ریاضیات گسسته

(ساختمان گسسته)

۲ فصل دو (مجموعه ها)

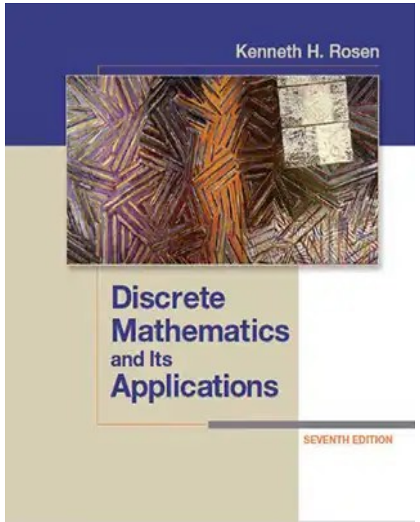
YouTube channel

Tolpam Academy

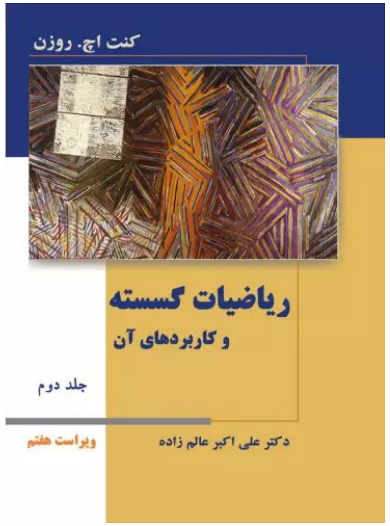
- تهیه و تدوین: پارسا زمانی

۱۴۰۲ زمستان

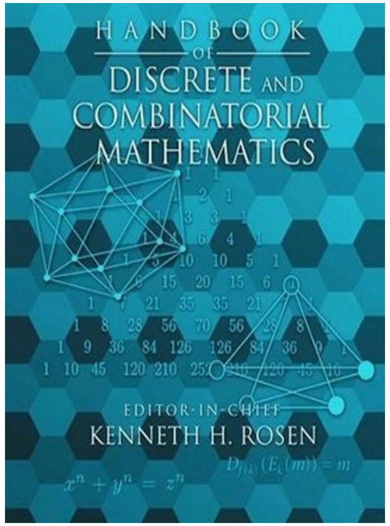
❖ منابع علمی:



Kenneth H. Rosen
Discrete Mathematics and Its Applications
SEVENTH EDITION



کنت اچ. روزن
ریاضیات گسسته
و کاربردهای آن
جلد دوم
ویراست هفتم
دکتر علی اکبر عالم زاده



HANDBOOK OF DISCRETE AND COMBINATORIAL MATHEMATICS
EDITOR-IN-CHIEF
KENNETH H. ROSEN

Tolpam Academy

راهنمای استفاده از اسلایدها

- در صورت مشاهده‌ی هرگونه **اشکال علمی، نگارشی یا فنی** در اسلایدها، لطفاً از طریق ایمیل زیر اطلاع دهید:

tolpamacademy@gmail.com

- همچنین برای دسترسی به **آموزش ویدیویی هر بخش از درس**، می‌توانید:

QR Code موجود در اسلاید اول هر بخش مثل QR Code رو به رو را اسکن کنید.

یا روی متن لینک‌شده در پایین اسلاید اول هر بخش از درس کلیک نمایید.

تا به آموزش مربوط به همان مبحث دسترسی پیدا کنید.

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت اول**

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

Tolpam Academy

❖ **تعریف مجموعه**: مجموعه (Set) یا دسته ای از اعداد ، اشیاء و حروف **متمایز** است کـه **ترتیـب** قرارگیـری آنهـا مهـم نیسـت اعضای مجموعه را داخل علامت $\{\}$ قرار میدهیم و معمولاً مجموعه را با حروف بزرگ مثـل « A و B و C و ... » نشان میدهیم.

مثال) هرکدام از مثال های زیر یک مجمموعه هستند.

1. $V = \{a, e, i, o, u\}$
2. $O = \{1,3,5,7,9\}$
3. $S = \{a, 2, \text{تهران}, \text{انسان}\}$
4. $M = \{1,2,3, \dots, 99\}$
5. $O^+ = \{x \in R \mid x = \frac{p}{q} \text{ و } (p,q) > 0\}$

▪ مجموعه ساز

راه دیگری برای تعریف مجموعه با ذکر خاصیت های اعضای مجموعه:

$$O^+ = \{x \in R \mid x = \frac{p}{q} \text{ و } (p,q) > 0\}$$

- نکته: معمولا زمانی که نوشتن همه اعضای یک مجموعه ممکن نباشد از این شیوه استفاده می شود.

- **نکـــــته:** علامت "|" که به شکل ":" نیز مینویسیم یعنی «**به طوری که**».

❖ **اندازه مجموعه:** تعداد اعضای مجموعهٔ A را به صورت $|A|$ مینویسیم.

مثال)

$$V = \{a, e, i, o, u\} \longrightarrow |V| = 5$$

$$M = \{1,2,3, \dots, 99\} \longrightarrow |M| = 99$$

$$O^+ = \{x \in R \mid \frac{p}{q} \text{ و } (p,q) > 0\} \longrightarrow |O^+| = +\infty$$

- **نکـــته:** اعضای تکراری به عنوان یک عضو در نظر گرفته میشوند . یعنی در حقیقت تکرارهای یک عضو از مجموعه حذف میشود. (زیرا در تعریف مجموعه همه اعضا باید متمایز باشند.)

مثال) مجموعه S را درنظر بگیرید اندازه این مجموعه را بدست آورید.

$$S = \{1,1,2,8,1,3\}$$

$$S = \{2,8,1,3\}$$

$$|S| = 4$$

❖ **مجموعهٔ تهی**: یک مجموعهٔ خاص است که **هیچ عضوی** ندارد. و آن را با نماد های $\emptyset$ یا $\{\}$ نشان میدهیم.

- **نکته:** مجموعه های $\{\emptyset\}$ و $\{\{\}\}$ و $\{\emptyset,\{\},\{\emptyset\}\}$ و ... هیچکدام مجموعهٔ تهی نیستند . زیرا تهی خود میتواند یک عضو برای مجموعه باشد.

Tolpam Academy

مثال) اندازهء هر یک از مجموعه های زیر را بیابید.

1) $A = \{\ \}$

2) $B = \emptyset$

3) $C = \left\{\{\ \},\{\emptyset\},\{\{\ \}\},\{\emptyset,\{\ \}\},\emptyset\right\}$

4) $D = \{-1, a, -2, \emptyset, \frac{-8}{4}, A, a\}$

حل)

1. $|A| = 0$
2. $|B| = 0$

مجموعهء تهی هستند.

3. $C = \left\{\cancel{\{\ \}},\cancel{\{\emptyset\}},\cancel{\{\{\ \}\}},\{\emptyset,\{\ \}\},\emptyset\right\} \longrightarrow C = \{\{\emptyset\},\emptyset\} \longrightarrow |C| = 2$

4. $D = \{-1, \cancel{a}, -2, \emptyset, \cancel{\frac{-8}{4}}, A, a\} \longrightarrow D = \{-1, -2, \emptyset, A, a\} \longrightarrow |D| = 5$

❑مجموعه های مهم

1. $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

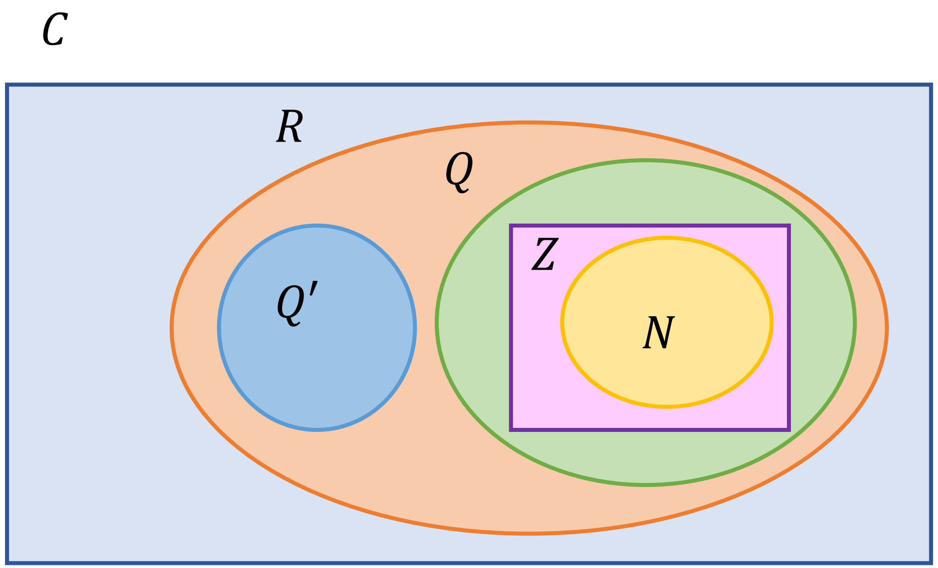
2. $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

3. $Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

4. $Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in Z, q \in Z, q \neq 0 \right\}$

5. R , مجموعه‌ اعداد حقیقی

6. $C = \{x + yi \mid x, y \in R \wedge i^2 = -1\}$



- **توجه:** در برخی منابع ممکن است که $N = \{1,2,3, \dots\}$ و $Z^+ = \{0,1,2,3, \dots\}$ تعریف شوند.

❖ **تساوی مجموعه ها**: دو مجموعه مانند A و B را مساوی اند هرگاه عناصر یکسانی داشته باشند یعنی اگر $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ برقرار باشد آنگاه دو مجموعه مساوی اند و مینویسیم $A = B$.

مثال) هر ۳ مجموعه زیر با هم برابر هستند.

$$A = \{1,3,5\}$$

$$B = \{3,5,1\}$$

$$C = \{3,3,3,3,1,1,1,5\}$$

$$\boxed{A = B = C}$$

- **توجه:** ترتیب و تکرار در مجموعه ها اهمیتی ندارد .

Tolpam Academy

❑ زیر مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند طوری که هر عضو A در B نیز باشد گوییم A زیرمجموعهٔ B است و مینویسیم $A \subseteq B$ و اگر A زیرمجموعهٔ B نباشد مینویسیم $A \nsubseteq B$.

- ملاحظه کنید که اگر که $A \subseteq B$ است اگر و فقط اگر که $\forall x(x \in A \to x \in B)$ راست باشد .

تمرین) ثابت کنید که به ازای هر مجموعهٔ S دلخواه $\emptyset \subseteq S$ و $S \subseteq S$ است.

حل)

$$\emptyset \subseteq S \longrightarrow \forall x(x \in \emptyset \to x \in S)$$

$$\xrightarrow{x \notin \emptyset} \quad x \in \emptyset \to x \in S \equiv F \to T \equiv T$$

- به ازای هر مجموعهٔ S دلخواه $\emptyset \subseteq S$ و $S \subseteq S$ است .

$$S \subseteq S \longrightarrow \forall x(x \in S \to x \in S) \longrightarrow x \in S \to x \in S \equiv \neg(x \in S) \vee (x \in S) \equiv T$$

- **نکته۱:** اگر $A \subseteq B$ و همچنین $B \subseteq A$ باشد آنگاه میتوان گفت که $A = B$ است .

Tolpam Academy

❖ زیرمجموعهٔ محض (سره):

• نکته ۲ : اگر بخواهیم بگوییم که $A \subseteq B$ است اما $A \neq B$ آن را به این شکل $A \subset B$ نمایش میدهیم

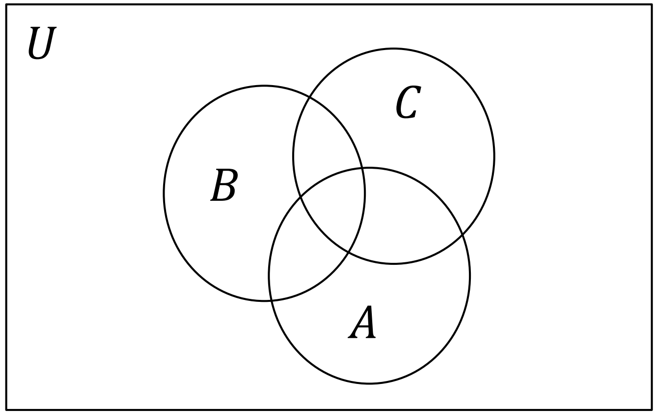
❖ **زیر مجموعهء توانی (محض)** : مجموعهٔ تمـام زیرمجموعـه هـای A را مجموعـهٔ تـوانی A $(powerset)$ گـوییم و بـا $P(A)$ نشان میدهیم $P(A)$ دارای 2^n عضو است.

مثال)

$$A = \{1,2,3\} \longrightarrow P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

❖ **مجموعهء مرجع:** مجموعهٔ مرجع (جهانی) مجموعه ای است که همهٔ مجموعه های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن هستند. مجموعهٔ مرجع را با $\boldsymbol{U}$ یا M یا S نشان میدهیم.

مثال) مجموعه های C, B, A مفروض اند.



$$A, B, C \subseteq U$$

فهرست مطالب

- **قسمت دوم**

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

❑ ضرب دکارتی دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند. حاصل ضرب دکارتی آن ها را که به این صورت $A \times B$ نشان داده می شود، مجموعه ای از تمام زوج مرتب های به شکل (a,b) است که در آن ها $b \in B$ و $a \in A$ است:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

مثال) حاصل ضرب دکارتی $A = \{1,2\}$ و $B = \{a,b,c\}$ چیست؟

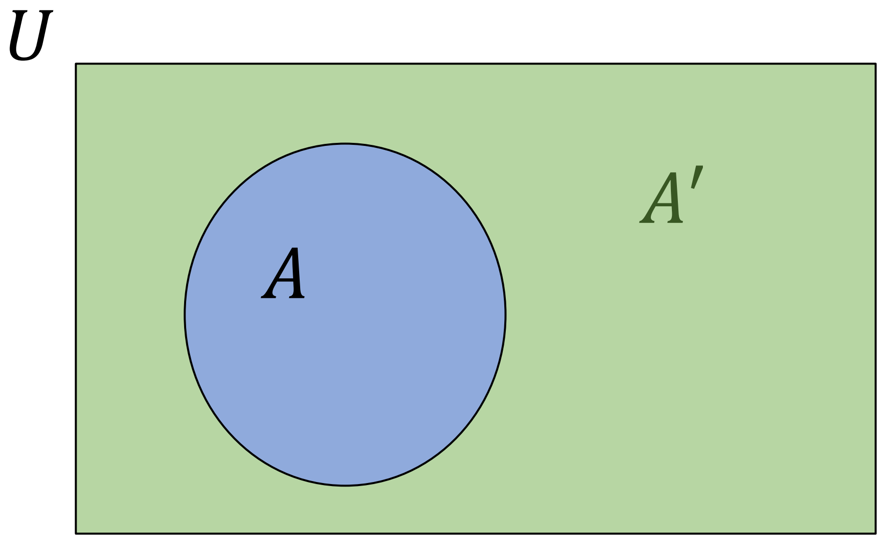
$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

$$B \times A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

- **نکته:** اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه ضرب دکارتی $B \times A$ و $A \times B$ برابر نیستند مگر آنکه هر دو مجموعه $A = B$ باشند.

مجموعهء متمم: اگر A یک مجموعه باشد متمم آن شامل همهء عناصر مجموعهء مرجع بجز خود A می باشد و آن را با « A' یا $\bar{A}$ » نشان میدهیم.

- **نمودار ون متمم:**

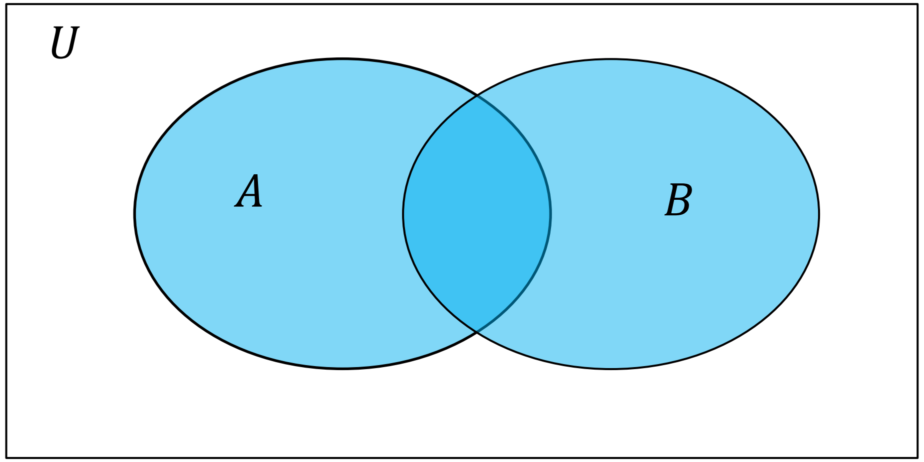


$$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

❖ **اجتماع** $(\boldsymbol{union})$: اجتماع دو مجموعهء B و A را به صورت $A \cup B$ نشان میدهیم و شامل همهء

۱-۱ عناصری است که یا در A باشند یا در B یا در هر دو مجموعه باشند:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

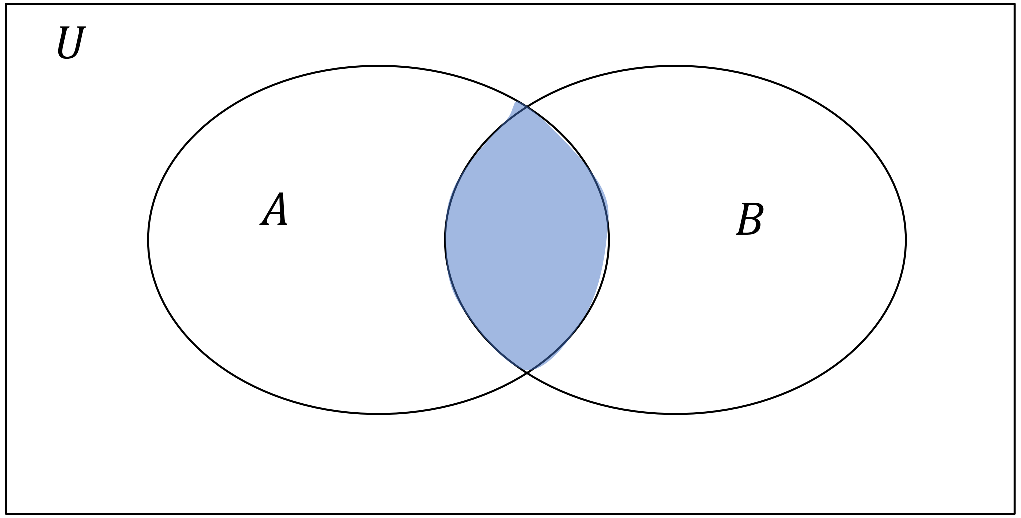


۱-۱

❖ **اشتراک($\boldsymbol{intersection}$)**: اشتراک دو مجموعهء B و A را به صورت $A \cap B$ نشان میدهیم و

شامل همهء عناصری است که در A و B مشترک است : ۱-۲

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

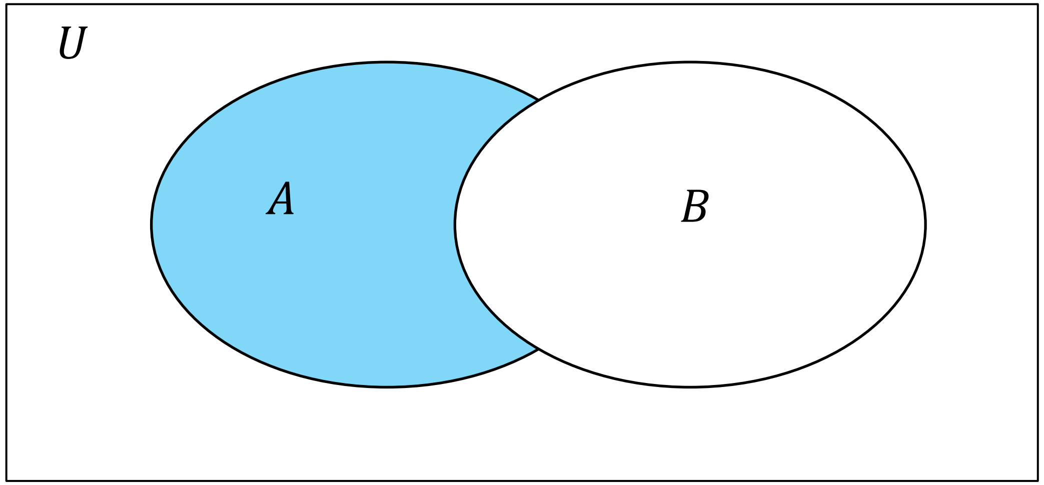


۱-۲

❖ **تفاضل** ($\boldsymbol{difference}$): تفاضل دو مجموعهء B و A را به صورت $A - B$ نشان میدهیم و شامل

۱-۳ همهء عناصری است که در A هست ولی در B نیست :

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \longrightarrow \boxed{A - B = A \cap \bar{B}}$$



۱-۳

Tolpam Academy

تمرین ۱) مجموعهء $A = \{0,1,2,3\}$ و $B = \{4,5,6,7,8,9\}$ دو مجموعهء از هم جدا هستند اشتراک و اجتماع و تفاضل آن ها را بیابید.

حل)

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$A - B = \{0,1,2,3\}$$

$$B - A = \{4,5,6,7,8,9\}$$

- **نکته:** در تفاضل دو مجموعه $A - B$ و $B - A$ با هم برابر نیستند. مگر آنکه $A = B$ باشند.

- **مجموعه جدا از هم:** دو مجموعه را از هم جدا می نامیم اگر اشتراکشان مجموعهء تهی باشد.

تمرین ۲) مجموعه‌ء $A = \{a,1,b,7\}$ و $B = \{aa,ab,a,7,8,9\}$ مفروض اند. اشتراک و اجتماع و تفاضل آن ها را بیابید.

حل)

$$A \cap B = \{a, 7\}$$

$$A \cup B = \{a, 1, b, 7, aa, ab, 8,9\}$$

$$A - B = \{1, b\}$$

$$B - A = \{aa, ab, 8,9\}$$

❑ قوانین مجموعه ها

تمرین ۳) قانون اول دمورگان را اثبات کنید.

$$\overline{A \cap B} = \{x \mid x \notin A \cap B\}$$
$$= \{x \mid \neg(x \in A \cap B)\}$$
$$= \{x \mid \neg(x \in A \ \wedge \ x \in B)\}$$
$$= \{x \mid x \notin A \ \vee \ x \notin B\}$$
$$= \{x \mid x \in \bar{A} \ \vee x \in \bar{B}\ \}$$
$$= \{x \mid x \in \ \bar{A} \cup \bar{B}\ \}$$
$$= \bar{A} \cup \bar{B}$$

قوانین مجموعه ها	
قوانین	**نام**
$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	قوانین همانی
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	قوانین تسلط
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	قوانین خودنمایی
$\overline{(\bar{A})} = A$	نقیض متمم گیری
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	قوانین تعویض پذیری
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	قوانین شرکت پذیری
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	قوانین پخش پذیری
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	قوانین دمورگان
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	قوانین جذب
$A \cup \bar{A} = U$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$	قوانین متمم

تمرین ۴) فرض کنید که C و B و A مجموعه باشند نشان دهید که :

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$$

حل)

۱) دمورگان
$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap (\overline{B \cap C})$$

۲) دمورگان
$$= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$$

۳) شرکت پذیری
$$= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$$

۴) شرکت پذیری
$$= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$$

تمرین ۵) خاصیت (قانون) پخش پذیری را در مجموعه ها اثبات کنید.

قوانین پخش پذیری	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Tolpam Academy

پایان فصل دوم (مجموعه ها)