اگر $|A|\neq 0$ ← دستگاه = سازگار ← یک جواب

اگر $|A|=0$ ← و دستگاه = سازگار ← ∞ جواب

if $m=n$: اگر $|A|=0$ ← و دستگاه ناسازگار ← 0 جواب

دستگاه $m\times n$ ← m تعداد معادلات = سطر n = تعداد مجهولات = ستون

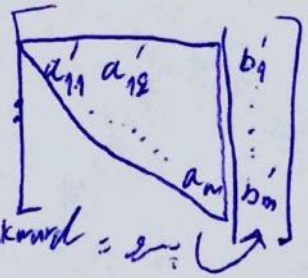
اگر $m<n$ ← فرو معین

اگر $m>n$ (تعداد مجهولات کمتر از تعداد معادلات) ← فرامعین

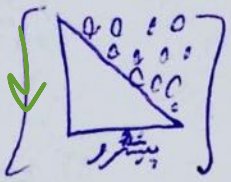
عدد حالت $\mathcal{K}=\|A\|\,\|A^{-1}\|$ ضرب نرم دو ماتریس ≥ 1.

اگر عدد حالت مقدار زیاد و بزرگی باشد، بیانگر این است که ماتریس نزدیک منفرد ($|A|=0$) شدن است.

الگوریتم جایگزینی پیشرو



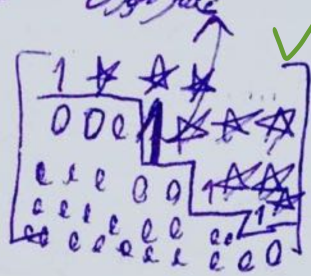
backward = پسرو



پیشرو

فرم پلکانی سطری

عنصر محوری



متغیرهای وابسته مربوط به ستون‌های هستند که عناصر محوری در آن‌ها قرار دارند و مابقی آزادند

← ستون‌های محوری = عناصر وابسته

روش‌های وارون ماتریس

① $[A|I]\to[I|A^{-1}]$

② $A^{-1}=\dfrac{adj(A)}{|A|}$ ⇒ C^T = ماتریس کهادها ترانهاده

تجزیه LU:

$A=LU$

$Ax=b\Rightarrow LUx=b$

$\Rightarrow Ux=y\Rightarrow Ly=b$

$$\underset{2\times 2}{A}=LU=\begin{bmatrix} x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ L_{21} & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12}\\ 0 & u_{22}\end{bmatrix}$$

روش بلوک

قطر اصلی باید یک باشد.

$$=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12}\\ L_{21}u_{11} & L_{21}u_{12}+L_{22}u_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y\\ z & w\end{bmatrix}$$

به دست آوردن U از بالا مثلثی کردن A

به دست آوردن L یعنی $\underline{E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}}$

$E_k\cdots E_2E_1A=U$

تجزیه چالسکی ← برای ماتریس A مثبت معین

$A=LL^T$

← تمام مینورها باید + باشند.

$$A=\begin{bmatrix} x & y\\ z & w\end{bmatrix}=LL^T=\begin{bmatrix} L_{11} & 0\\ L_{21} & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_{11} & L_{21}\\ 0 & L_{22}\end{bmatrix}$$

قطر اصلی عناصر L صفر نیست

$$=\begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{11}\times L_{21}\\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2+L_{22}^2\end{bmatrix}$$

مختلط ها کلی نیست

$\|u\|_2\geq 0$

نامساوی مثلثی: $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$

کوشی-شوارتز: $|\langle u,v\rangle|\leq\|u\|\,\|v\|$

نرم $L_1=1$: $\|u\|_1=(|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|)$

نرم p یا L_p: $\|u\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p\right)^{1/p}=\left(|u_1|^p+|u_2|^p+\cdots+|u_n|^p\right)^{1/p}$

نرم دو = نرم L_2 = نرم اقلیدسی = $\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2\right)^{1/2}$

نرم ماکزیمم = نرم ∞ = L_∞: $\|u\|_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{|u_i|\}$ ← ماکزیمم اندازه

$\langle u,v\rangle=\|u\|\,\|v\|\times\cos\theta$

ضرب: $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$

نرم توابع: L_1: $\|f\|_1=\int_0^\infty|f(t)|\,dt$

L_2: $\|f\|_2=\left(\int_0^\infty f(t)^2\,dt\right)^{1/2}$

L_∞: $\|f\|_\infty=\sup\limits_{t\geq 0}|f(t)|$ ← بیشترین مقدار

$|\langle f,g\rangle|\leq\|f\|\,\|g\|$

$\Rightarrow\sqrt{\int_a^b f^2\,dx}\;\sqrt{\int_a^b g^2\,dx}$

اثر ماتریس: $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\Rightarrow tr(AB)=tr(BA)\Rightarrow tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$

ماتریس منفرد = ویژه = عدم وجود A^{-1} ⇐ $|A|=0$

نرم ماتریس: نرم p: $\|A\|_p=\max\dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}=\max\limits_{\|x\|_p=1}\|Ax\|_p$

x ≠ بردار صفر

نرم $p=1$: $\|A\|_1=\max\limits_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1=\max\limits_{j}\left(\sum_{i}|a_{ij}|\right)$ = بزرگترین مجموع قدر مطلق‌های عناصر ستون‌های ماتریس A (است)

← برای راحتی اندازه بردار x را یک در نظر بگیریم

نرم $p=\infty$: $\|A\|_\infty=\max\|Ax\|_\infty=\max\limits_{i}\left(\sum_{j}|a_{ij}|\right)$ = بزرگترین مقدار مجموع قدر مطلق عناصر سطرهای ماتریس.

نرم $p=2$: $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{max}}$ ⇐ $\underline{|A^TA-\lambda I|=0}$: مقادیر ویژه SVD

$\Rightarrow\|A^{-1}\|_2=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}}$

نرم فروبنیوس: $\|A\|_F=\left(\sum\sum|a_{ij}|^2\right)^{1/2}=\sqrt{tr(A^TA)}$ (نیلی است)

ماتریس متقارن: $A = A^T$ ← هر ماتریس مربعی A ← $A + A^T$ = متقارن ، $A - A^T$ = شبه متقارن

ماتریس متقارن: AA^T ؛ $(A_{m\times n})$ ـــ معکوس یک ماتریس متقارن = متقارن ـــ

هر ماتریس: $A = P + Q$ (متقارن ، شبه متقارن)

$\Rightarrow P = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ، $Q = \frac{1}{2}(A - A^T)$

ماتریس‌هایی با اعداد مختلط = حذف.

ماتریس هرمیتی = مربعی ، درایه‌های قطر اصلی باید صفر و حقیقی باشند. $a_{ij} = \bar{a}_{ji} \Leftarrow A^* = A$

معکوس ماتریس هرمیتی = هرمیتی ؛ $A^{-1} = (A^{-1})^*$

$\Rightarrow A = C + jD \Rightarrow C = C^T$ (متقارن) ، $D = -D^T$ (شبه متقارن)

هر ماتریس ؛ $A = \underbrace{G + jH}_{\text{ماتریس‌های هرمیتی}} \Rightarrow G = \frac{1}{2}(A + A^*)$ ، $H = \frac{1}{2j}(A - A^*)$

ماتریس شبه هرمیتی ؛ $A^* = -A \Rightarrow A = C + jD \Rightarrow C = -C^T$ ، $D = D^T$

[illegible]

ماتریس متعامد: $A^TA = AA^T = I$ ، $|A| = \pm 1$

$\Leftrightarrow A^T = A^{-1} \Longrightarrow$ A متعامد $\xrightarrow{\text{آنگاه}}$ A^{-1}, A^T, AB = ویژگی متعامد

B = متعامد ؛ توجه کنید که ماتریس متعامد، متقارن نیست

ماتریس مثبت معین ؛ تمام مینورها تا دترمینان > 0

* با معیار سیلوستر

ماتریس منفی معین ؛ $a < 0$ ، $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} > 0$ ، $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} < 0 \ldots$

$-$ $+$ $-$

شرط مثبت نیمه معین : ~~تمام مینورها~~ ≥ 0 و $|A| = 0$

$a_{ii} \geq 0$ ، $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0$ ، $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \geq 0$ ...

برای تمام $i < j < k$

شرط منفی نیمه معین :

$a_{ii} \leq 0$ ، $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0$ ، $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \leq 0$ ، ... ، $|A| = 0$

$-$ و 0 ، $+$ و 0

$i < j < k$

تمامی حالات ممکن

(مثل راست)

بررسی زیرفضا بودن: $\forall s,t \in S \to s+t \in S$
$\forall s \in S, \forall a \in F \to as \in S$
شروط لازم زیرفضا بودن

شرط لازم و کافی برای استقلال خطی n بردار n تایی (مربعی) آن است که دترمینان ضرایب آن ها مخالف صفر باشد.

هر خط راستی که از مبدأ (در فضای R^2) عبور کند، یک زیرفضای برداری از R^2 است. (از آنجا که عرض از مبدأ صفر است)
ترکیب های خطی ستون های ماتریس را با $C(A)$ نمایش می دهند. (فضای ستون های ماتریس)

نمایش ستون فضای ماتریس: $C(A)=\left\{b\in R^3 \mid b=a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ OR $C(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

در ماتریس های مربعی در صورتی که $|A|\neq0$ یعنی به ازای هر برداری (دلخواه) می توان جواب پیدا کرد، پس بردارهای (مثلا ستون) آن ماتریس، فضای R^3 را span می کنند.
اگر $|A|=0$ ← نمی توان اسپن کرد فضا را

در صورتی که بعد از rref کردن ماتریس، عناصر محوری کمتری از تعداد متغیرها داشته باشیم، می توانیم بگوییم که بردارهای ستونی، وابسته خطی بوده و به تعداد عناصر محوری موجود، که در داخل آن بردارها هستند، بردارهای مستقل خطی نسبت به هم داشته ایم. پس آن متغیرهای آن ستون ها مستقل و غیرآزاد بوده و هر ستونی که عنصر محوری نداشته، متغیر متناسبش هم، آزاد بوده و موجب وابستگی ایجاد کردن می شود.

برای بررسی استقلال یا وابستگی خطی داریم:
$a\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{rref}\left[\begin{array}{c|c} & 0\\ & \vdots\\ & 0\end{array}\right]$
بردار صفر
بررسی می کنیم آیا تنها جواب 0 امکان پذیر است یا نه
اگر فقط 0 جواب بود ← مستقل خطی

اگر دترمینان مخالف صفر باشه
اون وقت یه جواب داریم اون هم صفر هستش
ولی در غیر ایصورت نمیشه گفتش که صفر تنها جواب هستش

در یک فضای برداری مثل V، $u_1,\dots,u_n$ اجزای تشکیل یک پایه می دهند اگر دو شرط فوق را داشته باشند:
① آن فضای برداری (V) را اسپن کنند: $V=sp\{u_1,\dots,u_n\}$
② بردارهای $u_1,\dots,u_n$ مستقل خطی باشند.

بعد فضای V = تعداد بردارهای پایه = $\dim(V)$ = حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی
⇐ در یک فضای n بعدی حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی n تا است، یعنی کمتر از n تا از آن نمی توانند آن فضا را اسپن کنند. ولی کمتر از n تا بردار می توانند مستقل خطی باشند، اما بیشتر از آن نه، یعنی حتما وابستگی داریم

علت چه؟ ① span و تشکیل دادن پایه ② مستقل هستند؟

اگر دترمینان توانستیم بزنیم و دیدیم که $|\ |\neq0$ است، پس دو شرط span و استقلال را داریم و می شود پایه ساخت

بردارهای پایه چند جمله ای P_n: $P_n=sp\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$

بررسی span کردن:
$a\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\\vdots\\r_n\end{bmatrix}\xrightarrow{rref}\left[\begin{array}{c|c} & r_1\\ & \vdots\\ & r_n\end{array}\right]$
بردار r بحث span
← آیا بینهایت جواب دارد؟ یعنی بردار r هرچه می تواند باشد از ترکیب های خطی بردارهایمان؟ یعنی r span می شود؟ دستگاه بینهایت جواب داشته باشد.

پس اگر $|A|\neq0$ ⇐ هم اسپن می کنند و هم مستقل خطی اند که پایه می شوند.

بحث زیرفضا و پایه بودن را اینجا گرفت کلی جدا اند

آیا بردارهای فوق تشکیل پایه برای R^3 می دهند؟
$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix}$ ؟
⇐ چون غیرممکن است که مستقل خطی باشند، پایه نمی توانند باشند ولی شاید بتوانند R^3 را span کنند.

استقلال خطی:
$c_1+c_2+c_3+c_4=0$
$c_2+c_3+c_4=0$
$c_3+c_4=0$
$c_4=0$
چپ رو
$|A|\neq0$ ← فقط جواب $c_1=c_2=c_3=c_4=0$ دارد.

شرط اسپن کردن:
$c_1+c_2+c_3+c_4=r_1$
$c_2+c_3+c_4=r_2$
$c_3+c_4=r_3$
$c_4=r_4$
$|A|\neq0$ ← بینهایت جواب

$v_1=ae_1+be_2+ce_3$
$v_2=de_1+ee_2+fe_3$
$v_3=ge_1+he_2+Ie_3$
$\Rightarrow k=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&I\end{bmatrix}\Rightarrow[v_1,v_2,v_3]=[e_1,e_2,e_3]k$
ماتریس تغییر پایه: (از پایه v_1,v_2,v_3 به پایه e_1,e_2,e_3) ⇐
که در اینجا به دلیل اینکه e_1,e_2 پایه های استاندارد، پس $k=[v_1,v_2,v_3]$

صفحات مهم جزوه 3: 26 - 33,5 - 34 - 39 - 46 - 50 -

k = ماتریس تغییر پایه از v به e ها ⟶ $k\times[u]_v=[u]_e$ = تغییر بردار u که در پایه v قرار دارد به بردار u در پایه e (E)
و k^{-1} = ماتریس تغییر پایه از e به v ها
یا: $[u]_e=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$

$R(A)=sp\{$ بردارهای سطری مستقل که دارای عناصر محوری در فرم rref ماتریس بوده اند $\}$
مثال: $\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\0&2&1\\3&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{rref}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1/2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
① = سطرهای دارای عناصر محوری
$R(A)=sp(\ \ )$

بدون استفاده و محاسبه ماتریس تغییر پایه: تبدیل بردار w در پایه e به $[w]_v$ (تبدیل راست)
$[w]_e=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3 \Rightarrow [w]_v=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=C$ بدست آوردن ضرایب

رتبه کامل: $|A|\neq0$ ⇐ یعنی تمامی ستون ها یا سطرها مستقل خطی اند. $A_{n\times n}$ (مربعی)
نقص رتبه: $|A|=0$ و ماتریس منفرد و حتما تعدادی از ستون های آن وابستگی دارند.

بدون حل معادلات می توانیم از روی رتبه بگوییم که دستگاه جواب دارد یا نه: اگر $rank(A)=r=rank(A|b)$ ⇐ سیستم سازگار است و یک جواب دارد. اگر رتبه کامل داشته باشد.
⇐ سازگار است و بینهایت جواب دارد اگر نقص رتبه داشته باشد.
باید مربعی باشد.

ضرب یک ماتریس غیرمنفرد ($|A|\neq0$) در ماتریس $A_{m\times n}$، رتبه آن را تغییر نمی دهد.

با توجه به محل عناصر محوری می توان فهمید کدام ستون ها مستقل خطی اند. مثلا اگر ستون های 1 و 3 دارای عناصر محوری باشند، پس آن ستون ها مستقل اند.

رتبه ماتریس = بعد فضای گستره؛ $\dim[R(A)]=rank(A)$

ماتریس های $A_{m\times n}$: $rank(A)\le\min(m,n)$ اگر مساوی باشد، رتبه کامل و اگر کوچکتر باشد، نقص رتبه

فضای پوچ = $N(A)$ ← مجموعه تمام پاسخ‌های معادله $Ax=0$: $N(A)=\{x\in V_1 \mid Ax=0\}$

بعد فضای پوچ را پوچی می‌نامند: پوچی = $\dim[N(A)] = \text{nullity}(A) = \vartheta(A)$

اگر تنها پاسخ معادله: پاسخ بدیهی (صفر) <= رتبه ماتریس کامل و کلیه بردارهای ستونی یا سطری این ماتریس مستقل خطی اند.

داریم: $\text{rank}(A)+\text{nullity}(A)=n$ = تعداد ستون‌ها در $A_{m\times n}$ = تعداد متغیرها

تعداد بردارهای (مجموعه پاسخ‌ها) $N(A)$ برابر با پوچی ماتریس می‌باشد. و آن را به کمک مقداردهی جداگانه به متغیرهای آزاد به دست می‌آوریم:

مثال: $\text{nullity}(A)=2 \Rightarrow \text{rref}: \begin{cases} x_1+\boxed{x_2}=0 \\ x_3+\boxed{x_4}=0 \end{cases}$ آزاد $=\square$

$\Rightarrow N(A)=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$

زیرفضاهای اساسی ماتریس A: فضای ستونی: $R(A)$ = فضای ... ماتریس A

فضای پوچ چپ: $N(A^T)=A^T$

بعد: $\dim[N(A^T)] = m - \text{rank}(A)$

$R(A)$ مکمل متعامد فضای = $R(A)^\perp = N(A^T)$

$\dim[R(A^T)] = \text{rank}(A)$

انواع تبدیلات: هندسی - مختصاتی <= هندسی: محورهای مختصات ثابت، بردار متغیر (تغییر می‌کند)

اثبات نداریم امتحان | (قبل رفتن بهشون)

مختصاتی: محورهای مختصات جابجا، بردار ثابت است.

تبدیل خطی دو شرط دارد: 1) $T(u+v)=T(u)+T(v)$ 2) $T(cu)=cT(u)$

$\Rightarrow T(c_1u+c_2v)=c_1T(u)+c_2T(v)$

باید دو شرط را بررسی کرد و بعد گفت که آیا خطی است یا نه.

$\dim[\text{kernel}(T)] + \dim[\text{range}(T)] = \dim(V_1)$

برای هر تبدیل خطی $T: V_1 \to V_2$ می‌توان ماتریس تبدیل داشته باشیم: $T(u)=Au \quad u\in V_1$ مثل داون کردن

تبدیل خطی یک به یک: $T: V_1 \to V_2$ باید شرط فوق را داشته باشد: $v_1,v_2\in V,\ v_1=v_2 \Longleftrightarrow T(v_1)=T(v_2)$

$\Rightarrow [v_1\ v_2 \dots v_m]A = [T(e_1) \dots T(e_n)] \underset{(\text{راست})}{\Longrightarrow} [v_1\ v_2 \dots v_m \mid T(e_1)\ T(e_2) \dots T(e_n)] \xrightarrow{\text{گاوس-جردن}} [I \mid A]$

پایه‌های فضای R^n ، e پایه‌های استاندارد ، ماتریس تبدیل به پایه‌های v وابسته است

برای تبدیلات خطی داریم: $\text{range}(T)=C(A)$ و $\ker(T)=N(A)$

تبدیل انتقال: در فضای دو بعدی: $\begin{bmatrix}1&0&\Delta x\\0&1&\Delta y\\0&0&1\end{bmatrix}=A_T$ ؛ در فضای سه بعدی: $\begin{bmatrix}1&0&0&\Delta x\\0&1&0&\Delta y\\0&0&1&\Delta z\\0&0&0&1\end{bmatrix}=A_T$

تبدیل انعکاس یا قرینه: نسبت به محورها: x ثابت، y قرینه $\Rightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=A_x$ ؛ نسبت به محور y ها: y ثابت، x قرینه: $A_y=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ؛ نسبت به مبدأ مختصات: $A_O=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

انعکاس در فضای 3 بعدی: نسبت به محور x ها: x ثابت، y و z قرینه - نسبت به صفحات xy: x,y ثابت، z قرینه

تبدیل تغییر مقیاس: در فضای 3 بعدی: S_x برابر کردن x ، $\begin{bmatrix}S_x&0&0&0\\0&S_y&0&0\\0&0&S_z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_x x_1\\S_y y_1\\S_z z_1\\1\end{bmatrix}$

دوران یا دوران حول مبدأ: $A_R=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$

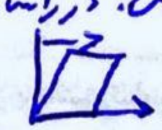
R^3: حول محور y: y ثابت، دو محور دیگر دوران:

$y_2=y_1$

$x_2=x_1\cos\theta+z_1\sin\theta$

$z_2=-x_1\sin\theta+z_1\cos\theta \Rightarrow R_y=\begin{bmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta&0\\0&1&0&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

ماتریس کشیدگی (تبدیل): در فضای دو بعدی: در راستای محور x ها: $A=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+ky_1\\y_1\end{bmatrix}$



در راستای y ها: $A=\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}$

پایان

جزوه 3،2،1