بسمه تعالی

دانشگاه تبریز

سؤالات امتحانی پایان‌ترم نیمسال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

نام و نام خانوادگی:	شماره دانشجویی:	مقطع: کارشناسی	نام درس: جبرخطی کاربردی
نام استاد: جواد وکیلی	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۳/۳۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
تعداد سوال:۸			مجموع بارم از ۲۰: ۱۰ نمره

ردیف | از شش سوال آخر فقط و فقط به پنج سوال پاسخ دهید (سوال ۱، ۲ و ۳ را حتما پاسخ دهید)، هر سوال ۱/۲۵ نمره دارد. | بارم

۱- با استفاده از اثر (Trace) ماتریس‌های A، $A^۲$ و $A^۳$، دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$2(5) - 1(-1+3)$

$10-2=8$

$-1+3=2$

۲- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید. سپس سازگاری یا عدم سازگاری آن را مشخص کنید و در صورت سازگاری بیان کنید دستگاه بی شمار جواب دارد یا دارای جواب منحصربفرد می‌باشد. در صورت سازگاری دستگاه، جواب‌ها را به‌طور کامل مشخص نمایید.

$$\begin{aligned} x_۱+۲x_۲-x_۳-۳x_۴&=۱\\ x_۱+x_۲+x_۳+x_۴&=۳\end{aligned}$$

۳-

الف) تجزیه چالسکی (LL^t) را برای ماتریس زیر به‌دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

ب) با استفاده از تجزیه قسمت الف، دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} ۲x_۱-x_۲\quad\quad&=۱\\ -x_۱+۲x_۲-x_۳&=-۱\\ -x_۲+۲x_۳&=۲\end{aligned}$$

$2,5 \quad 1,5$

۴-

الف) زیرفضا بودن مجموعه‌های زیر را بررسی کنید و در صورت زیرفضا بودن پایه‌ای برای آن ارایه دهید.

الف) $A=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^۳ \middle| yz=۰\right\}$

$2x_1 - 0,25 = 1$

$\frac{1,25}{2}$

ب) $B=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^۳ \middle| y+z=۰\right\}$

ب) به‌ازای چه مقادیری از λ بردارهای زیر می‌توانند پایه‌ای برای فضای $\mathbb{R}^۳$ باشند؟

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}۰\\۱\\\lambda\end{pmatrix},\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-\lambda\\۰\\-۱\end{pmatrix},\mathbf{w}=\begin{pmatrix}۲\\-۱\\\lambda\end{pmatrix}.$$

۵- پایه‌ای برای فضای پوچی و فضای گستره ماتریس‌های زیر پیدا کنید و سپس رتبه و پوچی ماتریس‌های زیر را مشخص کنید.

$1,25$

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad 0,25$$

ب) $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۶ & ۸ \\ ۳ & ۶ & ۸ & ۱۰ \end{bmatrix}$

$-1x_2 = 2 - 2,25$

$-1,25$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$\frac{31}{12} - \frac{19}{12} = 1 \quad -\frac{31}{24} + \frac{38}{12\times 2} \quad \frac{76}{24} \quad -\frac{31}{24} + \frac{38}{12} - \frac{15}{8} \quad -\frac{19}{12} + \frac{30}{8}$

$\frac{12}{12} = 1 \quad 0,25 \quad \frac{45}{} - \frac{15}{}\times 3 \quad -31+76-45 \quad 152 \quad 360$

۶- با استفاده از فرآیند گرام‌اشمیت، بردارهای زیر را یکامتعامد نمایید.

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}۲\\-۱\\۰\end{pmatrix},\mathbf{v}=\begin{pmatrix}۱\\۰\\-۱\end{pmatrix},\mathbf{w}=\begin{pmatrix}۳\\۷\\-۱\end{pmatrix}$$

۷- پاسخ حداقل مربعات دستگاه معادلات $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ را برای سیستم ناسازگار با ماتریس و مقادیر سمت راست زیر به‌دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}۱&۰&۴\\۲&۲&۱۰\\۱&-۲&۲\\۱&-۲&-۲\end{bmatrix},b=\begin{pmatrix}۳\\۷\\۶\\۱\end{pmatrix}$$

۸- با استفاده از اثر (Trace) ماتریس‌های A^k معادله مشخصه را برای ماتریس‌های زیر به‌دست آورید و سپس مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های A و B را به‌دست آورید.

۵ ۸ ۹

الف) $A=\begin{bmatrix}۵&-۲&۰\\۲&۶&۲\\۰&۲&۷\end{bmatrix}$

ب) $B=\begin{bmatrix}۱&-۴&۲\\-۴&۱&-۲\\۲&-۲&-۲\end{bmatrix}$

با تشکر

وکیلی

امتحان درس: جبر خطی کاربردی

نمره به عدد

نمره به حروف

محل امضاء استاد

دانشگاه تبریز

دانشکده: برق

نام: پارسا

نام خانوادگی: یوسف نژاد محمدی

شماره دانشجوئی: 14005361 1049

نیمسال .... سال تحصیلی ....

تاریخ برگزاری امتحان ....

②

$$[A|b]:\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&-3&1\\1&1&3&1&3\end{array}\right]\xrightarrow{-r_1+r_2\to r_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&-3&1\\0&-1&4&4&2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2\times -1\to r_2]{2r_2+r_1\to r_1}\left[\begin{array}{cccc|c}\boxed{1}&0&7&5&5\\0&\boxed{1}&-4&-4&-2\end{array}\right]$$

سامر محوری

متغیر آزاد $\Rightarrow \infty$ جواب

چون $rank(A)=rank(A|b)=2 \Rightarrow$ سازگار

$\Rightarrow$ سازگار و فرو معین $(n>m) \Rightarrow \infty$ جواب

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}x_1=5-7x_3-5x_4\\x_2=-2+4x_3+4x_4\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{array}\right\}\vec{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=1\times\begin{bmatrix}5\\-2\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-7\\4\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-5\\4\\0\\1\end{bmatrix}$$

---

③

$A=LL^T$

ماتریس متقارن مثبت معین

$$=\begin{bmatrix}L_1&0&0\\L_2&L_4&0\\L_3&L_5&L_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_1&L_2&L_3\\0&L_4&L_5\\0&0&L_6\end{bmatrix}=A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow L_1^2=2\Rightarrow L_1=\sqrt{2}\ \}\ L_1L_2=-1\Rightarrow L_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \}$

$\Rightarrow L_1L_3=0\Rightarrow L_3=0\ \}\ L_2^2+L_4^2=\frac{1}{2}+L_4^2=2\Rightarrow L_4=\sqrt{\frac{3}{2}}\ \}$

$\Rightarrow L_2L_3+L_4L_5=-1=-\frac{1}{\sqrt{2}}\times 0+\sqrt{\frac{3}{2}}L_5=-1\Rightarrow L_5=-\sqrt{\frac{2}{3}}\ \}$

$\Rightarrow L_3^2+L_5^2+L_6^2=2=0+\frac{2}{3}+L_6^2=2\Rightarrow 2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}=L_6^2\Rightarrow L_6=\frac{2}{\sqrt{3}}$

الف)

$$\Rightarrow LL^T = \begin{bmatrix} \sqrt2 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2/3} & 2/\sqrt3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt2 & -1/\sqrt2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & -\sqrt{2/3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ب)

$$A = LL^T \Rightarrow A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow L\underbrace{L^T x}_{y} = b$$

$$\hookrightarrow L^T x = y \quad ②$$

$$\hookrightarrow Ly = b \quad ①$$

جایگذاری پیشرو

$$① \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt2 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2/3} & \frac{2}{\sqrt3} \end{bmatrix} \vec{y} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{\sqrt2}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt2} y_1 + \sqrt{\frac32}\, y_2 = -1 = \frac{-1}{2} + \sqrt{\frac32}\, y_2 = -1 \Rightarrow \frac{-1}{2} = \sqrt{\frac32}\, y_2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{\frac23} \times \frac12 = y_2 \Rightarrow y_2 = \frac{-1}{\sqrt6}$$

$$\Rightarrow 0 \times y_1 - \sqrt{\frac23}\, y_2 + \frac{2}{\sqrt3} y_3 = 2 \Rightarrow \frac{+\sqrt{\frac23} \times \sqrt{\frac23}}{2} + \frac{2}{\sqrt3} y_3 = 2$$

$$\Rightarrow +\frac13 + \frac{2}{\sqrt3} y_3 = 2 \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{2}{\sqrt3} y_3 \Rightarrow \cancel{\frac{5}{4}\sqrt3 = y_3} \quad y_3 = \frac{2,5}{\sqrt3}$$

$$\Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt6 \\ \cancel{} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{5}{2\sqrt3}$$

جایگذاری پسرو

$$② \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt2 & -1/\sqrt2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & -\sqrt{2/3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt3} \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{y} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt6 \\ \frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{3} \end{bmatrix}$$

$$1.\ \frac{\sqrt3}{\sqrt3} \times \frac54 = 1,25 = x_3$$

$$\Rightarrow x_3 = \cancel{\frac{\sqrt2}{2} \times \sqrt3 \times \frac54}$$

$$\cancel{\sqrt{\frac32}\, x_2 = \frac{15}{8}\sqrt{\frac23} = \frac{1}{\sqrt6} \times\sqrt6 \Rightarrow 3x_2 - \frac{15}{8} \times 2 = 1 \Rightarrow 3x_2 = 1 + \frac{30}{8}}$$

$$\sqrt{3/2}\, x_2 - \sqrt{\frac23}\, x_3 = \frac{1}{\sqrt6} \Rightarrow x_2 = 1,25$$

$\Rightarrow \sqrt{2}\, x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow[x_2 = \frac{12}{12}]{\times\sqrt{2}} 2x_1 - \cancel{\frac{12}{12}} = 1 + 0{,}25$

$\Rightarrow \frac{1{,}25}{2} = \frac{5}{8}$

$\Rightarrow \cancel{2x_1 = 1 + \frac{12}{12} = \frac{31}{12} = 2x_1} \Rightarrow \boxed{x_1 = }$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 1{,}25 \\ 0{,}25 \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix} = x$

برای زیرفضا بودن : $\forall s,t \in S \Rightarrow s+t \in S \ \wedge \ \forall s \in S, \forall a \in R \Rightarrow as \in S$ ✓ 4

$\boxed{\text{الف)}} \Rightarrow$

$zy = 0 \Longrightarrow y = 0 \xrightarrow{1} s = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ z_1 \end{bmatrix}, t = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ z_2 \end{bmatrix} \in S$

$z = 0$

$\Rightarrow s+t = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ q \end{bmatrix} \in S$ ✓ $\xrightarrow{2} c \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ 0 \\ cz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ q \end{bmatrix} \in S$ ✓

الف

$\Rightarrow s = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix}, t = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in S \xrightarrow{1} s+t = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ N \\ 0 \end{bmatrix} \in S$ ✓

$\xrightarrow{2} \forall a \in R, \forall s \in S \Rightarrow as \in R$ ✓

$\Rightarrow a \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ N \\ 0 \end{bmatrix} \in S$ ✓

$\boxed{\text{ب)}}$ $y = -z \Longrightarrow s = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -y \end{bmatrix} \xrightarrow{1} s = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -y_1 \end{bmatrix}, t = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -y_2 \end{bmatrix}$

ب)

$\Rightarrow s+t = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ -(y_1 + y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ N \\ -N \end{bmatrix} \in S$ ✓

$\xrightarrow{2} a \begin{bmatrix} x \\ y \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \\ -ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ N \\ -N \end{bmatrix} \in S$

$\boxed{\text{هر دو زیرفضا هستند}}$

✓

$\Rightarrow$ پایه‌ای برای A : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$ = پایه‌های برای زیرفضای A

$\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$

پایه‌ها

پایه‌های برای زیرفضای B : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ -y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B: \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

سوال 4 : ب) چون فضای R^3 است، تنها شرط کافی و لازم برای پایه بودن سه بردار فوق این است که دترمینان آن‌ها $\neq 0$ باشد:

$$\det(u\ v\ w) \neq 0 \Rightarrow u, v, w =$$ پایه‌ای برای فضای R^3

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+\lambda) + 2(-1) = 2\lambda^2 + (-2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda \neq \pm 1$$

سوال 5 : الف)

عملیات گاوس جردن، برای سطری پلکانی کردن ماتریس A :

$$\xrightarrow[-3r_1+r_3 \to r_3]{-r_1+r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \times -\frac{1}{2} \to r_2]{-2r_2+r_3 \to r_3}$$

وابسته

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1 \to r_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = 2 = |\dim(R(A)$$

$\Rightarrow n - \text{rank}(A) = 4 - 2 = |N(A)| =$ تعداد پایه‌های فضای پوچ A = ...زیس

$$\Rightarrow R(A) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} \to x_1 = -1.5x_3 \\ x_2 = -0.5x_3 + x_4 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.5 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ادامه در برگه دوم

برگه دهم جبر خطی

نام: پارسا		امتحان درس ....
نام خانوادگی: یوسفی نژاد محمدی		نمره به عدد ....
شماره دانشجوئی: 940053619048	دانشگاه تبریز	نمره به حروف ....
نیمسال .... سال تحصیلی		محل امضاء استاد
تاریخ برگزاری امتحان	دانشکده	

ادامه سوال 5 الف):

$$Nullity(A) = span\left\{\begin{bmatrix}-1{,}5\\-0{,}5\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \checkmark$$

$\Rightarrow$ پوچی $= 2$ و رنک ماتریس $= 2$

ب)

$$\xrightarrow[-3r_1+r_3\to r_3]{-2r_1+r_2\to r_2} \begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\0 & 0 & 2 & 4\\0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow[r_2/2\to r_2]{r_2=r_3} \begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

پایه های مستقل خطی

$$\xrightarrow{-2r_2+r_1\to r_1} \begin{bmatrix}\boxed{1} & 2 & 0 & -2\\0 & 0 & \boxed{1} & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow rank(A) = 2$$

$\|N(A)\| = n - rank(A) = 4 - 2 = 2 \checkmark =$ پوچی

$$\Rightarrow R(A) = span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\\8\end{bmatrix}\right\} \quad N(A): \begin{aligned}x_1 &= -2x_2 + 2x_4\\ x_3 &= -2x_4\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N(A) = span\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}\right\} \checkmark$$

(6)

الگوریتم گرام اشمیت

$$\Rightarrow v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$\Rightarrow x_1, x_2, x_3 \Rightarrow x_1 = u = [2, -1, 0] \Rightarrow \|x_1\|^2 = 5 \checkmark$$

$$\Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}}{5}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4/5\\-2/5\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9{,}5\\-2{,}5\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow \|x_2\|^2 = 10{,}49$$

$$\boxed{x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}} \;\; \boxed{x_2 = \begin{bmatrix} 1,8 \\ -2,5 \\ 0 \end{bmatrix}} \Rightarrow \|x_2\|^2 = 10,49 \xrightarrow{\sqrt{}} 3,23$$

$$\|x_1\|^2 = 5$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +2,8 \\ -2,5 \\ 0 \end{bmatrix}}{10,49} \begin{bmatrix} 1,8 \\ -2,5 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} + 1,15 \begin{bmatrix} 1,8 \\ -2,5 \\ 0 \end{bmatrix} - 0,2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2,07 - 0,4 \\ 7 - 2,875 + 0,2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} 5,47 \\ 4,325 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3} \rightarrow \|x_3\|^2 = 49,62 \xrightarrow{\sqrt{}} 7,04$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \;\; y_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|} \;\; y_3 = \frac{x_3}{\|x_3\|}$$

یکه‌سازی (نرمال‌سازی)

$$\Rightarrow y_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} \;\; y_2 = \begin{bmatrix} \frac{1,8}{3,23} \\ \frac{-2,5}{3,23} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,55 \\ -0,77 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = \begin{bmatrix} \frac{5,47}{7,04} \\ \frac{4,325}{7,04} \\ 1/7,04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,776 \\ 0,614 \\ 0,142 \end{bmatrix}$$

بردارها بهم متعامد $\Leftarrow$

---

(7)

$$proj_{R(A)} b = \hat{b} \;\; A^T A \hat{x} = A^T b \Rightarrow$$ بهترین $\hat{x}$ با کمترین E

پایه‌ها یا بردارها نمایان ستون‌ها
یا ترتیب ضرایب A یا فرایند گرام اشمیت

با روش متعارف

$$A^T A = \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 10 & 2 & -2 \end{bmatrix}} \underset{4\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 10 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 12 & 20 \\ 24 & 20 & 124 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 10 & 2 & -2 \end{bmatrix}} \underset{4\times 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 92 \end{bmatrix} = A^T b$$ ✓

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 12 & 20 \\ 24 & 20 & 124 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 92 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{24}{7} & 1 \\ 0 & 1 & 10/6 & 0 \\ 1 & \frac{20}{24} & \frac{124}{24} & \frac{92}{24} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{24}{7} & 1 \\ 0 & 1 & 10/6 & 0 \\ 0 & \frac{20}{24} & \frac{73}{42} & \frac{68}{24} \end{array}\right] \Rightarrow x_2 = -10/6\, x_3$$

$$\Rightarrow \frac{-10}{6} \times \frac{20}{24} x_3 + \frac{73}{42} x_3 = \frac{68}{24}$$

$$x_3 \left(\frac{-200}{144} + \frac{73}{42} \right) = \frac{68}{24}$$

$$x_3 = \frac{68}{24} \times \frac{63}{22} = \frac{357}{44} = 8,11$$

$$x_2 = \frac{-3570}{44 \times 6} = \frac{-595}{44} = -13,52$$

$$x_1 = 1 - \frac{24}{7} x_3 = 1 - \frac{24}{7} \times \frac{357}{44}$$

$$= 1 - 27,81$$

$$= -26,81$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -26,81 \\ -13,52 \\ 8,11 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\hat{x} = \hat{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 10 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -26,81 \\ -13,52 \\ 8,11 \end{bmatrix} = \cancel{\begin{bmatrix} 5,57 \\ 0,44 \\ 16,45 \\ -15,99 \end{bmatrix}} = \hat{b}$$

$|\lambda I - A| = 0$ (8)

الف)
$$\begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & 0 \\ -2 & \lambda-6 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-7 \end{vmatrix} = \lambda - 5 \left(\lambda^2 - 13\lambda + \cancel{42}^{38} - 4\right) - 2\left(14 - 2\lambda\right)$$

$$\hookrightarrow \lambda^3 - \cancel{13\lambda^2} + \cancel{38\lambda} - \cancel{5\lambda^2} + \cancel{65\lambda} - 190 - 28 + \cancel{4\lambda}$$

$$\hookrightarrow \lambda^3 - 18\lambda^2 + 107\lambda - 218 = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda_1 = 8,16 \quad \lambda_2, \lambda_3 = ?$$

ب)
$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 & -2 \\ 4 & \lambda-1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\left(\lambda^2 + \lambda - \cancel{2}^{-6} - 4\right) - 4\left(4\lambda + \cancel{8} + \cancel{8}^{16}\right)$$

$4+2\lambda$

$$-2\left(\cancel{8} + 2\lambda - 2\right) = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda - \lambda^2 - \lambda + 6 - 16\lambda - 64 - 8 - 4\lambda = 0 = \boxed{\lambda^3 - 23\lambda - 66 = 0}$$

$$? \longleftarrow \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3$$

1

$$A=\begin{bmatrix}2&1&4\\-1&2&-3\\1&1&1\end{bmatrix} \xRightarrow[-2r_3+r_1\to r_1]{r_3+r_2\to r_2} \begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&3&-2\\1&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[3r_1+r_2\to r_2]{r_1+r_3\to r_3} \begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&0&-8\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-8\\1&0&0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-8\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\0&0&-8\end{bmatrix} \quad (1\times-1\times-8)=8 = |A|$$

قطری

ضرب عناصر روی قطر اصلی

Parsa Yousefi Nejad

140153811048

$$|\lambda I_3 - A| = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

ابتدا بازگشتی را با عناصر ضرایب معادله مشخصه $|\lambda I - A|$ کیلی همیلتون ✓

ارائه سوال 8:

$n=3$

الف) $\mathrm{Trace}(A) = 5+6+7 = 16$ ✓

ب) $\mathrm{Trace}(B) = 1+1-2 = 0$ ✓

$$c_{n-1} = -w_1$$
$$c_{n-2} = -\frac{1}{2}\left(c_{n-1}w_1 + w_2\right)$$
$$c_{n-3} = -\frac{1}{3}\left(c_{n-2}w_1 + c_{n-1}w_2 + w_3\right)$$
$$\vdots$$

الف)

$$w_n = \mathrm{trace}(A^n) \Rightarrow w_1 = 16 \quad w_2 : A\times A = \begin{bmatrix}5&-2&0\\2&6&2\\0&2&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-2&0\\2&6&2\\0&2&7\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow w_3 : \mathrm{trace}(A^3)$

ب)

$$w_1 = 0 \Rightarrow w_2 : B\times B = \begin{bmatrix}21&&\\&-4&\\&&12\end{bmatrix} \Rightarrow w_2 = 29$$

$$\begin{bmatrix}-27&&\\&-22&\\&&53\end{bmatrix} \Rightarrow w_2 = 10$$

$-4 \quad 4+4+24$

$$\Rightarrow w_3 : B\times B^2 = B^3 = \mathrm{trace}(B^3)$$ ✓

$9+21$

باید جایگذاری کنیم

برگه سوم جبر خطی

نام: پارسا یوسفی نژاد محمدی	امتحان درس
نام خانوادگی: 94015367048	نمره به عدد
شماره دانشجوئی	نمره به حروف
نیمسال ..... سال تحصیلی	محل امضاء استاد
تاریخ برگزاری امتحان	

دانشگاه تبریز

دانشکده

توضیح سوال 7 : برای حل این سوال باید بهترین x ها را بدست بیاوریم که خطای e ها را مینیمم کند، $\|e\| = \|Ax-b\|$ که برای اینکار می توانیم $\hat{x}$ را از $A^TA\hat{x}=A^Tb$ محاسبه کنیم تا بهترین x ها را بگیریم که یک روش دیگر محاسبه بهترین بردار ثابت برای مینیمم کردن خطا ($\hat{b}$) است که از رابطه فوق بدست می آید:

$$\boxed{\hat{b} = proj_{R(A)} b = \langle w_1, b\rangle w_1 + \langle w_2, b\rangle w_2 + \langle w_3, b\rangle w_3}$$

که برابر است با تصویر متعامد بردار b بر روی فضای گستره ماتریس ضرایب (A) به صورت پایه های یکا متعامد با استفاده از الگوریتم گرام اشمیت که w_3 و w_2 و w_1 است بدست بیاوریم و معادله فوق را حل کنیم که سازگار است:

$$A(\hat{x}) = \hat{b}$$

$\hat{x} = \hat{x}$ = بهترین تقریب برای کمترین خطا

توضیح سوال 8 : در این سوال باید اثر ماتریس های A و A^2 و A^3 را بدست بیاوریم و به w_1 و w_2 و w_3 برسیم و سپس با استفاده از الگوریتمی که در ورقه قبلی نوشته شده است ضرایب معادله مشخصه ماتریس را بدست بیاوریم و سپس با حل کردن معادله درجه سوم حاصل شده، مقادیر ویژه λ_3 و λ_2 و λ_1 را بدست بیاوریم و هر برای محاسبه بردارهای ویژه v_3, v_2, v_1 از رابطه $(\lambda I - A)v_i = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ استفاده کنیم و v_i ها را بدست بیاوریم، برای ماتریس B هم باید این کار را انجام بدهیم ولی محاسباتش خیلی سخت بود، توضیح دادم که بگویم روش کار را کامل بلد هستم.

پارسا یوسفی نژاد.