ریاضیات گسسته

(ساختمان گسسته)

۳

فصل سوم (رابطه ها)

Tolpam Academy

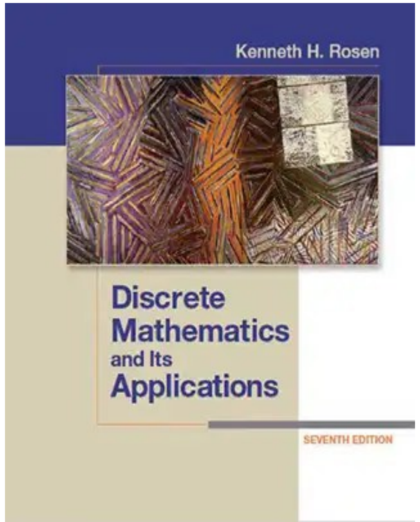
YouTube channel

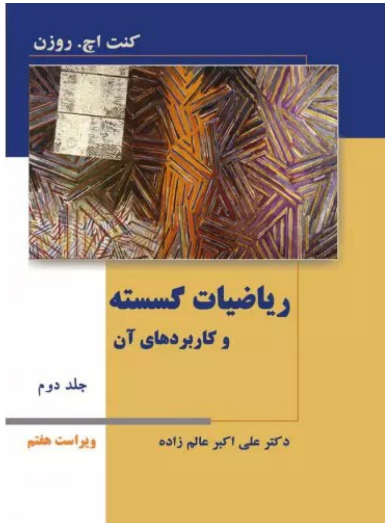
Tolpam Academy

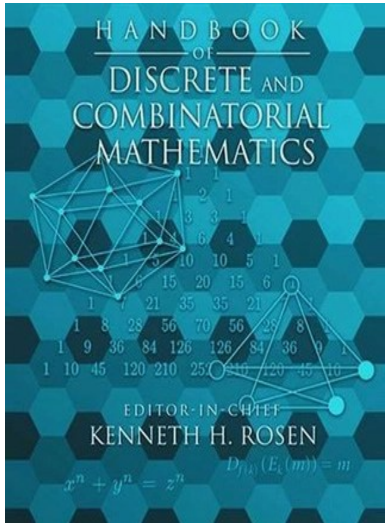
- تهیه و تدوین: پارسا زمانی

بهار ۱۴۰۳

❖ منابع علمی:


Kenneth H. Rosen
Discrete Mathematics and Its Applications
SEVENTH EDITION


کنت اچ. روزن
ریاضیات گسسته
و کاربردهای آن
جلد دوم
ویراست هفتم
دکتر علی اکبر عالم زاده


HANDBOOK OF
DISCRETE AND
COMBINATORIAL
MATHEMATICS
EDITOR-IN-CHIEF
KENNETH H. ROSEN

راهنمای استفاده از اسلایدها

- در صورت مشاهده‌ی هرگونه **اشکال علمی، نگارشی یا فنی** در اسلایدها، لطفاً از طریق ایمیل زیر اطلاع دهید:

tolpamacademy@gmail.com

- همچنین برای دسترسی به **آموزش ویدیویی هر بخش از درس**، می‌توانید:

QR Code موجود در اسلاید اول هر بخش مثل QR Code رو به رو را اسکن کنید.

یا روی متن لینک‌شده در پایین اسلاید اول هر بخش از درس کلیک نمایید.

تا به آموزش مربوط به همان مبحث دسترسی پیدا کنید.

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

فهرست مطالب

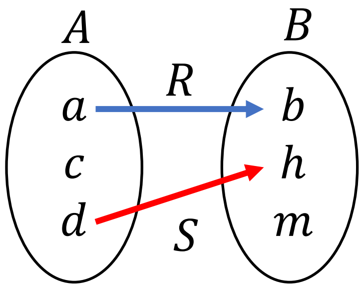
- **قسمت اول**

1. رابطه
2. خواص روابط

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

❑ رابطه ها

به ازای دو مجموعه B و A هر زیر مجموعه ای از $A \times B$ رابطه ای از A به B است .



$R, S \subseteq A \times B$

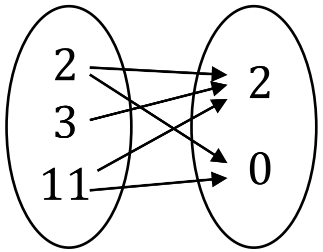
❖ **نماد رابطه** : aRb ← a با b رابطهء R دارد.

❖ **به معنای:**

$(a,b) \in R \iff aRb$

$(a,b) \notin R \iff a\not{R}b$

مثال) با توجه به نمودار ون رابطهء R نشان داده شده را تعریف کنید.



$2R2 , 2R0 , 3R2 , 11R0 , 11R2$

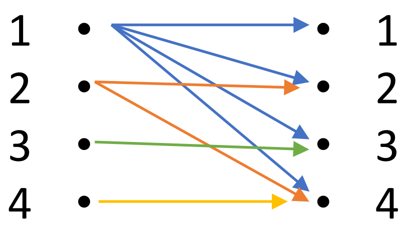
$R = \{(2,2) , (2,0) , (3,2) , (11,0) , (11,2)\}$

❖**رابطه روی یک مجموعه:** یک رابطه از A به A را یک رابطه روی مجموعهء A می نامیم.

Tolpam Academy

مثال) اگر $A = \{1,2,3,4\}$ باشد و رابطه $R = \{(a,b)|\, b/a = k \in z\}$ روی مجموعهء A باشد رابطه شامل چه زوج مرتب هایی میشود؟

$$R = \{(1,1)\ ,(1,2)\ ,(1,3)\ ,(1,4),(2,2)\ ,(2,4),(3,3),(4,4)\}$$



R	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×		×
3			×	
4				×

- **نکته:** برای یک مجموعهء n عنصری میتوان 2^{n^2} رابطه روی آن تعریف کرد.

مثال) اگر $A = \{1,2,3,4\}$ چند رابطه می توان برای مجموعهء A تعریف کرد؟

$$|A| = 4 \longrightarrow \text{تعداد رابطه ها : } 2^{4^2} = 2^{16} = 65536$$

❑ خواص روابط

❖ **رابطه انعکاسی(بازتابی)**: رابطه R بر مجموعه A انعکاسی گوییم اگر به ازای تمام $a \in A$ آنگاه $(a,a) \in R$.

$$\forall a \in A \mid (a,a) \in R$$

❖ **رابطه متقارن** : رابطه R بر مجموعه A متقارن گوییم اگر به ازای تمام $a , b \in A$ اگر $(a,b) \in R$ آنگاه $(b,a) \in R$.

$$\forall a \forall b ((a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R)$$

❖ **رابطه پاد متقارن** : رابطه R بر مجموعه A پاد متقارن گوییم اگر به ازای تمام $a , b \in A$ اگر $(a,b) \in R$ و $(b,a) \in R$ آنگاه $a = b$.

$$\forall a \forall b ((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R) \rightarrow a = b$$

❖ **رابطه متعدی** : رابطه R بر مجموعه A متعدی گوییم اگر به ازای تمام $a , b , c \in A$ اگر $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in R$ آنگاه $(a,c) \in R$.

$$\forall a \forall b \forall c ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \rightarrow (a,c) \in R$$

مثال) برای هر کدام از روابط زیر بر روی مجموعه اعداد حقیقی تعیین کنید که کدام یک از خواص مجموعه ها در آن ها وجود دارد.

الف) رابطهء ($<$ یا $>$) :

ب) رابطهء ($\leq$ یا $\geq$) :

پ) رابطهء ($=$) :

ت) رابطهء ($\subseteq$) :

حل)

الف)

۱ . **بازتابی**: نیست. چرا ؟

$$(a,b) \to a > b \ \vee a < b \to a \neq b$$

۲ . **متقارن**: نیست. چرا ؟

$$(a,b) \in R \xrightarrow{< \text{ یا } >} (b,a) \notin R$$

۳ . **پاد متقارن**: است. چرا ؟

زیرا متقارن نیست.

۴ . **متعدی**: است. چرا ؟

$$(a < b) \wedge (b < c) \to (a < c)$$

$$(a > b) \wedge (b > c) \to (a > c)$$

ب)

۱ . **بازتابی**: است. چرا؟

$$(a,b) \to a \geq b \ \vee a \leq b \to a = b$$

۲ . **متقارن**: نیست. چرا؟

$$(a,b) \in R \xrightarrow{\leq \text{ یا } \geq} (b,a) \notin R$$

۳ . **پاد متقارن**: است. چرا؟

$$(a,b) \wedge (b,a) \to a = b$$

۴ . **متعدی**: است. چرا ؟

$$(a \leq b) \wedge (b \leq c) \to (a \leq c)$$

پ)

۱ . بازتابی است. ۲ . متقارن است. ۳ . پاد متقارن است.

۴ . متعدی است.

ت)

۱ . بازتابی است. ۲ . متقارن نیست. ۳ . پاد متقارن است.

۴ . متعدی است.

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت دوم**

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

❑ عملگرهای روابط

- اگر R و S دو رابطه از A به B باشند آنگاه عملگرهای زیر میتواند برای آن ها تعریف شود:

1. $R \cap S = \{(a,b) \mid (a,b) \in S \ \wedge (a,b) \in R\}$
2. $R \cup S = \{(a,b) \mid (a,b) \in S \ \vee (a,b) \in R\}$
3. $R - S = \{(a,b) \mid (a,b) \in R \wedge (a,b) \notin S\}$
4. $R \,\Delta\, S = R \oplus S = (R \cup S) - (R \cap S)$
5. $\bar{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \in A \times B \,, (a,b) \notin R\}$
6. $R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$

مثال ۱) روابط $R = \{(1,1),(1,2)\}$ و $S = \{(2,2),(1,2)\}$ روی مجموعهء $A = \{1,2\}$ تعریف شده است همهء عملگرهای بالا را روی دو رابطه انجام دهید.

$R \cup S = \{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲)\}$

$R \cap S = \{(۱,۲)\}$

$R - S = \{(۱,۱)\}$

$R \Delta S = \{(۱,۱),(۲,۲)\}$

$\bar{R} = A^{۲} - R = \{(۲,۲),(۲,۱)\}$

$R^{-۱} = \{(۱,۱),(۲,۱)\}$

$(R \cap S)^{-۱} = \{(۲,۱)\}$

$S^{-۱} = \{(۲,۲),(۲,۱)\}$

$R^{-۱} \cap S^{-۱} = \{(۲,۱)\}$

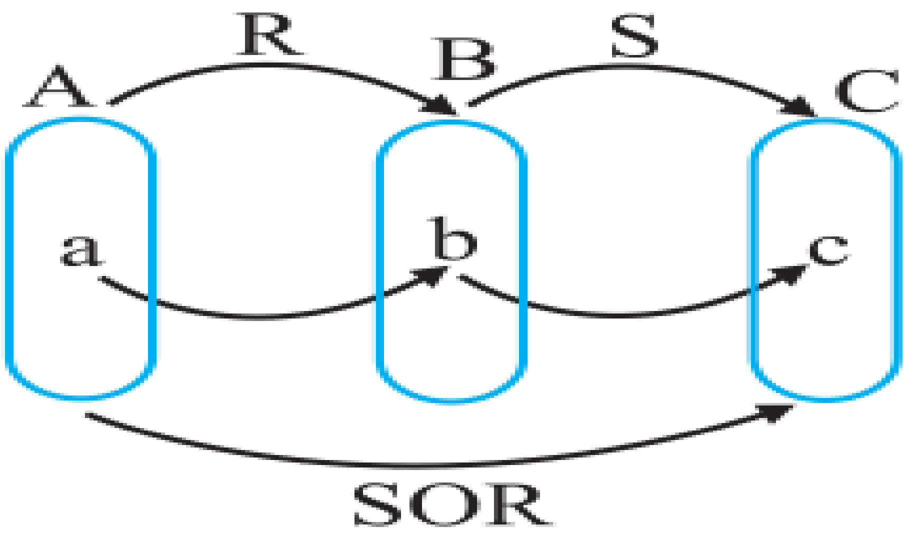
$\overline{(R \cup S)} = A^{۲} - (R \cup S) = \{(۲,۱)\}$

$\bar{S} = \{(۱,۱),(۲,۱)\}$

$\bar{R} \cap \bar{S} = \{(۲,۱)\}$

❑ ترکیب روابط

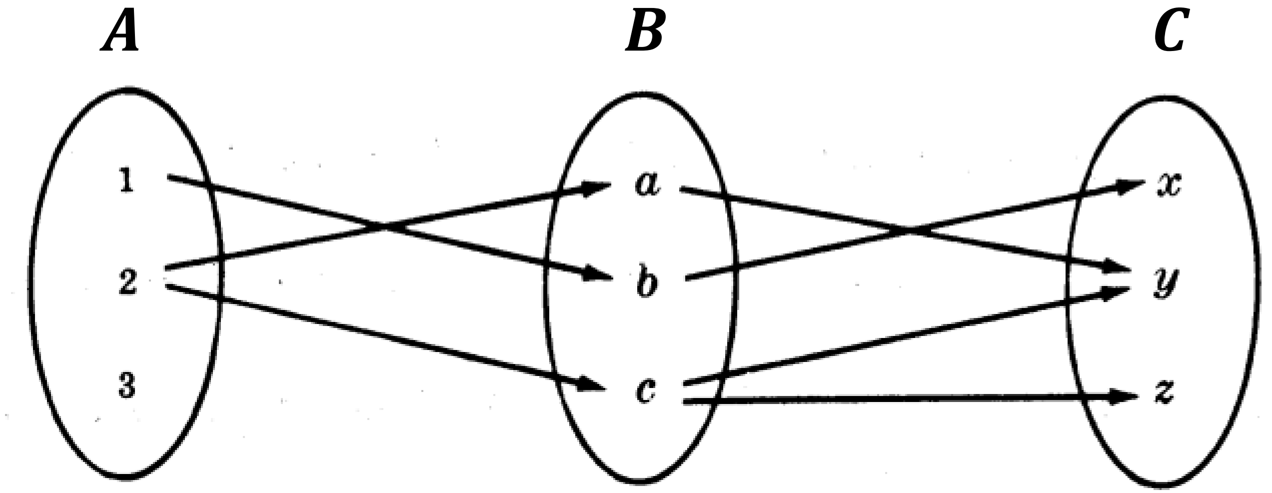
- فرض کنید که R رابطه ای از A به B باشد یعنی: $R \subseteq A \times B$ و S رابطه ای است از B به C یعنی: $S \subseteq B \times C$
آنگاه ترکیب رابطهء S و R به شکل $S \circ R$ نشان داده میشود و رابطه ای است از A به C یعنی: $S \circ R \subseteq A \times C$



$$\left((a,c) \in SOR\right) \Leftrightarrow \left(\exists b \in B : (a,b) \in R \text{ and } (b,c) \in S\right)$$

مثال ۲) فرض کنید که مجموعه های $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{a,b,c\}$ و $C = \{x,y,z\}$ باشند و روابط S و R به ترتیب از A به B و از B به C در نظر بگیرید ترکیب $R \circ S$ را بیابید :

$$R = \{(1,b),(2,a),(2,c)\}$$
$$S = \{(c,z)(b,x)(c,y)(a,y)\}$$



$$R \circ S = \{(2,z),(2,y),(1,x)\}$$

مثال۳) فرض کنید که مجموعه های $A = B = C = \{1,2,3,4\}$ باشد آنگاه روابط $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(3,4),(4,3)\}$ و $S = \{(1,2),(1,3),(3,4),(4,1)\}$ باشد آنگاه ترکیب $S \circ R$ را بدست آورید:

$$(۱,۱) \in R\ ,\ (۱,۲) \in S \Rightarrow (۱,۲) \in SOR$$
$$(۱,۱) \in R\ ,\ (۱,۳) \in S \Rightarrow (۱,۳) \in SOR$$
$$(۲,۱) \in R\ ,\ (۱,۲) \in S \Rightarrow (۲,۲) \in SOR$$
$$(۲,۱) \in R\ ,\ (۱,۳) \in S \Rightarrow (۲,۳) \in SOR$$
$$(۳,۴) \in R\ ,\ (۴,۱) \in S \Rightarrow (۳,۱) \in SOR$$
$$(۴,۳) \in R\ ,\ (۳,۴) \in S \Rightarrow (۴,۴) \in SOR$$

$$SOR = \{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۴,۴)\}$$

- **قضیه:** اگر روابط S و R به درستی تعریف شده باشند آنگاه:

$$\boxed{(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}}$$

- **اثبات:**

$$(a,c) \in (SOR)^{-۱} \Leftrightarrow (c,a) \in SOR \Leftrightarrow (c,b) \in R\ ,\ (b,a) \in S$$
$$\Leftrightarrow (b,c) \in R^{-۱}\ ,\ (a,b) \in S^{-۱} \Leftrightarrow (a,c) \in R^{-۱}OS^{-۱}$$

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت سوم**

۱. نمایش روابط با:

- ماتریس ها (ماتریس بولی)
- گراف ها (گراف جهت دار)

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

❑ نمایش روابط

- **ماتریس رابطه** : اگر R رابطه ای از A به B , به طوری که $R \subseteq (A \times B)$ باشد. و اگر فرض کنیم که $|A| = m$ و $|B| = n$ باشند , ماتریس رابطه R برابر است با:

$$M_R = [m_{ij}]_{m\times n} \qquad m_{ij} = \begin{cases} 1 & if\ (a_i, b_j) \in R \\ 0 & if\ (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

مثال۱) اگر $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2\}$ و $R \subseteq (A \times B)$ و $R = \{(2,1),(3,1),(3,2)\}$, ماتریس رابطه R برابر است با:

$$M_R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- در نوشتن ماتریس رابطه سطرهای ماتریس برای عناصر اول زوج مرتب های رابطه است و ستون ها برای عناصر دوم.

مثال۲) اگر $A = \{a_1,a_2,a_3\}$ و $B = \{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$ و $R \subseteq (A \times B)$ و ماتریس رابطه R برابر ماتریس زیر باشد مجموعه رابطه را بدست آورید.

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow R = \{(a1,b2),(a2,b1),(a2,b3),(a2,b4),(a3,b1),(a3,b3),(a3,b5)\}$$

❑ عملیات ماتریس رابطه (ماتریس های بولی)

۱) اجتماع ($Join$) : درایه های دو ماتریس را نظیر به نظیر OR میکنیم

۲) اشتراک ($Meet$) : درایه های دو ماتریس را نظیر به نظیر AND میکنیم

$$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2} \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \wedge \mathbf{M}_{R_2}.$$

Tolpam Academy

مثال) برای دو ماتریس بولی زیر ماتریس های اشتراک و اجتماع آن ها را بیابید.

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۳) ضرب بولی: اگر $M_{R_1} = [a_{ij}]_{p\times m}$ و $M_{R_2} = [b_{ij}]_{m\times n}$ باشد ضرب بولی $M_{R_1} \odot M_{R_2} = M_{R_1 \circ R_2} = [C_{ij}]_{p\times n}$ می باشد و به صورت زیر تعریف میشود:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & \exists k: 1 \leq k \leq p \\ 0 & else \end{cases} \qquad or \qquad C_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee (a_{i3} \wedge b_{3j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{nj})$$

- نکته: ضرب بولی ماتریس همانند ضرب عادی در ماتریس ها است با این تفاوت که به جای جمع حاصل ضرب ها از *or* به جای جمع و از *and* به جای ضرب استفاده میکنیم.

Tolpam Academy

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال) برای دو ماتریس بولی زیر ماتریس ضرب بولی $M_{R_1} \odot M_{R_2}$ را بیابید.

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_1} \odot M_{R_2} = \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

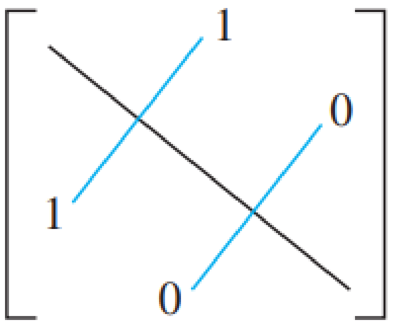
$$M_{R_1} \odot M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

❑ تشخیص خواص روابط از ماتریس

- فرض کنید $|A| = n$ و ماتریس رابطه $n \times n$ یعنی روابط روی A تعریف شده اند.

۱) رابطه بازتابی: باید تمام درایه های قطر اصلی ماتریس برابر یک باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$



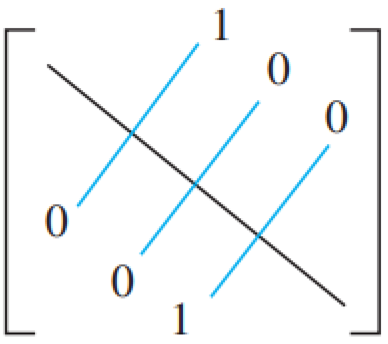
(a) Symmetric

۲) **رابطه متقارن**: باید ماتریس متقارن باشد یعنی ماتریس با ترانهاده خود برابر باشد.

$$M = M^t (R = R^{-1})$$

- به زبان ساده یعنی اینکه درایهء $\boldsymbol{m_{ij}}$ برابر با درایهء $\boldsymbol{m_{ji}}$ باشد.

۳) **رابطه پاد متقارن**: اگر درایهء $m_{ij} = 1$ و $j \neq i$ باشد باید درایهء $m_{ji} = 0$ باشد.



(b) Antisymmetric

$$M \wedge M^t \ll I_n$$

Tolpam Academy

۴) رابطه تــعدی: برای یافتن رابطه تعدی باید ابتدا توان دو ماتریس رابطه را حساب کنیم سپس اگر شرط زیر برقرار بود رابطه دارای خاصیت تعدی است.

$$M_{R^2} = M_R \odot M_R \qquad M_{R^2} \ll M_R$$

- **نکته** : ماتریسی M_{R^2} از ضرب بولی ماتریس M_R در خودش بدست می آید.

مثال) ماتریس داده شده را برای خواص بازتابی ، تقارن ، پاد تقارن و تعدی برسی کنید.

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۱) **رابطه بازتابی است** زیرا همه درایه های قطر اصلی 1 هستند.

۲) **رابطه متقارن است** زیرا همه درایه های قرینه نسبت به قطر اصلی برابراند.

۳) **رابطه پاد متقارن نیست** زیرا متقارن است.

۴) **رابطه متعدی نیست** زیرا:

$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow M_{R^2} \gg M_R$$

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت چهارم**

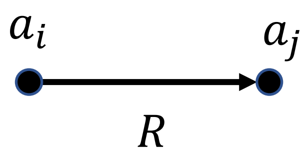
۱. نمایش روابط با:

- ماتریس ها
- گراف ها (گراف جهت دار)

[برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید]

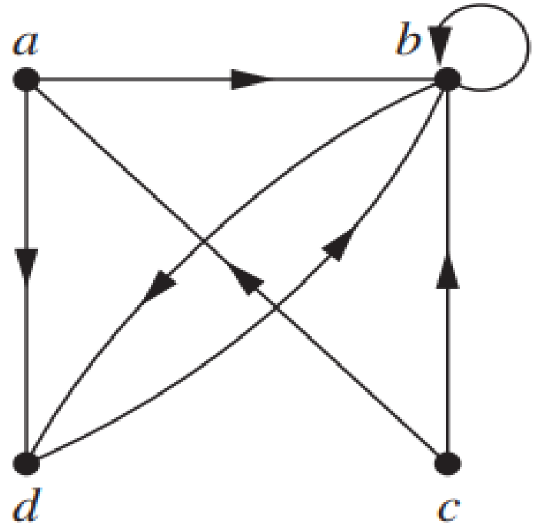
❑ گراف رابطه

- اگر R یک رابطه رو مجموعه A تعریف شده باشد در گراف رابطه R به جای هر عنصر a_i مجموعه A یک نقطه (رأس) و به هر رابطه (a_i,a_j) یک پاره خط (یال) از a_i به سمت a_j رسم میشود.



مثال) گراف جهت داری رسم کنید که داری رأس های a,b,c,d باشد که رابطه زیر بین رئوس وجود داشته باشد:

$$R = \{(a,b),(a,d),(b,b),(b,d),(c,a),(c,b),(d,b)\}$$



- زوج مرتب (b,b) را در گراف جهت دار یک یال است که از عنصر b به خودش برمیگردد که در گراف با نام **طوقه** شناخته میشود.

- نکته: گراف رابطه ای که رو همهء رأس هایش طوقه داشته باشد خاصیت بازتابی دارد.

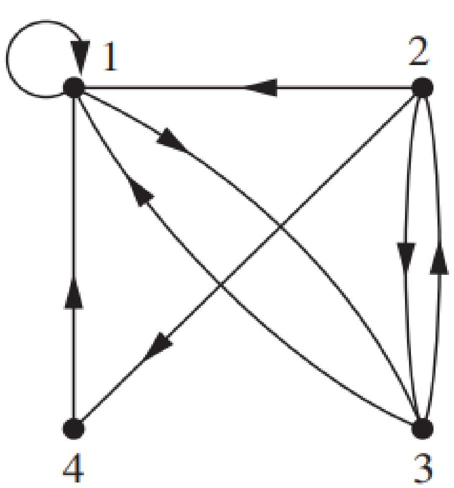
Tolpam Academy

مثال) گراف و ماتریس روابط زیر بدست آورید و رسم کنید.

$1.\quad R = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(4,1)\}$

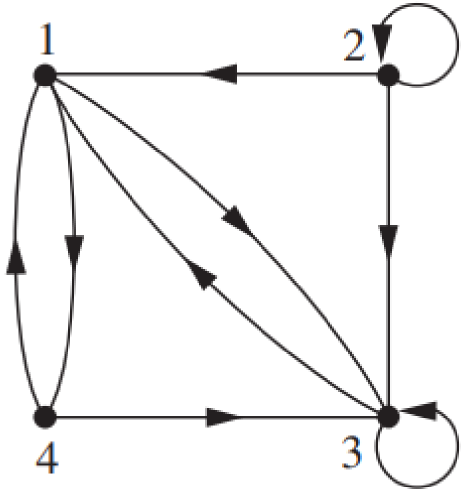
$2.\quad R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}$

(1)



$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(2)



$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

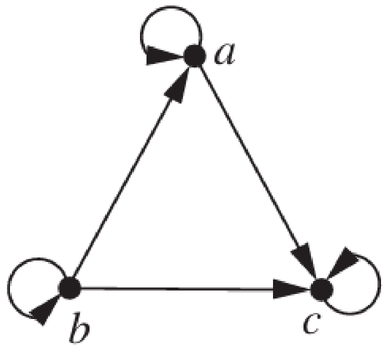
❑ تشخیص خواص روابط از گراف

۱. **رابطه بازتابی :** رابطه ای بازتابی است اگر و فقط اگر **همه** گره های گراف **طوقه** داشته باشند.

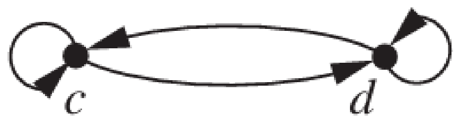
۲. **رابطه متقارن :** رابطه ای متقارن است اگر و فقط اگر **همه** یال های گراف **دو طرفه** باشند.

۳. **رابطه پاد متقارن :** رابطه ای پادمتقارن است اگر و فقط اگر **هیچ** یالی از گراف بجز طوقه ها **دو طرفه** نباشند.

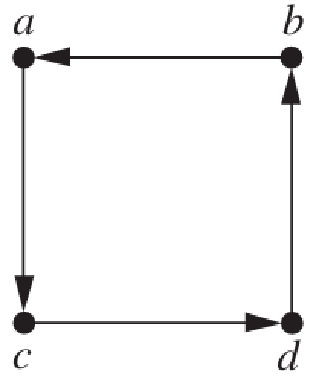
۴. **رابطه تعدی :** رابطه ای تعدی است اگر از a به b و از b به c یالی وجود داشت از a به c هم یک یال وجود داشته باشد.



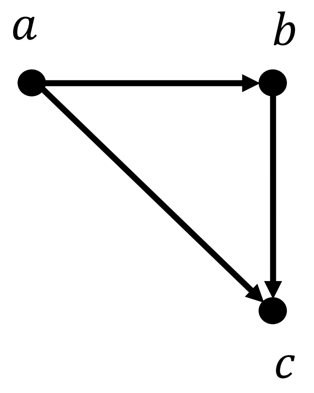
- دارای خاصیت بازتابی پادتقارن و تعدی است.



- دارای خاصیت بازتابی تقارن است.



- دارای خاصیت پادتقارن است.



- دارای خاصیت پادتقارن و تعدی است.

فهرست مطالب

- **قسمت پنجم**

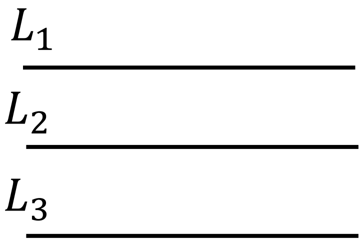
۱. رابطهء هم ارزی
۲. کلاس های هم ارزی

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

❑ رابطهء هم ارزی

- رابطه ای که دارای سه خاصیت **بازتاب** ، **تقارن** و **تعدی** است را رابطه هم ارزی $(Equivalence)$ گویند.
- $a \sim b$ ← رابطه a به b یک رابطه هم ارزی است.

مثال ۱) رابطه موازی بودن خطوط روی صفحه، یک رابطهء هم ارزی است.



۱) زیرا هر خط با خودش موازی است. (**بازتاب**)

۲) اگر L_1 با L_2 موازی باشد آنگاه L_2 با L_1 موازی است و عکس آن نیز صادق است. (**تقارن**)

۳) اگر L_1 با L_2 موازی باشد و L_2 با L_3 موازی باشد آنگاه حتما L_1 با L_3 نیز موازی است. (**تعدی**)

مثال ۲) اگر R رابطه ای رو مجموعه اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$) باشد؛ به طوری که aRb اگر و فقط اگر $a = b$ یا $a = -b$ مشخص کنید که این رابطه هم ارزی است یا خیر.

1. $a = b : (a, a) \in R$
2. $a = -b : (a, b) \in R \to (b, a) \in R$
3. $a = b \; or \; a = -b : (a, b) \text{ and} (b, c) \to (a, c)$

- R : یک رابطه **هم ارزی** است.

مثال ۳) اگر R رابطه ای رو مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) باشد؛ به طوری که aRb اگر و فقط اگر $a-b \in \mathbb{Z}$ آیا این یک رابطه هم ارزی است ؟

1. $a-b=0 \rightarrow a=b : aRa$
2. $a-b \in \mathbb{Z} \rightarrow b-a \in \mathbb{Z} : aRb \rightarrow bRa$
3. $a-c=(a-b)+(b-c): aRc$

مثال ۴) دو عدد صحیح b و a را به پیمانه m ($m \in \mathbb{Z}$ and $m>0$) هم نهشت گویند، هرگاه $a-b$ مضربی از m باشد.

آیا این رابطه دارای خاصیت هم ارزی است؟

$$R=\{(a,b) \mid a \equiv b (mod\ m)\} \ \textbf{or} \ a-b=mk$$

۱) هر عددی با خودش با هر پیمانه ای هم نهشت است زیرا :
$a-a=0 : k=0$

- $a \equiv a\ (mod\ m) : R\ is\ reflexive$

۲) اگر $a-b=km$ آنگاه $b-a=(-k)m$ پس:

- $a \equiv b(mod\ m) \rightarrow b \equiv a\ (mod\ m) : R\ is\ symmetric$

۳) اگر $a-b=km$ و $b-c=k'm$ آنگاه با جمع طرفین معادله خواهیم داشت:
$a-c=(k+k')m=qm$

- $a \equiv b(mod\ m) \wedge b \equiv c\ (mod\ m) \rightarrow a \equiv c(mod\ m)$: $R\ is\ transitive$

❑ کلاس های هم ارزی

- اگر یک رابطهء R روی مجموعه A باشد ، مجموعه ای که شامل **همه** عناصری است که با عضو $a \in A$ **رابطه** دارند را **کلاس هم ارزی** گویند و به شکل زیر نمایش میدهند:

$$[a] = [a]_R = \{\, s \in A \mid (a, s) \,\}$$

مثال ۵) کلاس های هم ارزی $[2]$ و $[1]$ و $[0]$ را در رابطه همنهشتی به پیمانه 4 رو مجموعه اعداد صحیح بدست آورید.

- نکته : رابطه همنهشتی با هر پیمانه ای یک رابطه هم ارزی است.

$$[0] = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$[a]_m = \{\dots, a - 2m, a - m, a, a + m, a + 2m, \dots\}$$

مثال ۶) فرض کنید که $n \in \mathbb{Z}$ و S مجموعهء از رشته های بیتی است و رابطهء R_n به صورت زیر تعریف میشود :

$$R_n = \{\forall s, t \in S \mid sR_nt \leftrightarrow s = t\}$$

اثبات کنید که این یک رابطهء هم ارزی است، سپس کلاس هم ارزی رشتهء 0111 را در رابطه R_3 بیابید.

1. $s \in S \rightarrow sR_ns$ $(reflexive)$
2. $s = t \rightarrow sR_nt \ And \ tR_ns$ $(symmetric)$
3. $s, t, r \in S \rightarrow s = t \ And \ t = r \rightarrow s = r$:

$$sR_nt \wedge tR_nr \Longrightarrow sR_nr \ (transitive)$$

پس R_n یک رابطه هم ارزی است.

$$[011]_{R_3} = \{011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, \ldots\}$$

فهرست مطالب

- **قسمت ششم**

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

❖ **قضیه** : فرض کنید که R یک رابطه روی مجموعه A است. برای هر $a,b \in A$ باشند گزاره های زیر برقرار است.

$i.\quad aRb$

$ii.\quad [a] = [b]$

$iii.\quad [a] \cap [b] \neq \emptyset$

○ **رابطه بین گزاره ها**: $i \leftrightarrow ii \leftrightarrow iii$

- **اثبات قضیه بالا:**

  - فرض میکنیم که i درست باشد و از درست بودن آن به درست بودن ii میرسیم.

$$\begin{cases} aRb \\ aRc \\ c \in [a] \end{cases} \xrightarrow{symmetric\ (R)} bRa \xrightarrow{transitive\ (R)} bRc : c \in [b]$$

$$[a] \subseteq [b] \ \land \ [b] \subseteq [a] \ \rightarrow [a] = [b]$$

  - حالا از درست ii بودن به درست بودن iii میرسیم.

$$[a] \cap [b] = [a] \neq \emptyset$$

  - حالا از درست iii بودن به درست بودن i میرسیم.

$$[a] \cap [b] \neq \emptyset \rightarrow \begin{cases} c \in [a] \\ c \in [b] \end{cases} \rightarrow aRc \ \land bRc \xrightarrow{symmetric\ (R)} cRb$$

$$\begin{cases} aRc \\ cRb \end{cases} \xrightarrow{transitive\ (R)} aRb$$

Tolpam Academy

مثال۱) رابطه R روی مجموعهء $A=\{a,b,c\}$ در رو به رو تعریف شده کلاس های هم ارزی $[a]\,,[b]\,,[c]$ را بیابید سپس درستی قضیه کلاس های هم ارزی را روی آن نشان دهید.

$$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$$

- $[a]_R=\{a,b,c\}$
- $[b]_R=\{a,b,c\}$
- $[c]_R=\{a,b,c\}$

a) $aRa \rightarrow \begin{cases}[a]=[a]\\ [a]\cap[a]=[a]\neq\emptyset\end{cases}$

$aRb \rightarrow \begin{cases}[a]=[b]\\ [a]\cap[a]=[a]\neq\emptyset\end{cases}$

$aRc \rightarrow \begin{cases}[a]=[c]\\ [a]\cap[c]=[a]\neq\emptyset\end{cases}$

b)

به عهده دانشجو

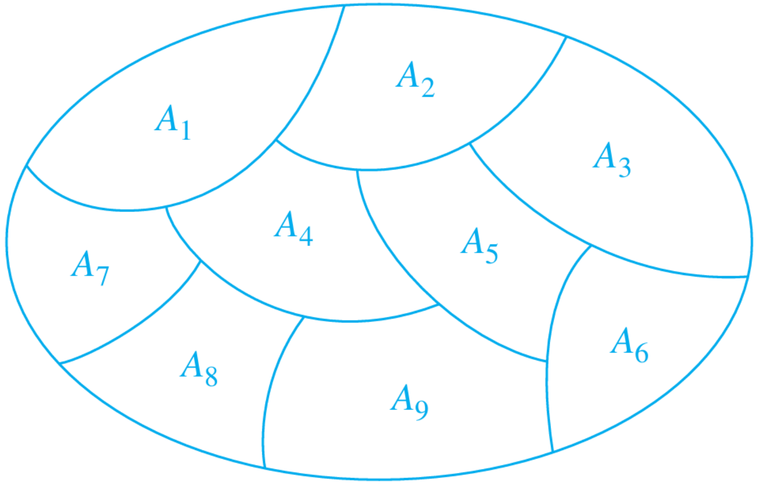
c)

به عهده دانشجو

❑ افراز رابطه

- مجموعهء زیر مجموعه های $A_1 , A_2 , A_3 , \dots , A_n$ از مجموعهء S را یک **افراز** $(partition)$ برای این مجموعه گویند؛ هرگاه این ۳ شرط برقرار باشد:

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$
2. $A_i \neq \emptyset$
3. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad when\ i \neq j$



- توجه : اگر شرط ۳ برقرار نباشد به آن **پوشش** $(cover)$ گویند.
- مجموعه های موجود در یک افراز را **بلوک** های افراز گویند.
- بلوک های افراز شکل مقابل مجوعه های زیر است.

$A_1 , A_2 , A_3 , \dots , A_9$

مثال۲) تمام افراز های مجموعه $A = \{1,2,3\}$ را بنویسید.

$P_1 = [\{1\},\{2\},\{3\}]$ $\quad$ $P_4 = [\{2,3\},\{1\}]$

$P_2 = [\{1,2\},\{3\}]$ $\quad$ $P_5 = [\{1,2,3\}]$

$P_3 = [\{1,3\},\{2\}]$

- **توجه:** پوشش هایی مثل $[\{1,2\},\{2,3\}]$ **افراز نیستند.**

- **نکته :** میتوان به ازای **هر افراز** یک مجموعهء هم ارزی نوشت. یعنی در هر افراز $(a,b) \in R$ و R یک رابطه هم ارزی است اگر و فقط اگر b و a عضو **یک بلوک** باشند.(یعنی افراز های هر کلاس را در هم ضرب دکارتی کنیم.)

مثال۳) در مثال ۲ هر کدام از افراز ها را به یک رابطه هم ارزی تبدیل کنید.

$$P_1 = [\{1\},\{2\},\{3\}] \rightarrow R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

$$P_2 = [\{1,2\},\{3\}] \rightarrow R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$$

$$P_3 = [\{1,3\},\{2\}] \rightarrow R_3 = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2)\}$$

Tolpam Academy

پایان فصل سوم (رابطه ها)