تمرین اول: نشان دهید $S_1 = S_2$ اگر و تنها اگر: $(S_1 \cap \bar{S}_2) \cup (\bar{S}_1 \cap S_2) = \emptyset$

$S_1 - S_2$, $S_2 - S_1$

$A \Longleftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

$S_1 = S_2 \Longleftrightarrow (S_1 \cap \bar{S}_2) \cup (\bar{S}_1 \cap S_2) = \emptyset$

$\longrightarrow$ رفت $=$ ①

روش اول: اثبات مستقیم؛ بخش اول (①)

می‌دانیم: $S_1 \cap \bar{S}_2 = S_1 - (S_1 \cap S_2)$

می‌دانیم چون $S_1 = S_2$: $\underline{S_1 \cap S_2 = S_1 = S_2}$

$\Longrightarrow S_1 \cap \bar{S}_2 = S_1 - S_2(S_1) = \emptyset$

$S_2 \cap \bar{S}_1 = S_2 - S_1 = \emptyset$

$\Longrightarrow (S_1 \cap \bar{S}_2) \cup \overbrace{(\bar{S}_1 \cap S_2)}^{S_2 \cap \bar{S}_1 = S_2 - S_1 = \emptyset} = (\underbrace{S_1 - S_2}_{\emptyset}) \cup (\underbrace{S_2 - S_1}_{\emptyset}) = \emptyset$ ✓

$$S_1 = S_2 \xLeftrightarrow{\text{دوشرطی}} (S_1 \cap \bar{S}_2) \cup (\bar{S}_1 \cap S_2) = \emptyset$$

برگشت ② $\leftarrow$ $(B \to A)$

اثبات بخش دوم (②) : اجتماع دو عبارت برابر $\emptyset$ بوده ، پس هر دو عبارت باید برابر $\emptyset$ بوده تا اجتماعشان $\emptyset$ شود:

$$(S_1 \cap \bar{S}_2) \cup (\bar{S}_1 \cap S_2) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$$\hookrightarrow S_1 - \overbrace{(S_1 \cap S_2)}^{S_1 \cap S_2 \subseteq S_1} = \emptyset \Rightarrow S_1 \subseteq S_1 \cap S_2$$

$$\hookrightarrow S_2 - \overbrace{(S_2 \cap S_1)}^{S_1 \cap S_2 \subseteq S_2} = \emptyset \Rightarrow S_2 \subseteq S_1 \cap S_2$$

$$\xrightarrow{\cup} S_1 \cup S_2 \subseteq S_1 \cap S_2$$

$\subset$ زیرمجموعه محض یا $\boxed{=}$

$$S_1 \cap S_2 \subseteq S_1 \cup S_2$$

از گذشته می‌دانیم اگر اشتراک دو مجموعه (=) با اجتماع دو مجموعه برابر باشد، می‌توان نتیجه گرفت

$$S_1 = S_2$$

$A \Leftrightarrow B \equiv (\sim A \to \sim B) \wedge \underbrace{(\sim B \to \sim A)}_{A \to B}$ بخش اول

$A \downarrow S_1 = S_2$, $B \downarrow \square \cup \square = \emptyset$

روش دوم: اثبات برهان خلف؛ فرض می‌کنیم که $S_1 = S_2$ نباشند، پس $S_1 \neq S_2$:

در نتیجه تفاضل S_1 و S_2 از یکدیگر برابر با مجموعه A یا B (غیرتهی) می‌باشند:

$$\hookrightarrow (\overset{A}{S_1 - S_2}) \cup (\overset{B}{S_2 - S_1}) = A \cup B = \emptyset$$

=> پس حتما باید هر دو مجموعه A و B برابر $\emptyset$ باشند تا حاصل عبارت $\emptyset$ باشد:

$$\hookrightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset \Rightarrow S_1 - S_2 = A = \emptyset \Rightarrow S_1 = S_2$$

تناقض با فرض مسئله پس فرض اولیه ($S_1 = S_2$) درست می‌باشد.

$(\sim A \to \sim B)$ ✓

$\hookrightarrow (B \to A)$ ✓ بخش دوم

بخش دوم:

اثبات برهان خلف فرض می‌کنیم که $(S_1 \cap \bar{S}_2) \cup (\bar{S}_1 \cap S_2) \neq \emptyset$

(طبق دمورگان)

از طرفی $S_1 = S_2$ پس حتماً $S_1 \cap \bar{S}_2$ که $S_1 - S_2$ است برابر $\emptyset$ خواهد شد چون تفاضل دو مجموعه یکسان $\emptyset$ است، به همین صورت هم $\bar{S}_1 \cap S_2$ هم تهی می‌باشد؛

$$(S_1 \cap \bar{S}_2) \cup (S_2 \cap \bar{S}_1) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

تناقض با فرض مسئله، پس در صورت $S_1 = S_2$ حتماً عبارت فوق $\emptyset$ می‌شود.

$\Rightarrow (\sim B \to \sim A)$ ✓

$(A \to B)$ ✓ رفت

A: $S_1 = S_2$ ، B: $\square \cup \square = \emptyset$

$\boxed{\text{اثبات های رفت و برگشت انجام شد.} \quad ✓ \Leftarrow ✓ \Rightarrow ✓}$