حذفی گاوس

ب)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1+r_2\to r_2 \\ -2r_1+r_3\to r_3 \end{array} \longrightarrow$$

سوال 2_1 ص 52 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right] r_3+3r_2\to r_3 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right] \Rightarrow$$ ناسازگار، جواب ندارد.

$0 \neq 8$

الف) روش گاوس جردن :

$$[A|B] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -\frac{1}{2}r_1+r_2\to r_2 \\ -\frac{3}{2}r_1+r_3\to r_3 \\ \text{L}\to r_1/2\to r_1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2{,}5 & 4 & 1 \\ 0 & -0{,}5 & -1 & 3 \\ 0 & -3{,}5 & -8 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 23 \end{array}\right] \begin{array}{l} -7r_2+r_3\to r_3 \\ 5r_2+r_1\to r_1 \\ \text{L}\to r_2\times(-2)\to r_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} -r_3+r_1\to r_1 \\ 2r_3+r_2\to r_2 \\ -r_3\to r_3 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & 1 & 0 & -52 \\ 0 & 0 & 1 & 23 \end{array}\right]$$

الان با حذفی گاوس با الگوریتم دیگری تعدد مقادیر را پیدا کرد

سوال 2_2 :

ب)
ماتریس افزوده
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 16 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 12 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -r_1+r_2\to r_2 \\ -r_1+r_3\to r_3 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 16 \\ 0 & 12 & -16 \\ 0 & 16 & -17 \end{array}\right] \frac{-16}{12} r_2+r_3\to r_3 \longrightarrow$$

سه نزاهیت

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 16 \\ 0 & 12 & -16 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{array}\right]$$ ناسازگار

(الف

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & -3 & 12 & 2 \\ 7 & 1 & 8 & 5 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[-2r_1+r_2 \to r_2]{-7r_1+r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -9 & -9 & 18 & 0 \\ 0 & -13 & -13 & 26 & 0 \end{array}\right]$$

سطر سوم مضربی از سطر دوم ⇐

$r_2/-9 \to r_2$

سطری پلکانی ⇐ ref

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_2+r_1 \to r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(کاهش یافته) rref

عناصر محوری ⇐ متغیرهای پایه (وابسته = x_1, x_2)

⇐ ∞ جواب

$$\Rightarrow x_1 = 1 - x_3 - x_4$$
$$x_2 = -x_3 + 2x_4$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x_3 - x_4 \\ -x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

آزاد

سوال 3.2 ص 152 :

(ب rref می خواهیم

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

x_1, x_2, x_3, x_4

$r_1/5 \to r_1$
$-r_3+r_4 \to r_4$
$-2r_3+r_2 \to r_2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

r_2 همان r_4 است ←

جابجایی بعضی از سطرها ⇐

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_3, x_1, x_2, x_4

$-3r_3+r_1 \to r_1$
$-2r_2+r_1 \to r_1$
⇐
$r_1/-9 \to r_1$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$-r_1+r_3 \to r_3$
$-3r_1+r_2 \to r_2$
⇐ جابجایی سطرها

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_3, x_4, x_5

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \checkmark$$

$$x_3 = -1/3 \checkmark \quad x_4 = 5/9 \checkmark \quad x_5 = \frac{4}{9} \checkmark$$

سوال 4-2 :

1) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[-3r_1+r_3 \to r_3]{-2r_1+r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$

$\Rightarrow$ r_3 و r_2 یکی اند، $r_2/-2 \to r_2$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_2+r_1 \to r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

عناصر محوری (متغیرهای وابسته)

∞ جواب
سازگار است.

$\Rightarrow x_1 = -2x_2$
$x_3 = 1$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

معادله یک خط در R_3

---

2) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[-2r_3+r_2 \to r_2]{-2r_1+r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$

$\Rightarrow$ سطرهای 1 و 2 و 4 یکی اند
$-r_4+r_3 \to r_3$ ← جابجایی سطرها

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$ سازگار است

∞ جواب

متغیرهای آزاد (ستون‌های 3 و 4)

پایه اند (ستون‌های 1 و 2)

سوال 7،2 ص 153 :

$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[-3r_1+r_4 \to r_4]{-2r_1+r_2 \to r_2,\ -2r_1+r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{-r_4+r_1}$ جابجایی سطرها $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_5 = -1 \\ x_1 = 1 - x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 1 - x_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1-x_2)^2 - 4x_5^2 = 0 \\ x_3^2 - x_5^2 = 0 \end{cases}$$

$\pm 2 = (x_1 - x_2) = 2x_4 \Rightarrow x_4 = \pm 1$

$\Rightarrow x_3 = \pm 1$

چهار دسته جواب داریم چون $x_3 = \pm 1 \wedge x_4 = \pm 1 \wedge x_5 = -1$ ⇐ $x_1 = 1 - x_3 - 2x_4$، $x_2 = 1 - x_3$

(-2, 0, 1, 1, -1)
(2, 0, 1, -1, -1)
(0, 2, -1, 1, -1)
(4, 2, -1, -1, -1) ✓

سوال 142 ص 155 : گزینه D بدلیل اینکه PLU است ← حذف

الف) حل نشده :

ب) روش چهارم (بلوکی غیر بلوکی)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 9 & 4 & 10 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_1 & 1 & 0 \\ L_2 & L_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_4 & u_6 \\ 0 & u_2 & u_5 \\ 0 & 0 & u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 = u_1 \mid 1 = u_4 \mid 3 = u_6$$

$L_1 u_1 = A_{21} = 9 = 3 \times L_1 \Rightarrow L_1 = 3$ ✓

$u_2 : \begin{bmatrix} L_1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 + u_2 = A_{22} = 4 \Rightarrow u_2 = 1$ ✓

$L_1 u_6 + u_5 = 9 + u_5 = 10 \Rightarrow u_5 = 1$ ✓ $\quad L_2 u_1 = 6 \Rightarrow L_2 = 2$ ✓

$L_2 u_4 + L_3 u_2 = -1 = +2 + L_3 \Rightarrow L_3 = -3$ ✓ $\quad A_{33} = 5 = 6 + (-3) + u_3 \Rightarrow u_3 = 2$ ✓

$$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{U}$$

ب) روش چهارم :

$A = LU \Rightarrow U$: روش حذف گاوسی :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 9 & 4 & 10 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2r_1 + r_3 \to r_3]{-3r_1 + r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3r_2 + r_3 \to r_3} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

×(-1) ×(-1) ×(-1)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

قسمت ب:

اداده حل:

$$b=\begin{bmatrix}5\\18\\9\end{bmatrix}$$

$A=LU$

$\Rightarrow Ax=b$

$\hookrightarrow LUx=b$

$\hookrightarrow Ux=y$

$\hookrightarrow Ly=b \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&-3&1\end{bmatrix} y=\begin{bmatrix}5\\18\\9\end{bmatrix}$

روش الگوریتم جایگذاری پیشرو (از بالا به پایین):

پیشرو

$1y_1=5 \Rightarrow y_1=5$ ✓

$3y_1+y_2=18 \Rightarrow y_2=3$ ✓

$2y_1-3y_2+y_3=9 \Rightarrow 10-9+y_3=9 \Rightarrow y_3=8$ ✓

$\hookrightarrow Ux=y=\begin{bmatrix}5\\3\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&3\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ ← جایگذاری پسرو از پایین به بالا

$\Rightarrow 2x_3=8 \Rightarrow x_3=4$ ✓ | $x_2+x_3=3 \Rightarrow x_2=-1$ ✓

$\Rightarrow 3x_1+(-1)+12=5 \Rightarrow x_1=-2$ ✓

$$x=\begin{bmatrix}-2\\-1\\4\end{bmatrix}$$ ✓

ج) روش سریع (سطر سوم پس از ساده شدن با سطر دوم (در ماتریس الحاقی) متغیر به ناسازگاری می‌رسد. جواب ندارد.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&2\\4&3&5\\4&3&5\end{bmatrix}=LU \Rightarrow U: \begin{bmatrix}2&1&2\\4&3&5\\4&3&5\end{bmatrix} \xrightarrow[-2r_1+r_3\to r_3]{-2r_1+r_2\to r_2} \begin{bmatrix}2&1&2\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_3\to r_3} \begin{bmatrix}2&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}=U \qquad L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&1&1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}=A$$

L ↑ U ↑

سوال 16.2 ص 155-156 : الف) حل نشده

ب) آیا مثبت معین است؟

$M_1 = 1 > 0$ ✓ $\quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ ✗

غیر مثبت معین نیست پس تجزیه چالسکی ندارد.

ج) مثبت معین؟ (باید متفاوت نیز باشد.)

$M_1 = 2 > 0$ ✓ $\quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} > 0$ ✓

$M_3 = |A| > 0$ ✓ بله

$$\Rightarrow A = LL^T = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ L_4 & L_2 & 0 \\ L_6 & L_5 & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & L_4 & L_6 \\ 0 & L_2 & L_5 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow L_1^2 = 2 \Rightarrow \boxed{L_1 = \sqrt{2}}$ ✓ $\quad \sqrt{2}\, L_4 = -1 \Rightarrow \boxed{L_4 = \frac{-\sqrt{2}}{2}}$ ✓ $\quad \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_6 \\ L_5 \\ L_3 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\, L_6 = 0 \Rightarrow \boxed{L_6 = 0}$ ✓

$L_4^2 + L_2^2 = 2 = \frac{1}{2} + L_2^2 = 2 \Rightarrow 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{L_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}}$ ✓

$\begin{bmatrix} L_4 & L_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_6 \\ L_5 \\ L_3 \end{bmatrix} = A_{23} = -1 = 0 + \sqrt{\frac{3}{2}}\, L_5 \Rightarrow \boxed{L_5 = -\sqrt{\frac{2}{3}}}$ ✓

$\Rightarrow A_{33} = 2 = 0 + \frac{2}{3} + L_3^2 \Rightarrow 2 - \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}} = L_3}$ ✓

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \checkmark \qquad L^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \checkmark$$

سوال 2-17 ص 156:

ب) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A \Rightarrow$ در سوال قبل ماتریس A را تجزیه چالسکی کردیم:

$$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2/3} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & -\sqrt{2/3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}_{L^T} = LL^T \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Ax = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = LL^T x = b \hookrightarrow L^T x = y \;\; Ly = b$$

جایگذاری $Ly=b$ پیشرو:

$\sqrt{2}\, y_1 = 1 \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ ✓ $\Big| -\frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \sqrt{3/2}\, y_2 = 2$

$\Rightarrow \frac{5}{2} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{6}} = y_2}$ ✓ $\Big| 0 y_1 + \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) y_2 + \frac{2}{\sqrt{3}} y_3 = -1$

$\Rightarrow \boxed{y_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}}$ ✓ $\Rightarrow L^T x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$ جایگذاری $L^T x = y$ پسرو از پایین (بالا):

$\Rightarrow \boxed{x_3 = 1/2}$ ✓ $\Big| \frac{5}{\sqrt{6}} = \sqrt{3/2}\, x_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\, x_3 = \sqrt{3/2}\, x_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2/3} = \frac{5}{\sqrt{6}}$ ✓ $\cdot \frac{2}{\sqrt{3}} x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\times\sqrt{6} \Rightarrow 3x_2 - 1 = 5 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2}$ ✓ $\Big| \sqrt{2}\, x_1 - \frac{\sqrt{2}\, x_2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = x_1 - \frac{1}{2} \times 2 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1.5}$ ✓

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$ ✓

ادامه سوال 17_2 قسمت الف)

$x_1 = 1$ ✓

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ✓

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ L_3 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & L_3 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow L_1^2 = 1 \Rightarrow L_1 = 1$$

$$\Rightarrow L_3 = 2 \Rightarrow \quad L_3^2 + L_2^2 = 8 = 4 + L_2^2 = 8 \Rightarrow L_2 = 2$$ ✓

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad LL^T x = b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Ly = b \Rightarrow L^T x = y$$

Amazon

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ جایگذاری پیشرو $\Rightarrow y_1 = -1, \; y_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جایگذاری پیشرو

$$\Rightarrow 2x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 1/2 \;\wedge\; x_2 = -2$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$ ✓

سوال 18_2 : الف)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3r_1 + r_3 \to r_3]{-r_1 + r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_2 + r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

→ ناسازگار ✓

ب)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3r_1 + r_3 \to r_3]{-2r_1 + r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

→ سازگار ✓

سوال 19.2 صفحه 156 : الف) ماتریس منفرد $\Leftarrow |A|=0$ ✓

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=0 \checkmark \quad = -1+(-1)+2=0$$

ب) A^{-1} ؟ $\Leftarrow \varepsilon=1$

$$A=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|} \Rightarrow adj(A)=\begin{bmatrix}+(-1)&-1&+(+1)\\-1&+0&+1\\+2&+2&+(-3)\end{bmatrix}^T$$

$$\Rightarrow adj(A)=\begin{bmatrix}-1&-1&2\\-1&0&2\\1&1&-3\end{bmatrix} \quad |A|=-1 \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&0&-2\\-1&-1&3\end{bmatrix}$$

$\kappa =$ عدد حالت $= \|A\|\,\|A^{-1}\| =$ (نرم دوماتریس A^{-1} در ماتریس A) $= \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$

$= \frac{\text{بزرگترین مقدار منفرد}}{\text{کوچکترین مقدار منفرد}} = \frac{\sqrt{\lambda_{max}}}{\sqrt{\lambda_{min}}} \Rightarrow |A^TA-\lambda I|=0$: مقادیر منفرد A برابر مقادیر ویژه A^TA

$$\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^T \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}2&1&1\\1&-1&0\\2&0&1\end{bmatrix}}_{A^T} \times \underbrace{\begin{bmatrix}2&1&2\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}}_{A} = A^TA = \begin{bmatrix}6&1&5\\1&2&2\\5&2&5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A^TA-\lambda I|=0 \rightsquigarrow \begin{vmatrix}6-\lambda&1&5\\1&2-\lambda&2\\5&2&5-\lambda\end{vmatrix}=0 = -\lambda^3+13\lambda^2-22\lambda+1=0$$

wolframalpha

$\sqrt{11,01}=3,3=\sigma_1=\sqrt{\lambda_{max}} \Leftarrow \quad \lambda_1=11,01$

$\lambda_2=1,94$

$\sqrt{0,04}=0,2=\sigma_3=\sqrt{\lambda_{min}} \Leftarrow \quad \lambda_3=0,04$

$\hookrightarrow \frac{3,3}{0,2}=\kappa=$ Matrix condition Number $\cong 16,5$

well-conditioned $\Leftarrow$ عدد خوشحالت