r} \quad \text{I)} \checkmark$$

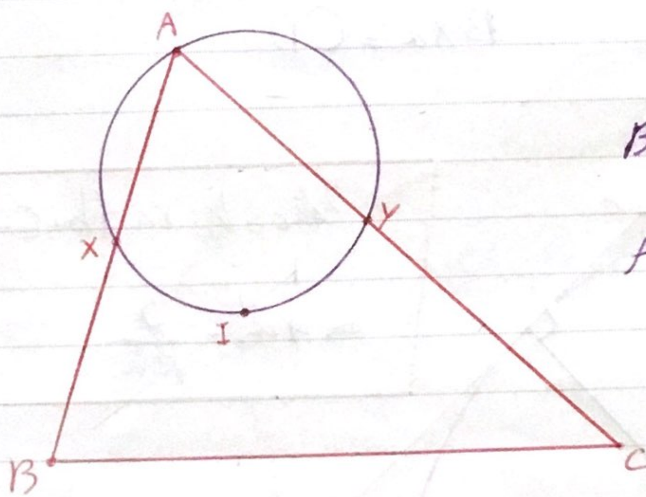
$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r} \quad \text{II)} \checkmark$$

$$S=\sqrt{r\,r_a r_b r_c} \quad \text{III)} \checkmark$$



نکته ای: X'_a و A و X_a همخط اند

و یا به عبارتی اگر خط AX_a را رسم کنیم تا دایرهٔ محاطی را در X'_a قطع کند آنگاه X'_a و I و D همخط اند.



لم: ☆

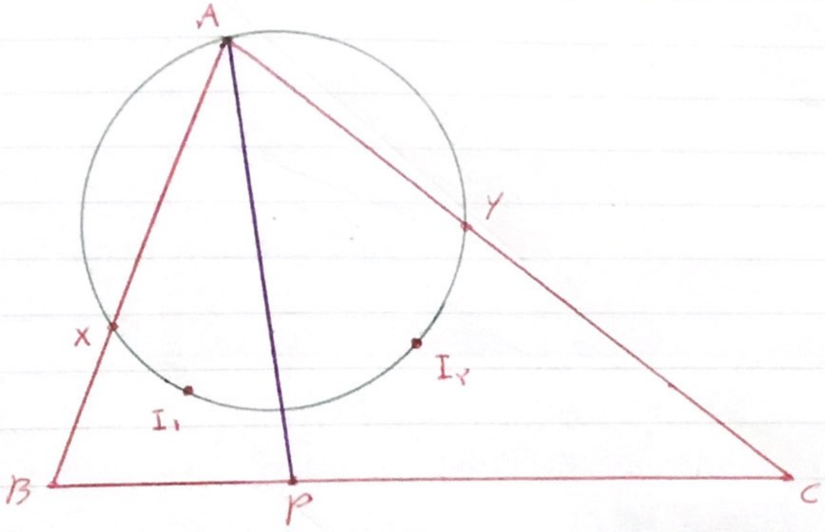
$$BX + CY = BC$$

$$\Longleftrightarrow$$

$AXIY$: محاطی

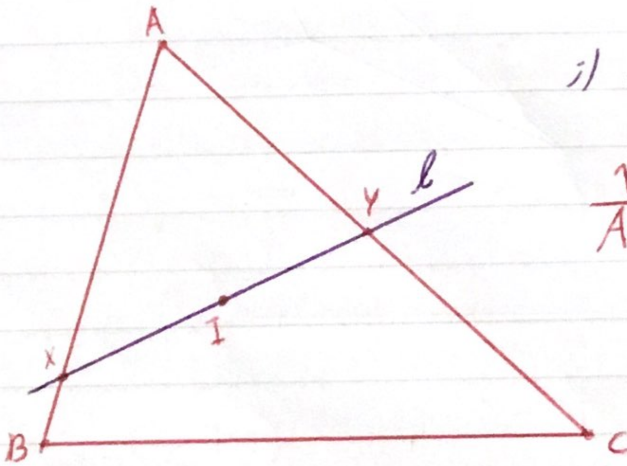
Subject: Date:

لم*: $CY - BX = CP - BP$



لم*: اگر l خطی گذرا از I باشد آنگاه:

$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{AY} = \frac{2p}{bc}$$



لم*:

$$\frac{AX + AY}{BX + BC + CY} = \frac{S_{A\hat{X}Y}}{S_{BXYC}}$$