نام استاد: جواد وکیلی   تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۳/۰۶   مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

تعداد سوال: ۱۰   مجموع بارم از ۲۰: ۵ نمره

ردیف | هر سوال ۰/۵ نمره دارد. | بارم

۱- بردار $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۵ \\ ۲ \end{pmatrix}$ را به‌صورت ترکیب خطی از بردارهای زیر بنویسید.

$$\vec{\mathbf{v}}_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۲ \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v}}_۲ = \begin{pmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v}}_۳ = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

سوالات ۸،۲،۱،۳،۱۵،۷ حل شده؛

۲- با فرض اینکه ۴ $= \|\vec{\mathbf{u}}\|$ و ۵ $= \|\vec{\mathbf{v}}\|$، مطلوبست محاسبه

$$(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}})^t(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}).$$

۳- با استفاده از خواص ~~انتگرال~~ دترمینان نشان دهید

$$det\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ k & ۱ & ۱ & ۱ \\ k & k & ۱ & ۱ \\ k & k & k & ۱ \end{bmatrix} = (۱-k)^۳.$$

۴- از دو روش ۱- ماتریس الحاقی و ۲-گاوس-جردن معکوس ماتریس زیر را به‌دست آورید. سپس با نرم دو عدد حالت آن را به‌دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۵- برای ماتریس زیر نرم‌های $\|A\|_۱$، $\|A\|_\infty$ و $\|A\|_F$ را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -۳ & -۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

۶- مقدار a را طوری تعیین کنید که ماتریس زیر متعامد باشد.

$$A = \frac{1}{1+2a^2}\begin{bmatrix} 1 & -2a & 2a^2 \\ 2a & 1-2a^2 & -2a \\ 2a^2 & 2a & 1 \end{bmatrix}$$

۷- به‌ازای چه مقادیری از k ماتریس A زیر معین مثبت می باشد.

$$A = \begin{bmatrix} k & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۰ \\ ۱ & ۰ & k \end{bmatrix}$$

۸- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید. سپس سازگاری یا عدم سازگاری آن را مشخص کنید و در صورت سازگاری بیان کنید دستگاه بی شمار جواب دارد یا دارای جواب منحصربفرد می‌باشد. در صورت سازگاری دستگاه، جواب‌ها را به‌طور کامل مشخص نمایید.

$$x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ - ۴x_۴ = ۲$$
$$۲x_۱ + ۴x_۲ + ۳x_۳ + x_۴ = ۵$$

سوالات حل شده از 7 سوال اول:

1,2,3,5,7

به صورت کامل

سوالات 4 و 6 ناقص حل شده‌اند.

---

①

$$\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\3 & 0 & 1\\2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ روش حذف گاوس: $[A|u]:$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\3 & 0 & 1 & 5\\2 & 1 & 3 & 2\end{array}\right] \xrightarrow[-2r_1+r_3\to r_3]{-3r_1+r_2\to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\0 & 3 & 1 & 2\\0 & 3 & 3 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{-r_2+r_3\to r_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 1\\0 & 3 & 1 & 2\\0 & 0 & 2 & -2\end{array}\right] \xrightarrow[\text{پسرو (از بالا به پایین)}]{\text{جایگذاری}} 2c_3 = -2 \Rightarrow \boxed{c_3 = -1} \quad 3c_2 + c_3 = 2 \to \boxed{c_2 = 1}$$

$$c_1 - c_2 + 0c_3 = 1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 2} \Rightarrow \boxed{2\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{u}}$$

---

②

$$(u+v)^T(u+v) = \langle u+v, u+v\rangle = \|u+v\|^{1/2} = \sqrt{\|u+v\|}$$

میدانیم $\big|\|u\| - \|v\|\big| \le \|u+v\| \le \|u\| + \|v\| \Rightarrow |5-4| \le \|u+v\| \le 5+4$

$$\Rightarrow 1 \le \|u+v\| \le 9$$

---

④ تا نیمه کامل، بقیه‌اش ناقص

1) ماتریس الحاقی: $A^{-1} = \dfrac{adj(A)}{|A|} \Rightarrow |A| = 1\left(\begin{vmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{vmatrix}\right) = -3$

$$adj(A) = C^T \Rightarrow C = \text{ماتریس کهادها} = \begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\1 & 1 & -1\\5 & -4 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix}-3 & 1 & 5\\0 & 1 & -4\\0 & -1 & +1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{C^T}{-3} = \begin{bmatrix}1 & -1/3 & -5/3\\0 & -1/3 & 4/3\\0 & 1/3 & -1/3\end{bmatrix}$$

2) گاوس جردن: $[A|I] \xrightarrow{\text{گاوس جردن}} [I|A^{-1}] \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[-2r_2+r_1\to r_1]{-r_2+r_3\to r_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0\\0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 1\end{array}\right] \Rightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & -5/3\\0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 4/3\\0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3\end{array}\right]}_{A^{-1}} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1/3 & -5/3\\0 & -1/3 & 4/3\\0 & 1/3 & -1/3\end{bmatrix}$$

$+\frac{4}{3}r_3 + r_2 \to r_2$

$-\frac{5}{3}r_3 + r_1 \to r_1$

$r_3 \div (-3) \to r_3$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\sqrt{\lambda_{max}}}{\sqrt{\lambda_{min}}} = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \varkappa =$$ عدد حالت

$$\Rightarrow |A^T A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$= \left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 6-\lambda & 11 \\ 3 & 11 & 26-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0 = 1-\lambda\left(\lambda^2 - 32\lambda + \overset{35}{\cancel{156 - 121}}\right)$$

$$-2\left(\cancel{52 - 2\lambda - 33}_{+19}\right) + 3\left(\cancel{22 - 18}_{4} + 3\lambda\right) = 0$$

$$\lambda^2 - 32\lambda + 35 - \lambda^3 + 32\lambda^2 - 35\lambda - 38 + 4\lambda + 12 + 9\lambda = 0$$

$$\boxed{= -\lambda^3 + 33\lambda^2 - 58\lambda + 9 = 0} \to \lambda_{max}? \ \to \lambda_{min}?$$

$$\|A_1\| = \max_j \left(\sum_{i=1}^{2} |a_{ij}|\right) = \max\left\{\overbrace{|-3| + |2|}^{5}, \overbrace{|-1| + |4|}^{5}\right\} = 5 \checkmark \checkmark$$ (5)

$$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) = \max\left\{|-3| + |-1|, \overbrace{|2| + |4|}^{6}\right\} = 6 \checkmark$$

$$\|A\|_F = \sqrt{|-3|^2 + |-1|^2 + |2|^2 + |4|^2} = \sqrt{30} \checkmark \quad \|A\|_F = \sqrt{tr(A^T A)} \checkmark$$

A ماتریس مثبت معین $\Rightarrow M_1 > 0, \ M_2 > 0, \ |A| > 0 \checkmark$ تا بینهایت $0 <$ (7)

$$= M_1 = k > 0 \Rightarrow k > 0 \quad M_2 = \begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow 4k - 4 > 0 \Rightarrow k > 1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow k(4k) - 2(2k) + (-4) > 0 \Rightarrow 4k^2 - 4k - 4 > 0$$

$$k^2 - k - 1 > 0 \Rightarrow k = \frac{+1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow k_1 = 0{,}5 + \frac{\sqrt{5}}{2}, \ k_2 = 0{,}5 - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \left(k > 0{,}5 + \frac{\sqrt{5}}{2} \ \cup \ k < 0{,}5 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \wedge (k > 1) \wedge (k > 0) = \left\{k > 0{,}5 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right.$$

بیشتر از 1

نتیجه

⑧

$\Rightarrow$ ماتریس الحاقی :
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_1+r_2\to r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 1 \end{array}\right]$$
ماتریس فروهین $\Leftarrow$

$m<n$

متغیرهای آزاد $= x_4$ و x_2

$$\xrightarrow{r_2+r_1\to r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \div -3\to r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1/3 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{x_1+2x_2+5x_4=3}$$
$$\Rightarrow \boxed{x_3-3x_4=-1/3}$$

متغیرهای پایه

دستگاه، حل جواب دارد و سازگار است

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3-2x_2-5x_4 \\ x_2 \\ -1/3+3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

---

⑨ باید از روش حذفی گاوسی استفاده کنیم؛

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{E_1}{\uparrow}\ 1/2\, r_1+r_2\to r_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{3}r_2+r_3\to r_3 \to E_2}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\downarrow E_3]{3/4\, r_3+r_4\to r_4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix} =$$ ماتریس بالا مثلث

$$E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Bigg\{ E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Bigg\{ E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}$$

---

⑩

$A=LU$

$\hookrightarrow U$: روش حذفی گاوسی $\Rightarrow$
$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{4}{3}r_1+r_3\to r_3\to E_2]{\overset{E_1}{\uparrow}\ -\frac{2}{3}r_1+r_2\to r_2} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\overset{E_3}{\nearrow}\ -9r_2+r_3\to r_3} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}=U \Bigg\{ L=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} \Rightarrow E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow E_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Bigg\{ E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Bigg\{ E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow E_3^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & 9 & 1 \end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

③ خاصیت دترمینان: با اضافه و کم کردن مضربی درستی از یک ردیف به ردیف دیگر، دترمینان تغییری نمی‌کند.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 & 1 \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[-kr_1+r_4\to r_4]{-kr_1+r_2\to r_2,\ -kr_1+r_3\to r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (1-k) & (1-k) & (1-k) \\ 0 & 0 & (1-k) & (1-k) \\ 0 & 0 & 0 & (1-k) \end{vmatrix} \Rightarrow$$

دترمینان ماتریس بالا مثلثی = ضرب درایه‌های روی قطر اصلی

$$\Rightarrow 1\times(1-k)(1-k)(1-k) = (1-k)^3$$

---

④ → ناقص

خاصیت مهم ماتریس‌های متعامد: $A^TA = AA^T = I \wedge A^{-1} = A^T \wedge$ بردارهای سطری یکه‌اند $\wedge\ |A| = \pm 1$

$$\Rightarrow I = A^TA = \frac{1}{(1+2a^2)^2} \times \begin{bmatrix} 1 & 2a & 2a^2 \\ -2a & 1-2a^2 & -2a \\ 2a^2 & -2a & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2a & 2a^2 \\ 2a & 1-2a^2 & -2a \\ 2a^2 & 2a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \cancel{1^2+(2a)^2+(2a^2)^2=1 \Rightarrow 4a^2+4a^3=0 \Rightarrow \boxed{a^2(1+a)=0}}$$

$$\Rightarrow \cancel{-2a+2a-4a^3+4a^3=0} \Rightarrow 0=0 \Rightarrow 4a^4-4a^2+1=0$$