Differential Equations

1- مرتبه الگوریتم نقطه میانی

Subject :
Year : Month : Date :

الگوریتم نقطه میانی : $\int_a^b f_{(x)}\,dx \simeq (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ـ1

$$\begin{cases} L = b-a \\ m = \frac{a+b}{2} \end{cases} \Longrightarrow \int_a^b f_{(x)}\,dx = L f_{(m)}$$

$$f_{(x)} = f_{(m)} + f'_{(m)}(x-m) + \frac{f''_{(m)}}{2!}(x-m)^2 + \frac{f'''_{(m)}}{3!}(x-m)^3 + \cdots$$

برای هر قدم

$$\Rightarrow \int_a^{a+h} f_{(x)}\,dx = \underbrace{f_{(m)}\int_a^b dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{f'_{(m)}\int_a^b (x-m)\,dx}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\frac{f''_{(m)}}{2!}\int_a^b (x-m)^2\,dx}_{\mathrm{III}} + \underbrace{\frac{f'''_{(m)}}{3!}\int_a^b (x-m)^3\,dx + \cdots}_{\mathrm{IV}}$$

طول هر قدم

$$\mathrm{I} = f_{(m)}\,h \quad , \quad m = \frac{a+(a+h)}{2} = a + \frac{h}{2}$$

$$\mathrm{II} = f'_{(m)}\left[\frac{(x-m)^2}{2}\right]_a^{a+h} = \frac{f'_{(m)}}{2}\left((h/2)^2 - (-h/2)^2\right) = 0$$

$$\mathrm{III} = \frac{f''_{(m)}}{2}\left[\frac{(x-m)^3}{3}\right]_a^{a+h} = \frac{f''_{(m)}}{6}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right)$$

$\text{III} = \dfrac{f''(m)}{24} h^3$

$\text{IV} \sim h^4$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x)}_{\text{مقدار واقعی}} = \underbrace{f(m)\,h}_{\text{مقدار الگوریتم مقدار [illegible]}} + 0 + \underbrace{\frac{f''(m)}{24} h^3 + O(h^4)}_{\text{خطا}}$$

خطای لوکال:

$$\Rightarrow \boxed{E_{local} \sim h^3}$$

$$n_{steps} = \frac{L}{h}$$

$$\Rightarrow E_{global} = E_{local} \cdot n_{steps}$$

خطای گلوبال

$$\Rightarrow \boxed{E_{global} \sim h^2}$$

$$\boxed{E \sim 2\,(3)}$$

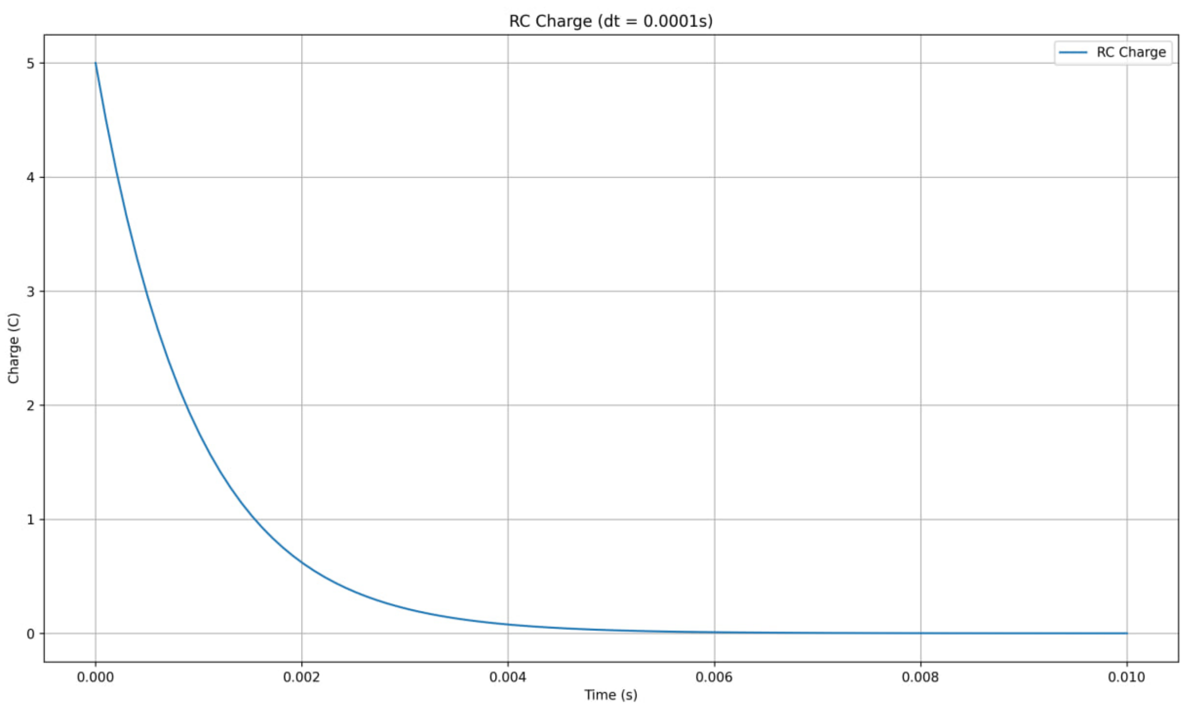
2- تخلیه بار خازن در مدار RC.py :RC

معادله دیفرانسیل مدار RC به صورت زیر است.

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t) \quad , \quad \tau = RC$$

برای حل این معادله دیفرانسیل به روش اویلر باید معادله بازگشتی زیر را در یک لوپ اجرا کنیم.

$$Q_{n+1} = Q_n - h \cdot \frac{1}{RC} \cdot V_n$$



رفتار نمایی که از حل تحلیلی انتظار می رود، کاملا مشهود است.