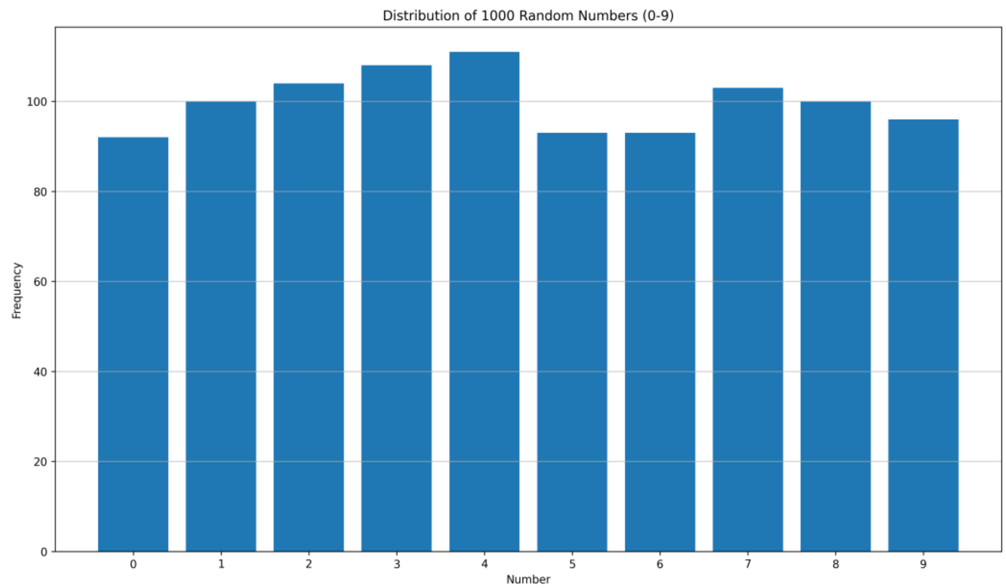
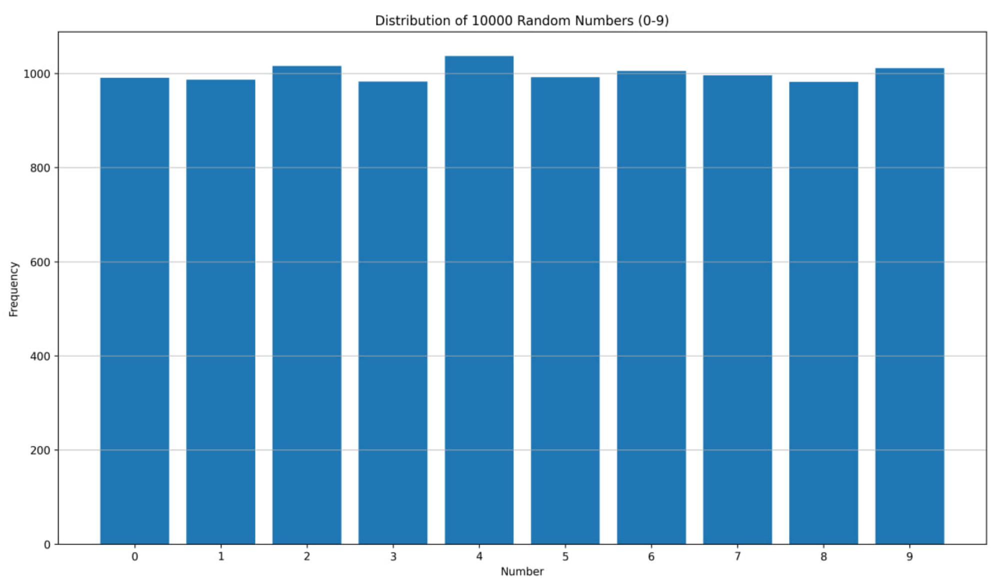
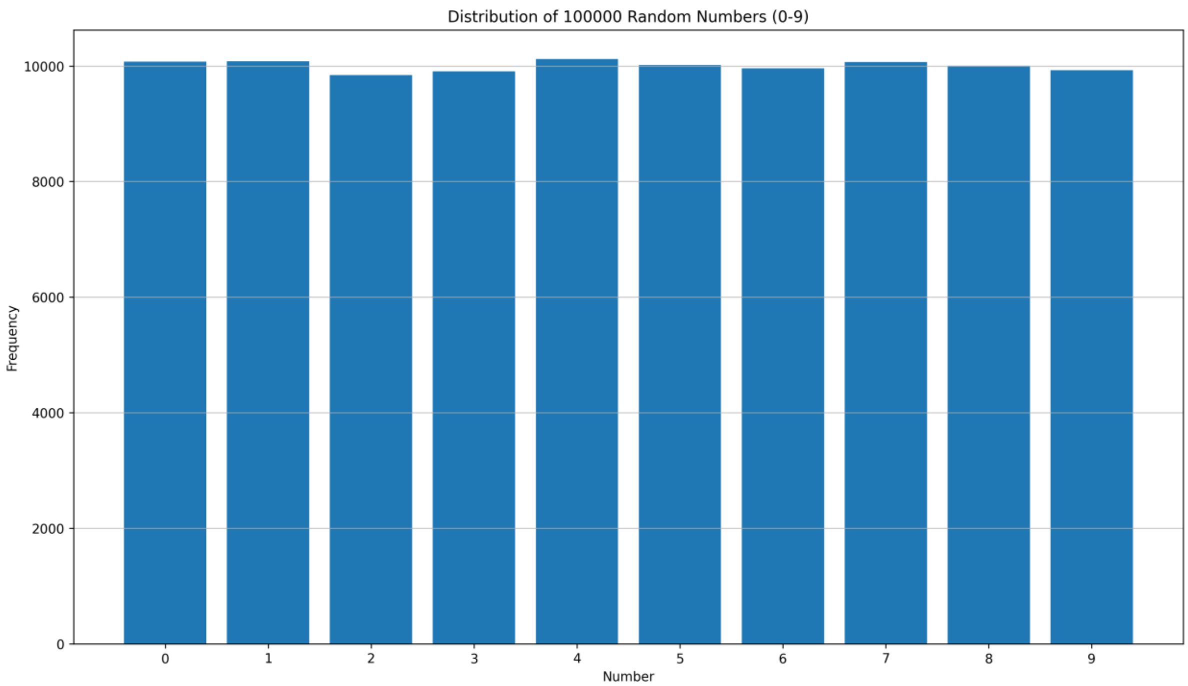
Random Generator

1. **تابع توزیع رندوم جنریتور distribution**

در این سوال با کال کردن تابع رندوم به تعداد زیادی، رشته ای از اعداد تصادفی تولید کرده و نمودار فراوانی آن را رسم می کنیم. انتظار می رود این توزیع یکنواخت باشد و با افزایش تعداد اعداد، افت و خیز ها کاهش یابد.

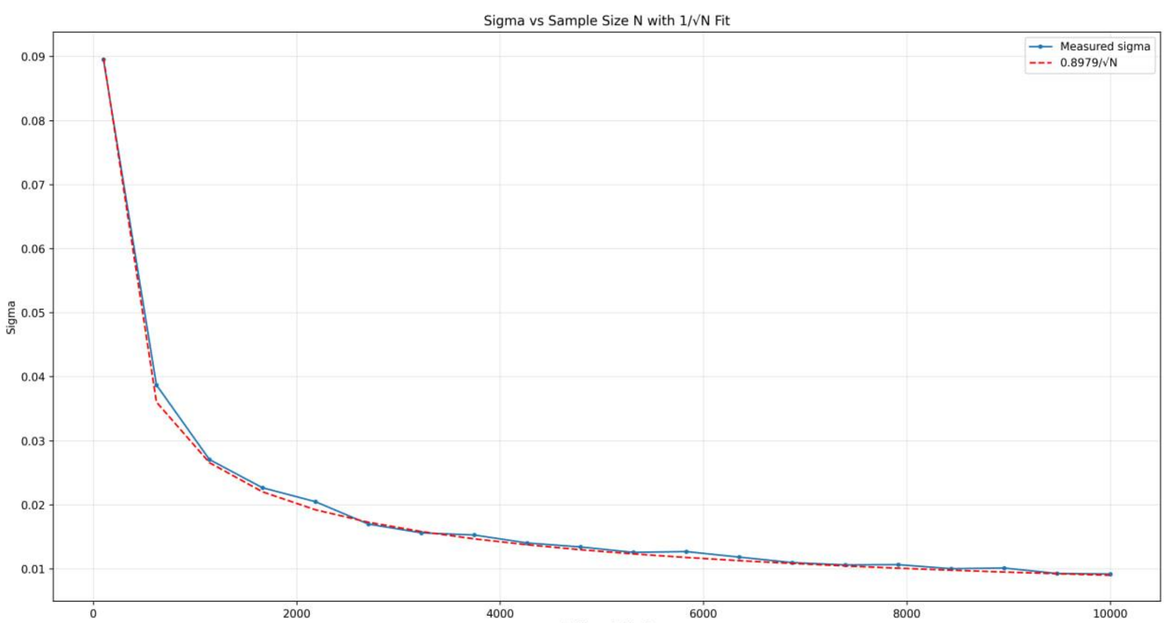






تابع توزیع طبق انتظار رفتار همگن دارد و سالم است یعنی هر عدد 1/N بار تکرار شده است. همچنین افت و خیز با تعداد تکرار، کمتر می شود.

برای تحقیق بیشتر افت و خیز نمودار **واریانس نسبی** برحسب تعداد اعداد را رسم می کنیم. تعداد آنسامبل ها در این نمودار 1000 است.

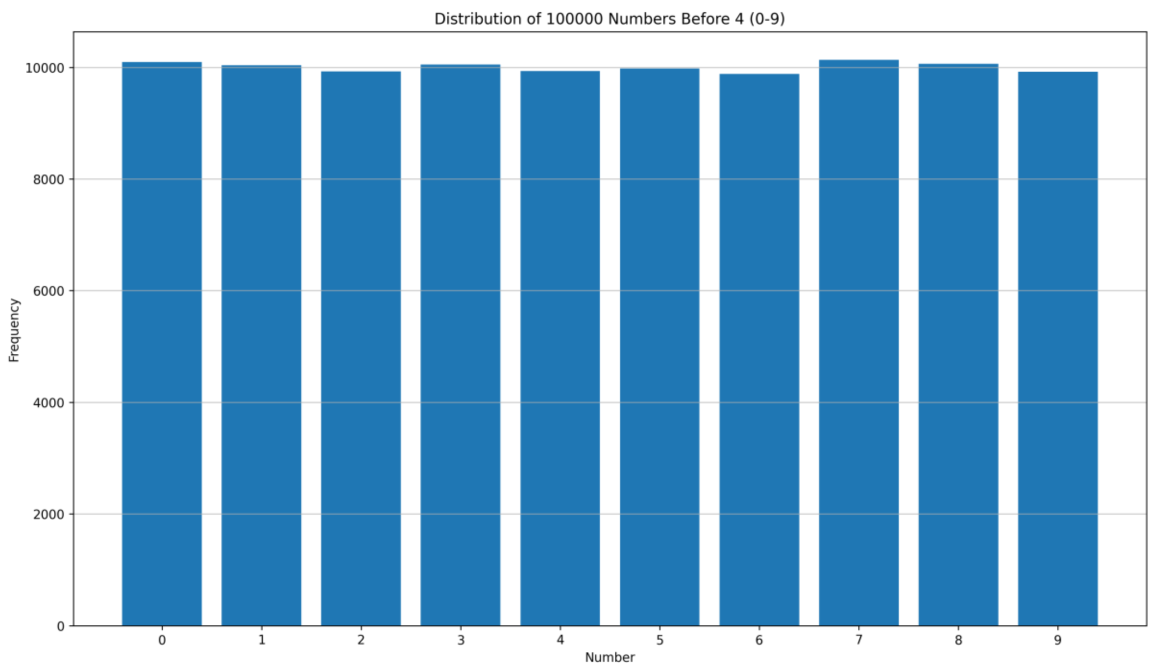


طبق انتظار واریانس نسبی با توان 1/2- کم می شود. باید توجه داشت که این نمودار واریانس نسبی است، همینطور که واریانس نسبی با توان 1/2- کم می شود، واریانس با توان 1/2 زیاد می شود.

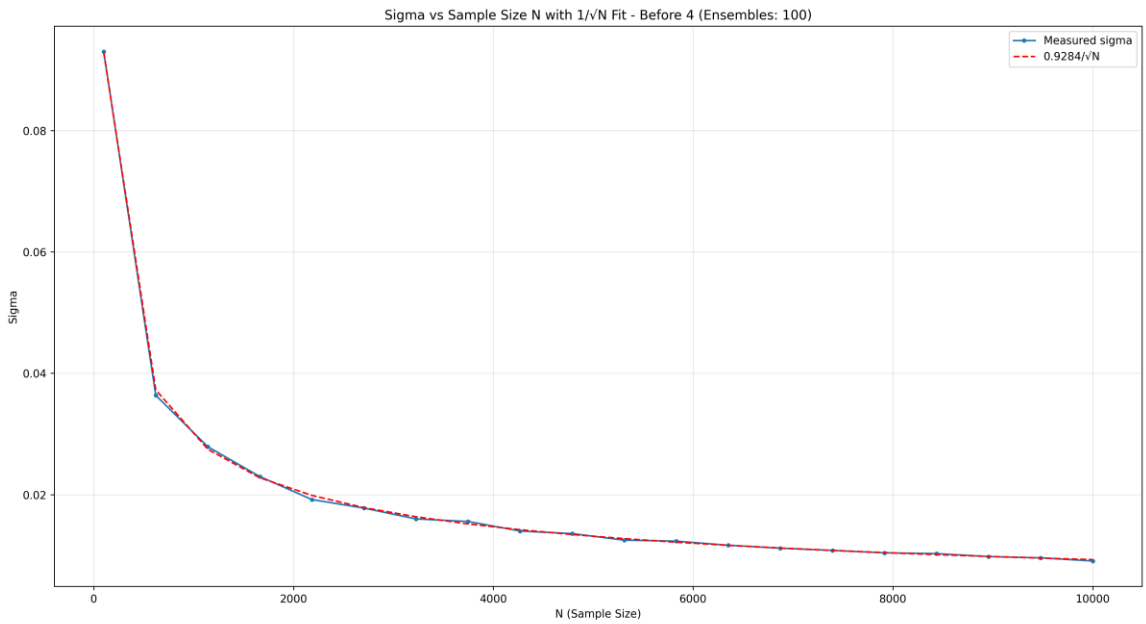
شباهت این سوال با ولنشست نیز همین موضوع است که واریانس که نمایی از ضخامت w در ولنشست است، با افزایش ایتریشن، با توان 1/2 زیاد می شود.

2. همبستگی correlation

الگوریتم: اعداد تولید شده را در لیست cache ذخیره می کنیم تا وقتی که 4 تولید شود. اگر لیست خالی نبود عدد آخر لیستت را به لیست numbers اضافه می کنیم چون عدد قبل 4 است.
اگر لیست cache خالی بود یعنی عدد قبلی نیز 4 بوده است و 4 را به numbers اضافه می کنیم.
سپس cache را پاک می کنیم.
مزیت این الگوریتم نسبت به اینکه خیلی ساده در لیست ساخته شده اعداد قبل 4 را انتخاب کنیم این است که تعداد در الگوریتم ساده تر تعداد اعداد لیست اولیه قابل تنظیم است ولی در الگوریتم به کار برده شده تعداد اعداد نهایی قابل تنظیم است.
نمودارهای تمرین قبل را برای این تمرین نیز رسم می کنیم.



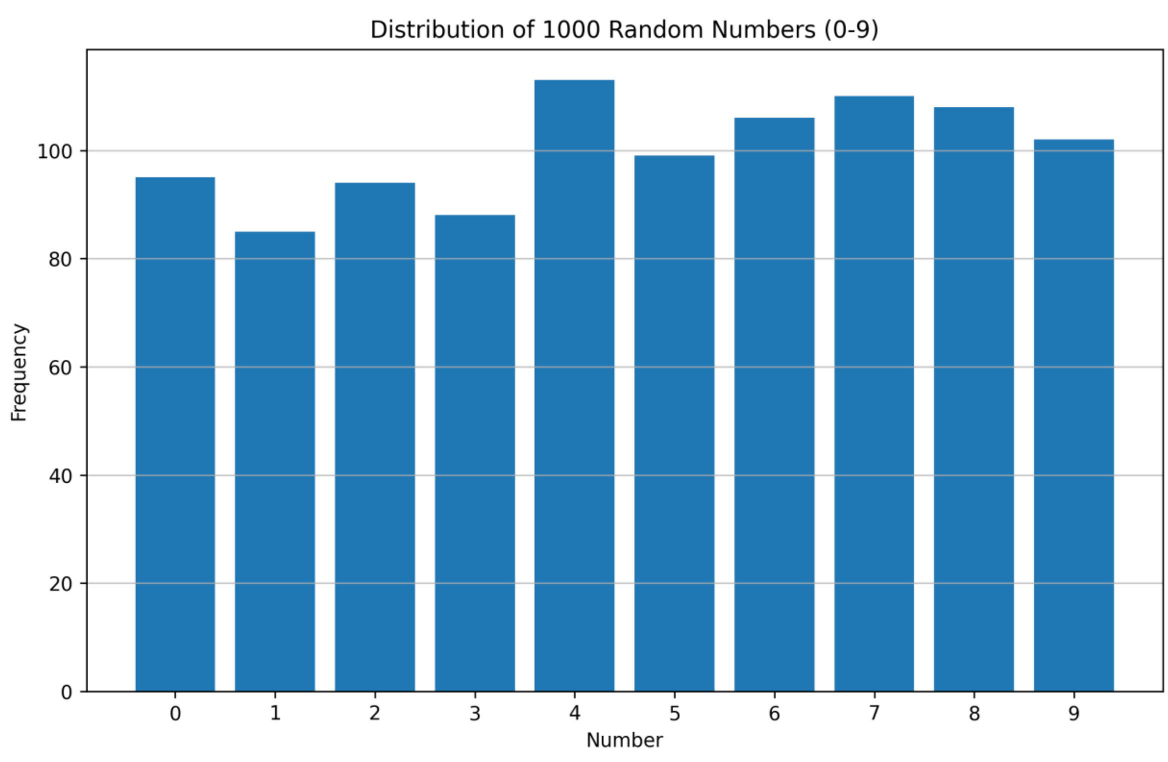
توزیع همچنان یکنواخت باقی می ماند.

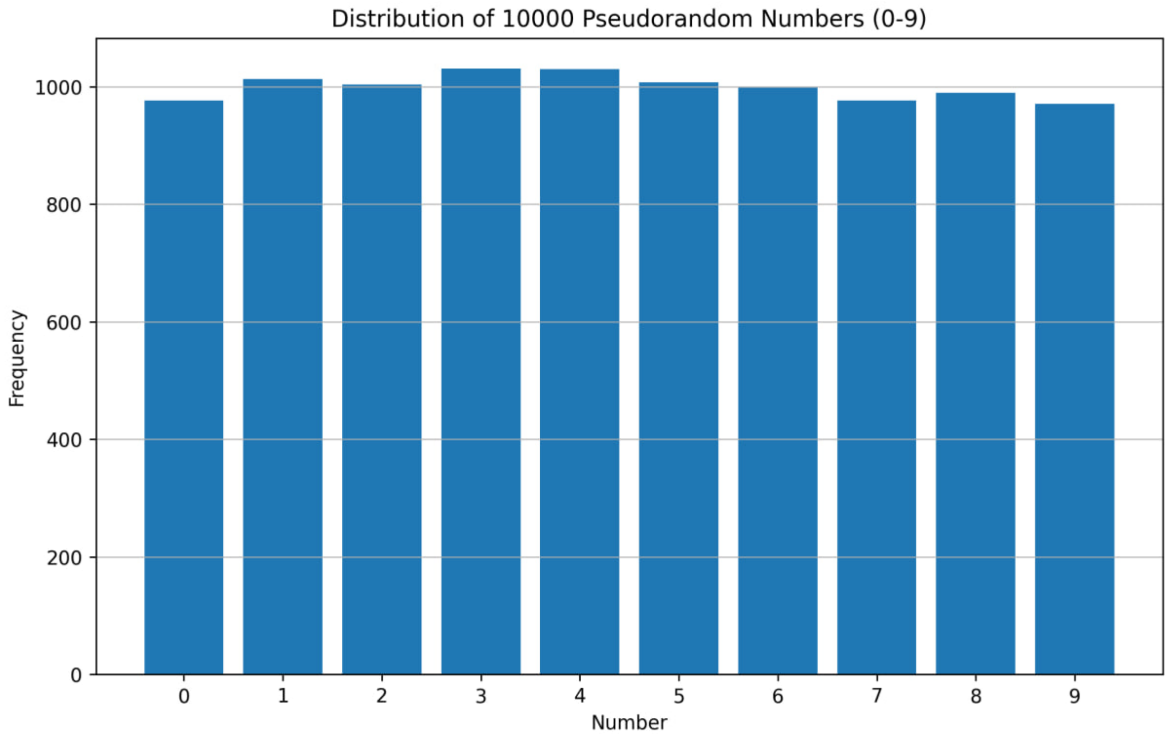


واریانس نسبی نیز تغییری نمی کند.
این دو نتیجه نشان می دهند که تابع رندوم کامپیوتر وابستگی خیلی کمی دارد.

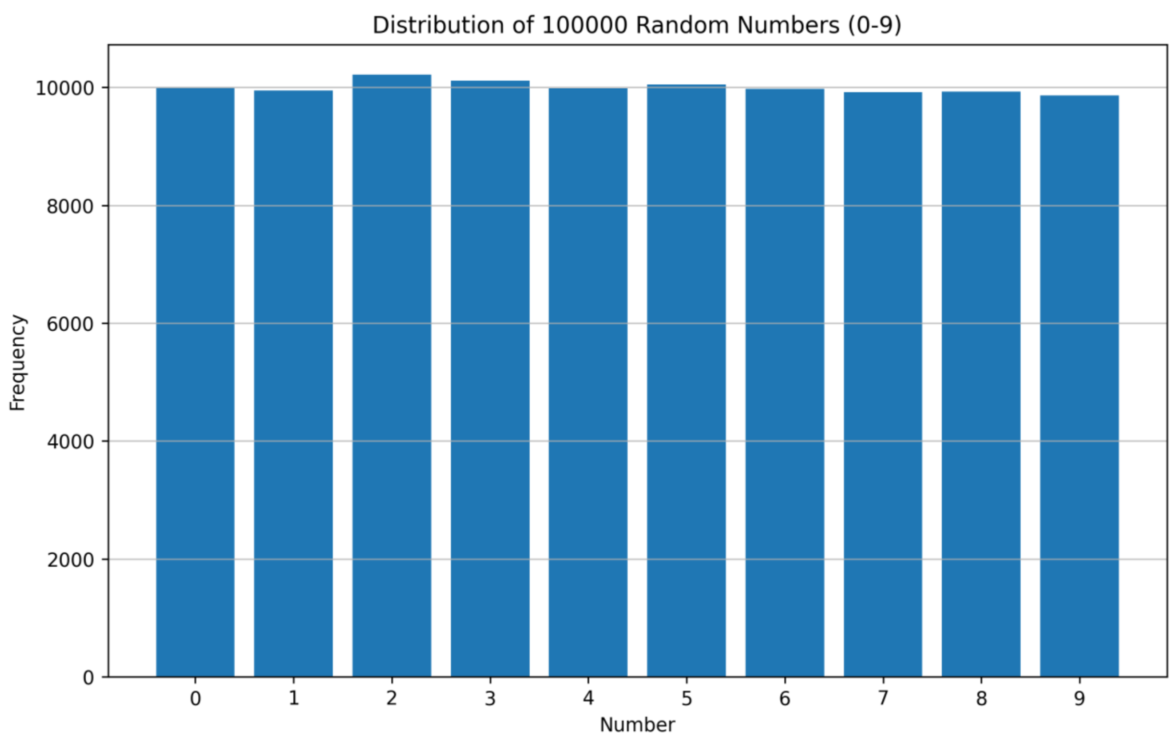
3. تولید اعداد شبه کاتوره ای pseudorandom

تابع rand_LCG را با الگوریتم گفته شده، نوشته و در فایل سوال های قبل برای تحلیل ایمپورت میکنیم.



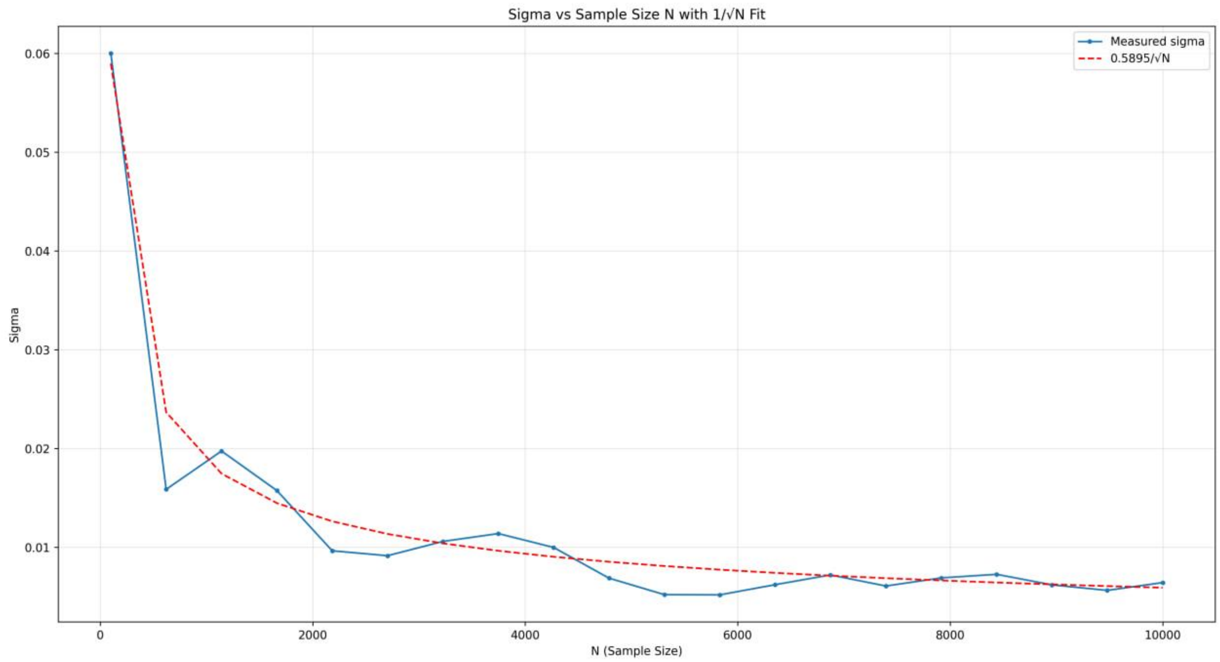


Distribution of 10000 Pseudorandom Numbers (0-9)
Frequency
0
200
400
600
800
1000
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Number



Distribution of 100000 Random Numbers (0-9)
Frequency
0
2000
4000
6000
8000
10000
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Number

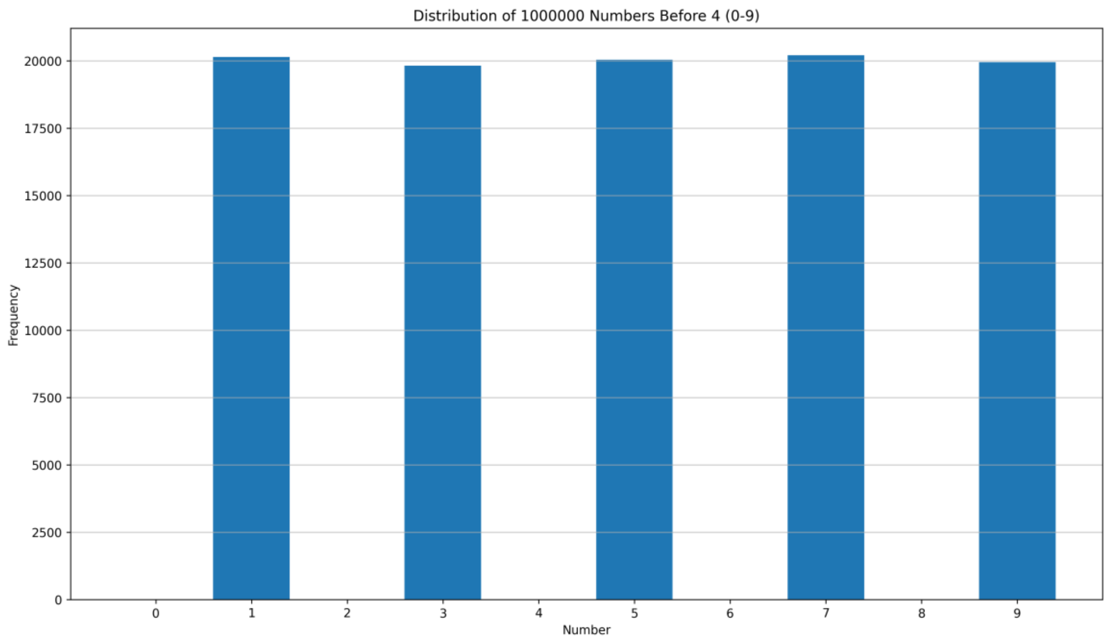
تابع توزیع یکنواخت و سالم است. حال واریانس نسبی را رسم می کنیم.



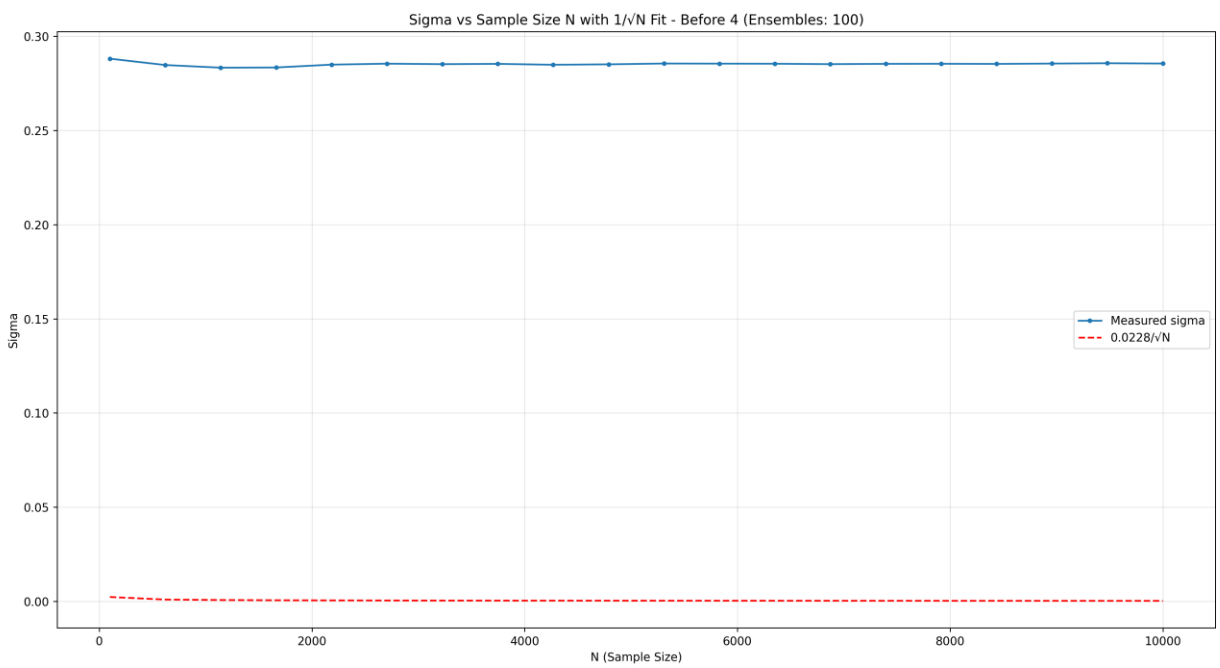
رفتار تناوبی در واریانس نسبی برای seed ثابت به وضوح مشاهده می شود.

برای بررسی وابستگی، از الگوریتمی که برای تابع رندوم کامپیوتر استفاده کردیم، نمی توان استفاده کرد به این دلیل که تابع شبه رندوم جنریتوری که ساختیم را نمی توان چند بار کال کرد چون با یک seed ثابت کار می کند. مگر اینگه در هر بار کال کردن دستی یک seed بدهیم که با زمان زیاد می شود که از رندومنس برنامه کم می کند و معقول نیست.

به همین دلیل برای این بخش از الگوریتم ساده تر ساخت یک لیست اولیه از اعداد و انتخاب اعداد قبل 4 استفاده کردیم.



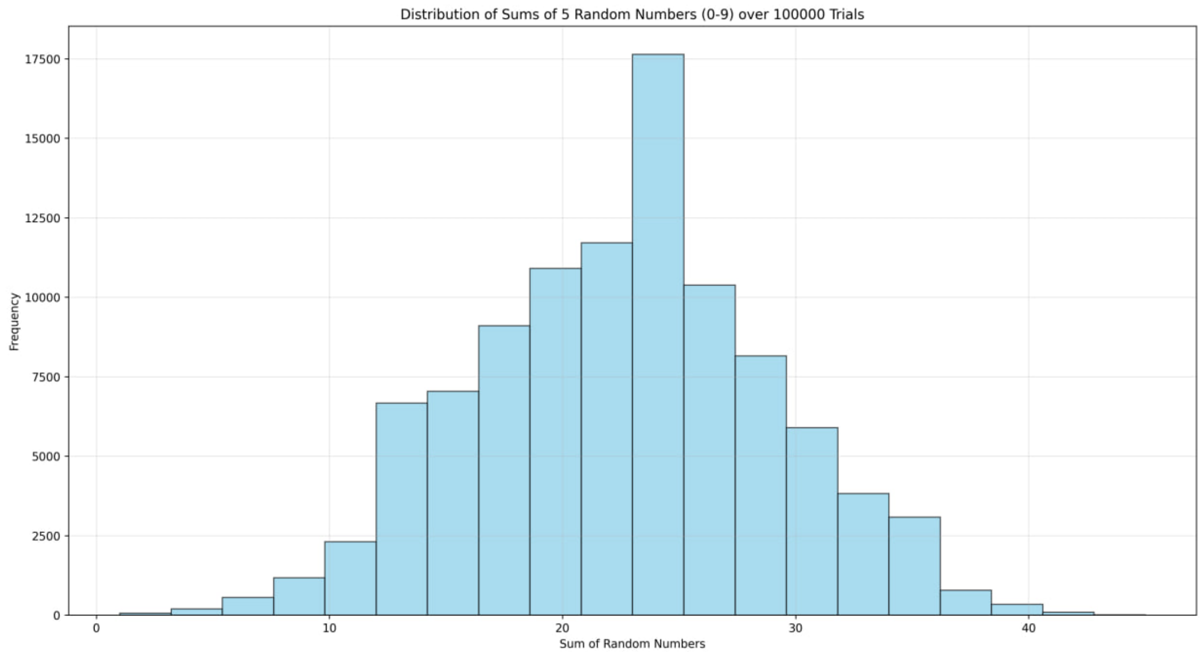
به طرز عجیبی وابستگی مشاهده می شود. قبل از 4 هیچ عدد زوجی نمی آید.

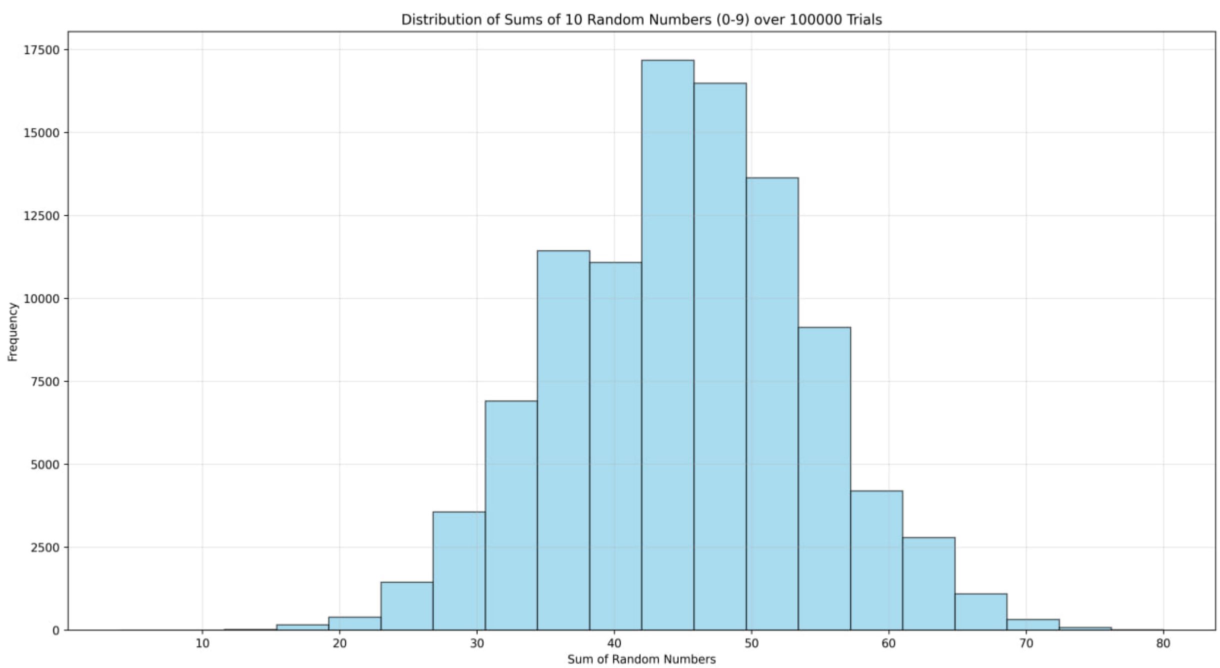


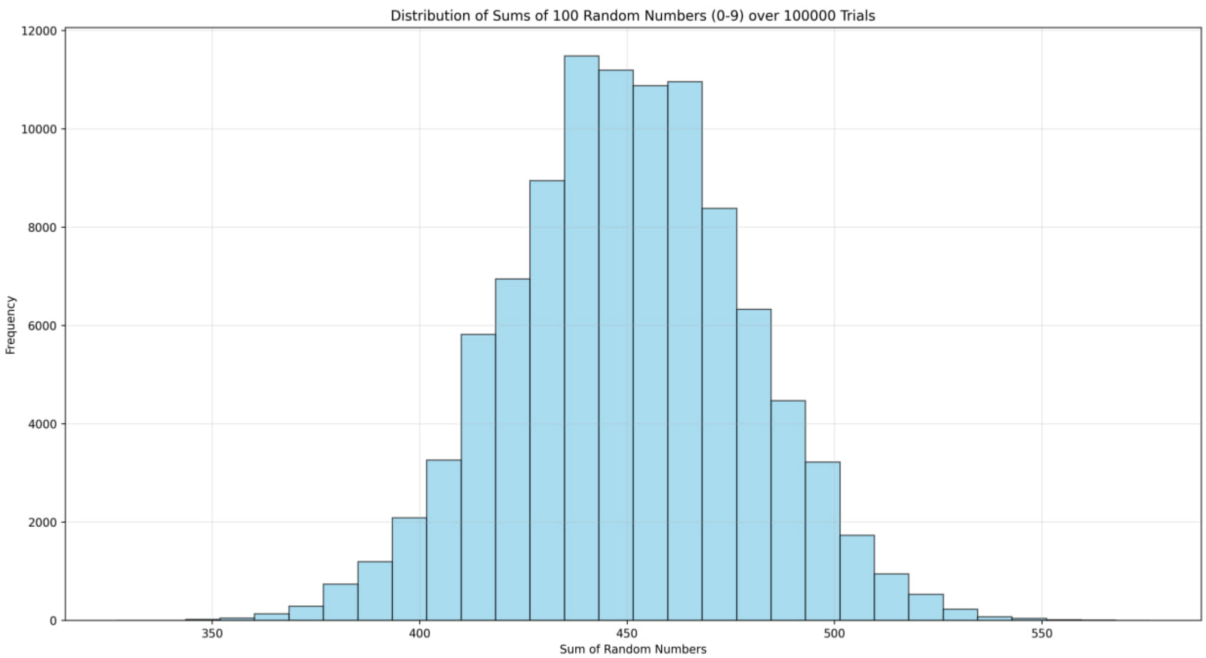
یکی دیگر از نتایج شوکه کننده، ثابت بودن واریاس برای اعداد قبل 4 است.

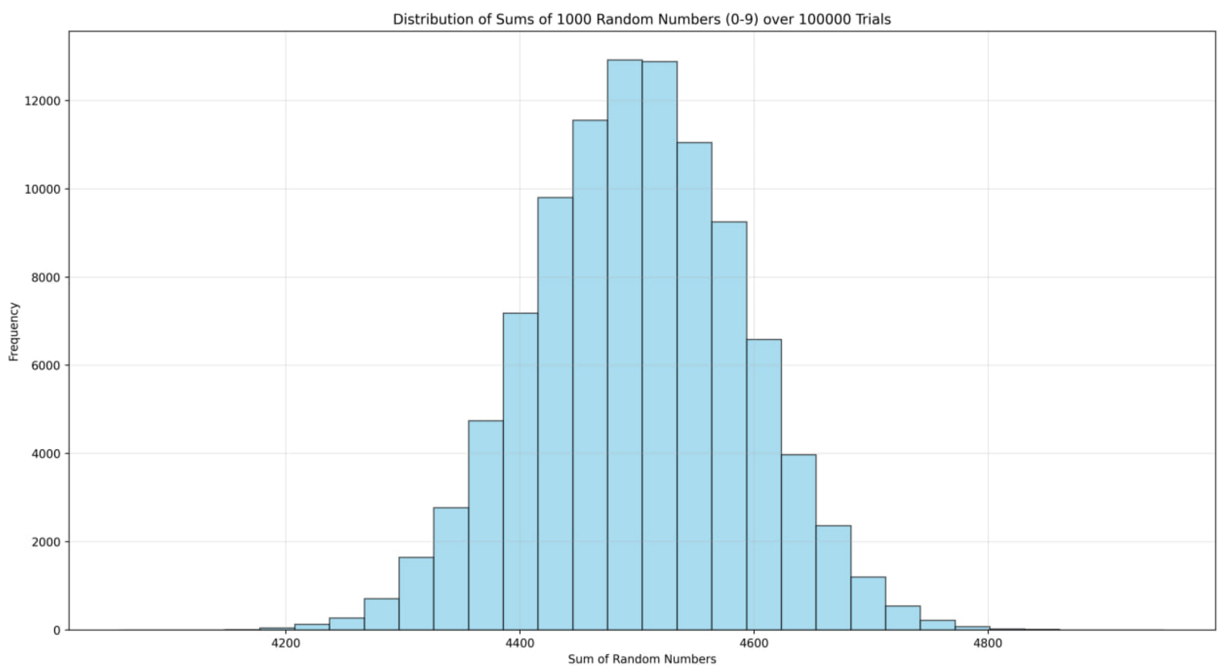
4. قضیه حد مرکزی CLT

برای این سوال اعداد اعداد N_nums را که توسط رندوم جنریتور کامپیوتر تولید شده اند را جمع می زنیم و این کار را به تعداد N_trials بار انجام می دهیم. انتظار می رود طبق قضیه حد مرکزی، توزیع گاوسی ایجاد شود.



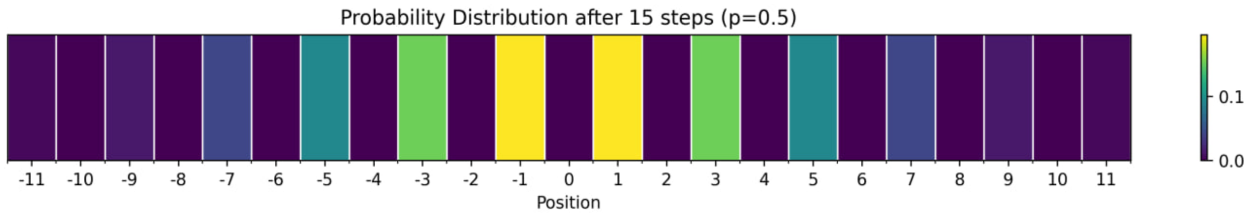




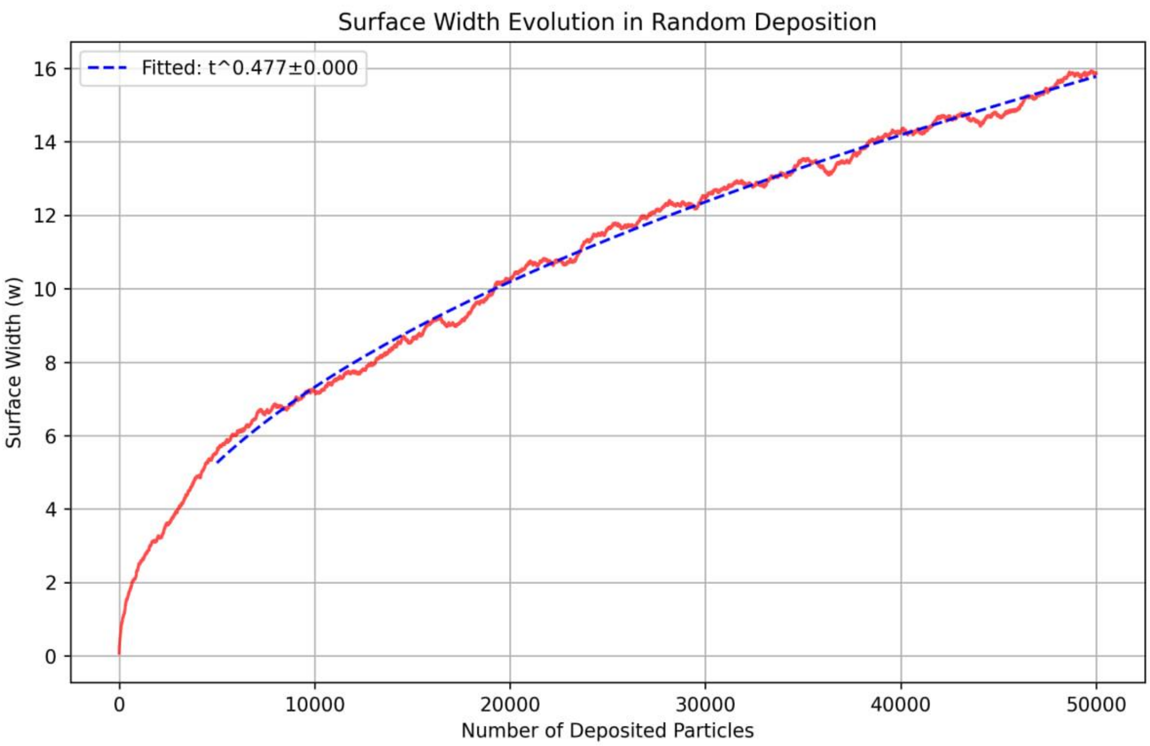


با افزایش N_trails این توزیع به توزیع گاوسی نزدیک تر می شود.

شباهت با تمرین ول نشست و ولگشت: در ول نشست ارتفاع ستون ها جمع یک سری انتخاب رندوم است. بنابراین انتظار می رود تابع توزیع ارتفاع ستون ها گاوسی باشد.
در ول گشت یک بعدی نیز تعداد بازدید از هر خانه نتیجه انتخاب رندوم است و انتظار می رود تابع توزیع احتمال حضور در هر خانه گاوسی باشد.

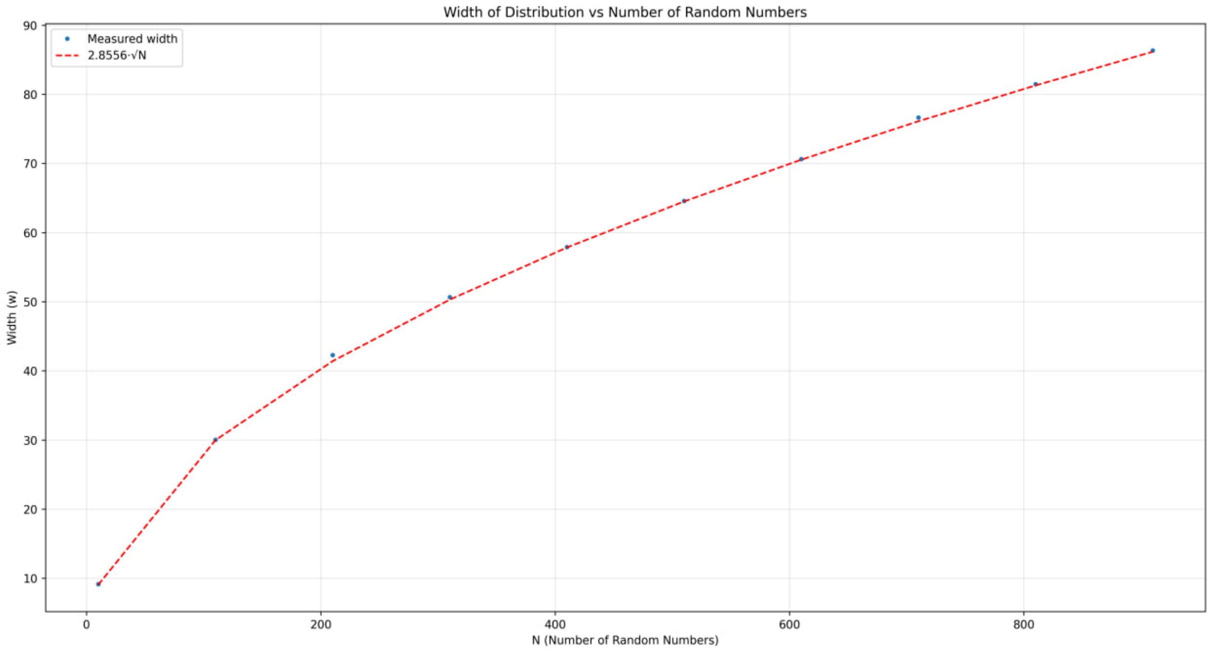


همانطور که در روش شماری محاسبه کردیم، این توزیع طبق انتظار گاوسی است.
برای بررسی بیشتر شباهت این سوال با ول نشست و توضیح دلیل $\beta = \frac{1}{2}$ ، فرض می کنیم توزیع گاوسی که بدست آوردیم تابع توزیع ارتفاع ها در مسئله ول نشست است. برای ضخامت در ول نشست داشتیم:



$$w(t) = \sqrt{\overline{h^2}(t) - \bar{h}^2(t)}$$

که h همان محور x یا به عبارتی جمع اعداد در این سوال می شود. حال کافی است برای اعدادی که داریم میانگین و میانگین مجذوری را محاسبه کنیم و در این فرمول قرار دهیم. عدد بدست آمده نمایی از ضخامت در ول نشست است.
حال برای رسم نمودار ضخامت برحسب تعداد ذرات باید N_trails را تغییر دهیم یا N_nums؟ برای جواب این سوال باید دقت کرد که N_nums است که نمایی از تعداد ذرات است که در بالا هم باعث گاوسی تر شدن تابع توزیع شده بود و N_trials به عبارتی شبیه آنسامبل است و می تواند ثابت باشد.



طبق انتظار منحنی $\sqrt{N}$ به زیبایی به نقاط فیت می شود.

$$w \; \alpha \; N^{\beta} \qquad , \qquad \beta = \frac{1}{2}$$

5. تغییر تابع توزیع به گاوسی gaussian

ابتدا طبق راه حل کتاب ρ, θ را برحسب دو عدد رندوم x_1, x_2 بدست می آوریم.

$$x_1 = \int_0^{\rho} \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho}{2\sigma^2}\right) d\rho$$

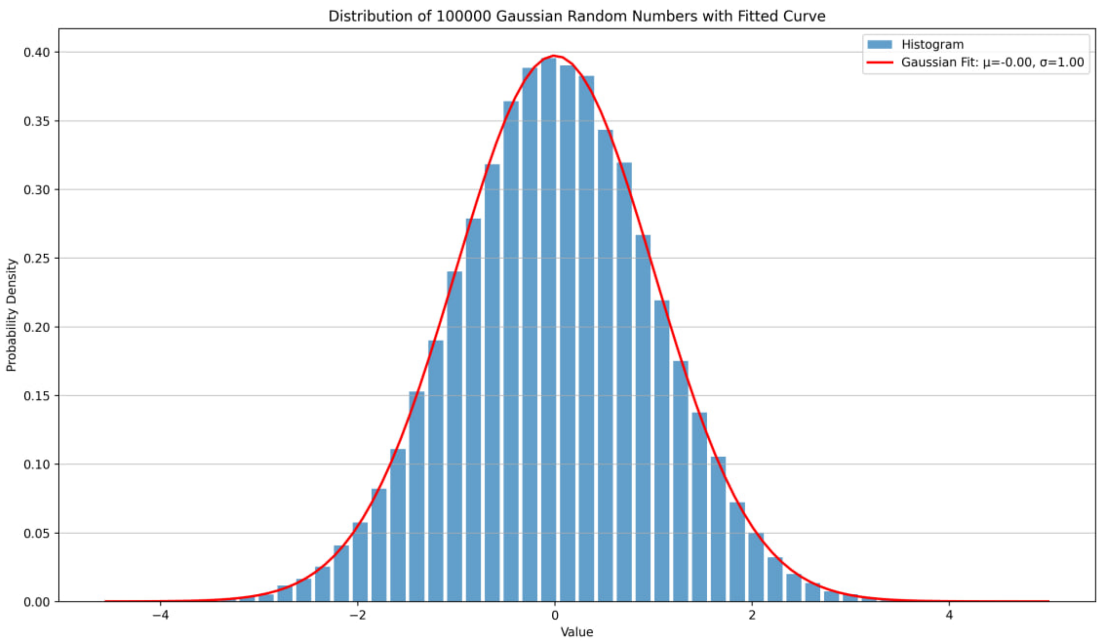
$$= 1 - e^{-\rho^2/2\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-x_1)} \quad , \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 1}$$

$$\boxed{\theta = 2\pi x_2 \quad , \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 1}$$

$$\boxed{y_1 = \rho \cos\theta \quad , \quad y_2 = \rho \sin\theta}$$

باید توجه داشت که x_1 بین صفر و یک است و $\log(0)$ باید هندل شود.



تابع گاوسی به صورت خیلی دقیق فیت می شود. در تابع *gaussian_rnd* تعریف شده، مقدار سیگما قابل تنظیم است که برابر با 1 قرار داده شده. می بینیم که در تابع فیت شده نیز سیگما برابر 1 بدست آمده است.