ریاضیات گسسته

(ساختمان گسسته)

۱

فصل یک (منطق و برهان ها)

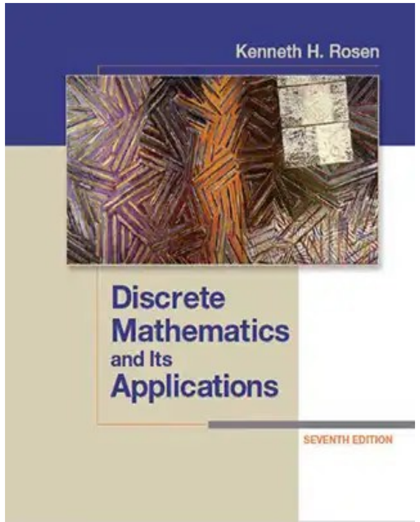
YouTube channel

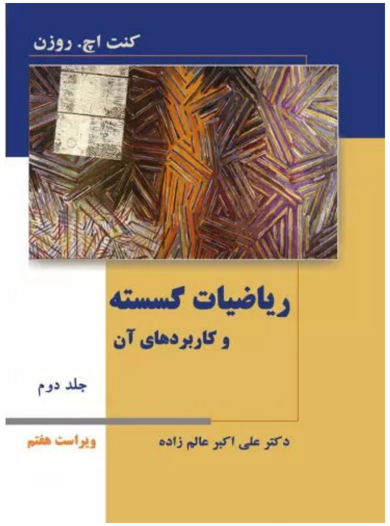
Tolpam Academy

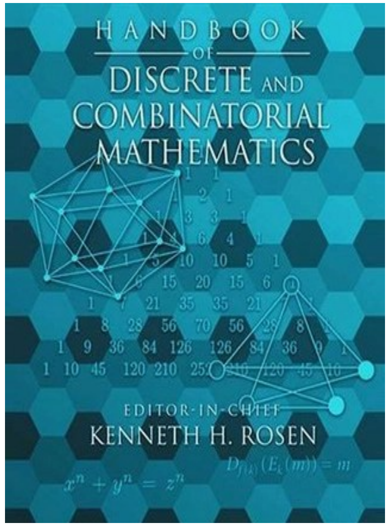
- تهیه و تدوین: پارسا زمانی

۱۴۰۲ زمستان

❖ منابع علمی:


Kenneth H. Rosen
Discrete Mathematics and Its Applications
SEVENTH EDITION


کنت اچ. روزن
ریاضیات گسسته
و کاربردهای آن
جلد دوم
ویراست هفتم
دکتر علی اکبر عالم زاده


HANDBOOK OF
DISCRETE AND
COMBINATORIAL
MATHEMATICS
EDITOR-IN-CHIEF
KENNETH H. ROSEN

Tolpam Academy

راهنمای استفاده از اسلایدها

- در صورت مشاهده‌ی هرگونه **اشکال علمی، نگارشی یا فنی** در اسلایدها، لطفاً از طریق ایمیل زیر اطلاع دهید:

tolpamacademy@gmail.com

- همچنین برای دسترسی به **آموزش ویدیویی هر بخش از درس**، می‌توانید:

QR Code موجود در اسلاید اول هر بخش مثل QR Code رو به رو را اسکن کنید.

یا روی متن لینک‌شده در پایین اسلاید اول هر بخش از درس کلیک نمایید.

تا به آموزش مربوط به همان مبحث دسترسی پیدا کنید.

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت اول**

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

Tolpam Academy

❖ گزاره: یک جمله‌ء خبری است که, دارای ارزش **درست** یا **نادرست** است.

➢ نکات:

۱) ارزش یک گزاره‌ء درست را با (**د**) یا (**T**) نشان می دهیم.

۲) ارزش یک گزاره‌ء نادرست را با (**ن**) یا (**F**) نشان می دهیم.

❖ جدول ارزش گزاره ها:

- هر گزاره ای دارای ارزش **درست** و **نادرست** است.

▪ جدول ارزش یک گزاره (p):

p
د
ن

p
T
F

Tolpam Academy

- جدول ارزش دو گزاره (q و p):

نکته

جدول ارزش n گزاره , 2^n حالت دارد.

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

p q

د د

ن ن

۲ × ۲ = ۴

- جدول ارزش سه گزاره (r و q و p):

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

p q r

د د د

ن ن ن

۲ × ۲ × ۲ = ۸

Tolpam Academy

❖ **استدلال: به روش نتیجه گیری بر اساس اصول منطقی استدلال گویند.**

- هر استدلال از دو بخش تشکیل می شود:

۱) چند جمله خبری (گزاره) که به آن مفروضات گویند.
۲) یک جملهء خبری (گزاره) که به آن نتیجه (حکم) گویند.

مثال)

مفروضات استدلال:
x یک عدد اول است.
x عددی فرد است.
x کوچک تر از ۵ است.

نتیجه استدلال (حکم): $x = ۳$

❖ **تعریف گزاره نما: هر گزاره ای که یک یا چند متغیر داشته باشد یک گزاره نما است.**

مثال)
۱) x عددی اول است.
۲) در پرتاب یک تاس احتمال پیشامد A , $\frac{1}{4}$ است.
۳) $x+\frac{1}{x} > \frac{5}{2}$.

Tolpam Academy

تمرین ۱) کدام یک از جملات زیر گزاره اند؟ ارزش آن را تعیین کنید.

۱) عبور نکن. ⟵ این جمله دستوری است و گزاره **نیست**.

۲) ساعت چند است؟ ⟵ این جمله سوالی است و گزاره **نیست**.

۳) $x + 3 = 5$ ⟵ این جمله یک **گزاره نما** است و گزاره **نیست**.

۴) $2 + 3 = 5$ ⟵ این جمله یک گزاره **است** و ارزش آن **درست** است.

۵) ماه از پنیر سبز ساخته شده است. ⟵ این جمله یک گزاره **است** و ارزش آن **نادرست** است.

۶) $2^n \geq 100$ ⟵ این جمله یک **گزاره نما** است و گزاره **نیست**.

۷) مریم یک MP3 دارد.

۸) این لپ تاپ 100GB فضا دارد.

❖ **نقیض: اگر p یک گزاره باشد, نقیض آن را به شکل $\sim p$ نشان میدهند و آن را میخوانند:**

(چنین نیست که p).

p	$\sim p$
T	F
F	T

نکته ۱

نقیض یک گزاره آن جمله را **منفی** میکند.

نکته ۲

ارزش نقیض یک گزاره **خلاف** ارزش خود گزاره است.

مثال) نقیض

" PC محمد سیستم عامل Linux است."

به زبان ساده بیان کنید.

حل) چنین نیست که PC محمد سیستم عامل Linux است.

PC محمد سیستم عامل Linux نیست. ⬅ کافی است که جمله را منفی کنید.

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت دوم**

۱. ترکیب فصلی
۲. ترکیب عطفی
۳. ترکیب شرطی
۴. ترکیب دو شرطی
۵. ترکیب انحصاری

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

➢ ترکیبات گزاره ها

❖ **ترکیب فصلی:** اگر p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب « p یا q » را به صورت ($p \vee q$) نمایش میدهند و آن را ترکیب فصلی دو گزاره میگویند. ۱-۱

نکـــته

ارزش $p \vee q$ **فقط** زمانی نادرست است که **هر دو** گزاره p و q نادرست باشند.

❖ **ترکیب عطفی:** اگر p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب « p و q » را به صورت ($p \wedge q$) نمایش میدهند و آن را ترکیب عطفی دو گزاره میگویند. ۱-۲

نکـــته

ارزش $p \wedge q$ **فقط** زمانی درست است که **هر دو** گزاره p و q درست باشند.

▪ جدول ارزش ها:

۱-۲

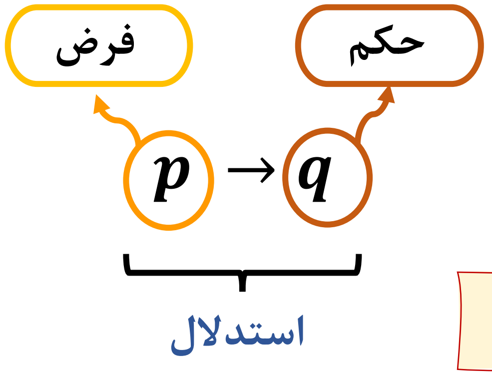
p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

۱-۱

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

❖ **ترکیب شرطی:** اگر p و q دو گزاره باشند، به گزاره مرکب $p \to q$ **ترکیب شرطی** دو گزاره می گویند

و به صورت ((اگر p آنگاه q)) آن را میخوانند. ۱-۳



❑ میتوان گفت:

نکـــته۱

ارزش $p \to q$ زمانی نادرست است که فرض درست و حکم نادرست باشد.

نکـــته۲

اگر فرض نادرست باشد ترکیب شرطی **همواره** درست است.

▪ جدول ارزش ها:

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

۱-۳

Tolpam Academy

❖ **ترکیب دو شرطی:** اگر p و q دو گزاره باشند, به گزاره مرکب $(p \to q) \wedge (q \to p)$ **ترکیب دوشرطی** دو گزاره

۱-۴ می گویند و به صورت (($p \leftrightarrow q$)) نمایش میدهند و آن را میخوانیم « p **اگر و فقط اگر** q ».

نکـــــته

ارزش $p \leftrightarrow q$ **فقط** زمانی درست است که ارزش p و q یکسان باشد.

▪ جدول ارزش ها: ۱-۴

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

➢ **اولویت عملگر های ترکیبی:**

عملگر	اولویت
$\sim$	۱
$\wedge$ $\vee$	۲ ۳
$\to$	۴
$\leftrightarrow$	۵

❖ **ترکیب انحصاری(یای غیر شمول)**: اگر p و q دو گزاره باشند, **یای غیر شمول** p و q به صورت

۱-۵ « $p \oplus q$ » نشان داده میشود و آن را میخوانیم " p یا q (ولی نه هر دو) ".

■ جدول ارزش ها:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

۱-۵

نکـــــته

این ترکیب **فقط** زمانی درست است که **فقط یکی** از گزاره ها درست باشد.

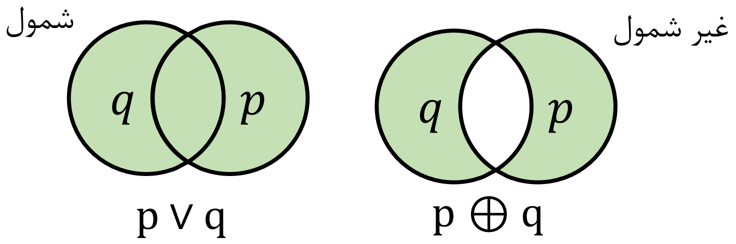
❑ تفاوت ترکیبات **یا**

تفاوت / یا	نماد	شرط درستی
غیر شمولی	$\oplus$	یک گزاره درست.
شمولی	$\vee$	یک یا دو گزاره درست.

مثال) ۱) " پیش غذا سوپ **یا** سالاد است. " ← **غیر شمولی**

۲) " همه ی آن ها ورزش کار **یا** هنرمند هستند." ← **شمولی**

- **شکل:**



تمرین ۲) ارزش $(\sim p)\sim$ و $(\sim(\sim p))\sim$ زمانی که ارزش p نادرست باشد چگونه است؟

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\sim(\sim(\sim p))$
F	T	F	T

حل) با کشیدن جدول ارزش گزاره ها جواب را پیدا میکنیم.

تمرین ۳) الف) ترکیب p ∧ q و ب) ترکیب p ∨ q , را در صورتی که p "رم PC ربکا ۱۶ گیگ حافظه دارد " و q " پردازنده PC ربکا ۱GHz سریعتر است" باشند به زبان ساده بیان کنید.

حل: الف) ترکیب p ∧ q را به صورت q و p میخوانیم پس: ← "رم PC ربکا ۱۶ گیگ حافظه دارد **و** پردازنده PC ربکا ۱GHz سریعتر است"

ب) ترکیب p ∨ q را به صورت q یا p میخوانیم پس: ← "رم PC ربکا ۱۶ گیگ حافظه دارد **یا** پردازنده PC ربکا ۱GHz سریعتر است"

تمرین ۴) مقدار متغیر x بعد از برخورد با گزاره‌ی ((هرگاه ۴=۲+۲ آنگاه $x := x + 1$)) در صورتی تعیین کنید که پیش از برخورد $x = 0$. (علامت =: به معنای انتساب است.)

حل) گزاره بالا یک گزاره‌ی شرطی است. چون ارزش گزاره ۴=۲+۲ درست است پس انتساب انجام شده.

$x = 0 + 1 \longrightarrow x = 1;$

فهرست مطالب

- **قسمت سوم**

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

❖ هم ارزی: اگر دو گزاره p و q در **همه ی** حالت های ممکن ارزش **برابری** داشته باشند آن دو گزاره هم ارز منطقی هم هستند آن ها را به این صورت (($p \equiv q$)) نمایش میدهیم.

p	q
T	T
F	F

$\longrightarrow$ $p \equiv q$

نکـــــته

گزاره های p و q را هم ارز منطقی نامیم اگر $p \Leftrightarrow q$ یک راستگو باشد.

مثال) • اثبات کنید که گزاره $p \wedge \neg p \equiv F$ و گزاره $p \vee \neg p \equiv T$ باشد.

حل)

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

- **این مثال رو به عنوان یه قانون میپذیریم.**

مثال) نشان دهید که $\neg(p \lor q)$ و $\neg p \land \neg q$ به طور منطقی هم ارز اند.

حل)

p	q	$p \lor q$	$\neg(p \lor q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \land \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

- نتیجه این مثال یک قانون مهم رو اثبات میکند.

❑ **قانون دمورگان**

$$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$$

$$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$$

مثال) نشان دهید که $p \lor (q \land r)$ و $(p \lor q) \land (p \lor r)$ به طور منطقی هم ارز اند.

p	q	r	$q \land r$	$p \lor (q \land r)$	$p \lor q$	$p \lor r$	$(p \lor q) \land (p \lor r)$
T	T	T	T	**T**	T	T	**T**
T	T	F	F	**T**	T	T	**T**
T	F	T	F	**T**	T	T	**T**
T	F	F	F	**T**	T	T	**T**
F	T	T	T	**T**	T	T	**T**
F	T	F	F	**F**	T	F	**F**
F	F	T	F	**F**	F	T	**F**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

- نتیجه این مثال یک قانون مهم رو اثبات میکند.

❑ **قانون پخش پذیری**

هم ارزی های منطقی	
نام	**هم ارزی**
قوانین همانی	$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$
قوانین تسلط	$p \vee T \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$
قوانین خودنمایی	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
نقیض مضاعف	$\neg(\neg p) \equiv p$
قوانین تعویض پذیری	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
قوانین شرکت پذیری	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
قوانین پخش پذیری	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
قوانین دمورگان	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
قوانین جذب	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
قوانین نقیض	$p \vee \neg p \equiv T$ $p \wedge \neg p \equiv F$

هم ارزی های منطقی شرطی و دو شرطی
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$ $p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$ $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

❑عکس , عکس نقیض و معکوس

عکس: گزاره $p \to q$ عکس گزاره $q \to p$ نامیده میشود.

عکس نقیض: گزاره $\neg p \to \neg q$ عکس نقیض $q \to p$ نامیده میشود.

معکوس: گزاره $\neg q \to \neg p$ معکوس گزاره $q \to p$ نامیده میشود.

نکـــته۱

ارزش **عکس نقیض** یک گزاره **برابر** ارزش همان گزاره است.

نکـــته۲

ارزش **معکوس** یک گزاره **برابر** ارزش **عکس** آن گزاره است.

❑ اثبات نکات بالا:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to \neg q$	$\neg q \to \neg p$
T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

مثال) عکس , عکس نقیض , معکوس گزارهٔ شرطی $\overbrace{\text{"هر وقت باران ببارد , تیم ملی برنده میشود."}}^{p \rightarrow q}$ را به زبان ساده بیان کنید.

$\underbrace{\text{هر وقت باران ببارد}}_{p}$, $\underbrace{\text{تیم ملی برنده میشود}}_{q}$

حل) عکس$(q \rightarrow p)$: "هر وقت تیم ملی برنده شود , باران میبارد."

عکس نقیض$(\neg q \rightarrow \neg p)$: "هر وقت تیم ملی برنده نشود , باران نمیبارد."

معکوس $(\neg p \rightarrow \neg q)$: "هر وقت باران نبارد , تیم ملی برنده نمیشود."

❖ **گزاره های مرکب:** ترکیبی از گزاره های ساده تر با استفاده از ترکیبات (عطفی , فصلی , شرطی , دو شرطی و ...) به صورت پیچیده تر است.

مثال)

i. $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$

ii. $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$

iii. $(p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$

نکـــته

برای **ساده‌سازی** گزاره های مرکب میتوانیم از **قوانین هم ارزی** استفاده کنیم.

تمرین ۵) با رعایت حق تقدم جدول درستی گزاره های زیر را رسم کنید.

1) $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$

2) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

حل ۱)

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$
$\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q]$
$\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$
$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F$
$\equiv \neg p \wedge \neg q$ $\rightarrow$ $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \boxed{\neg p \wedge \neg q}$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

حل ۲)

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$
$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$
$\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$
$\equiv T \vee T$
$\equiv T$

$\rightarrow$ $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \boldsymbol{T}$

- توضیح: گزاره‌ء بالا یک گزاره‌ء همواره **درست** است.

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت چهارم**

۱. عملگر های بیتی

۲. مدار منطقی

۳. سور ها

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

❑عملگر های بیتی

ارزش	بیت
F	0
T	1

- **بیت(bit)**: کامپیوتر اطلاعات را با استفاده از بیت ها ارائه میدهد که شامل دو مقدار (0) صفر و (1) یک میباشد.

- **نکـــته:** اعمال بیتی شامل رابطه های منطقی نیز هست که ما در زبان های برنامه نویسی از $OR\ ,XOR\ ,AND$ به جای $\wedge\ ,\oplus\ ,\vee$ به ترتیب استفاده میکنیم.

- جدول عملگر های بیتی

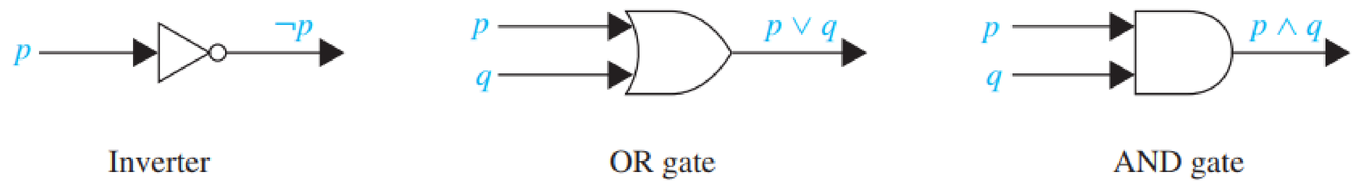
x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

- در رشته هایی از بیت ها ارزش بیت ها نظیر به نظیر باید در نظر گرفته شود.

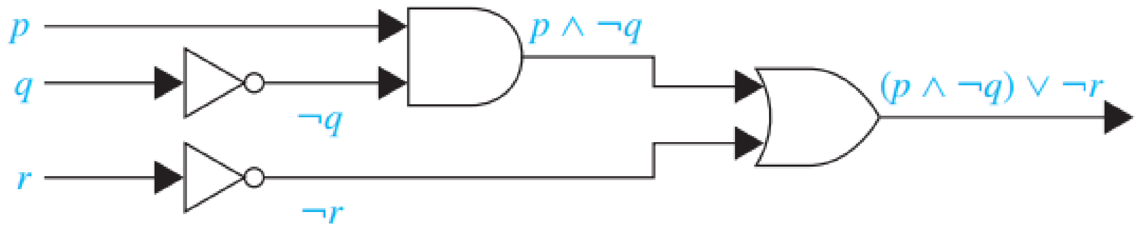
مثال)

$$0001 \vee 1010 \equiv 1011$$

❑ مدارهای منطقی

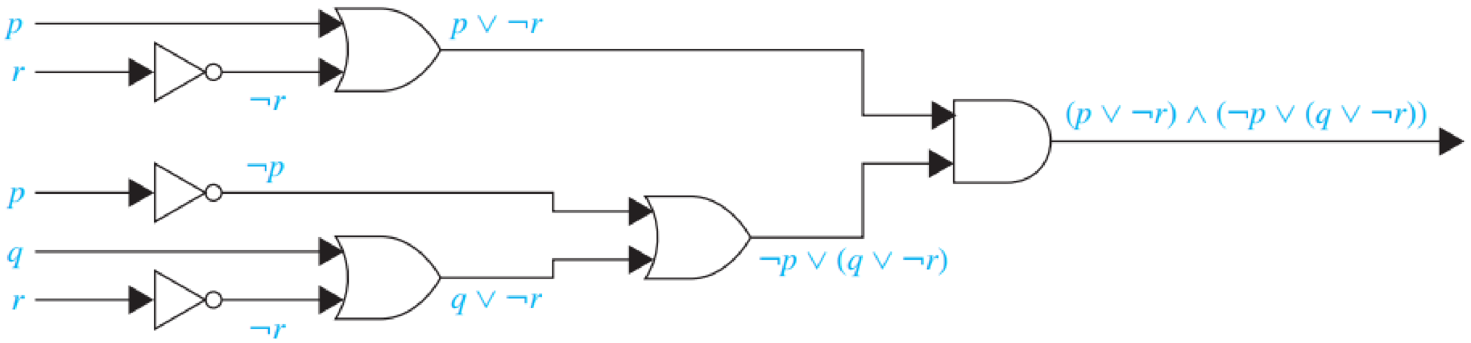


مثال ۱)



مثال ۲) یک مدار بسازید که خروجی زیر را با ورودی های r و q و p به ما بدهد.

- $(p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee (q \vee \neg r))$



Tolpam Academy

❑ سور ها

❖ **سور عمومی:** به نماد $\forall$ که به معنای «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» است و پیش از بعضی گزاره نماها قرار می گیرد سور عمومی می گویند.($\forall$ از کلمهء All گرفته شده است.)

نماد ریاضی	معادل فارسی
$\forall x; p(x)$	همهء مقادیر x , ویژگی p را دارد.

مثال ۱)

1. $\forall x \in \mathbb{Z}: 2x+1 \in O$
2. $\forall x \in \mathbb{R};\ x^2 \geq 0$

۱) خوانده میشود به ازای همهء مقادیر صحیح x, $2x+1$ عددی فرد است.

۲) خوانده میشود به ازای همهء مقادیرx , x^2 بزرگ تر مساوی صفر است.

- **نکـــته:** سور عمومی زمانی **درست** است که **مثال نقض نداشته باشد**، به عبارت دیگر دامنه متغیر گزاره نما با مجموعه جواب یکی باشد. یعنی $S=D$.

❖ **سور وجودی:** به نماد ∃ که به معنای « وجود دارد » یا « به ازای بعضی از مقادیر » است و پیش از بعضی گزاره نماها قرار میگیرید, سور وجودی میگویند.(∃ از کلمهٔ Exist گرفته شده است.)

مثال ۲)

1) $\exists x \in E : x = 3k (k \in \mathbb{Z})$

2) $\exists x \in \mathbb{R}; 4x^2 + 1 = 4x$

نماد ریاضی	معادل فارسی
$\exists x; p(x)$	به ازای بعضی از مقادیر x, x ویژگی p را دارد.

۱) که خوانده میشود بعضی از عددهای زوج مضرب ۳ هستند.

۲) که خوانده میشود عددی حقیقی مانند x وجود دارد که در رابطهٔ $4x^2 + 1 = 4x$ صدق میکند.

• **نکـــته:** سور وجودی زمانی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد , یا به عبارت دیگر دست کم به یک عضو از دامنهٔ متغیر آن رابطه برقرار باشد.($S \neq \phi$)

❑ **نقیض سور ها:**

۱ $\sim(\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$

۲ $\sim(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$

مثال ۱) نقیض گزارهٔ "همه هنرمندهای بزرگ ایرانی متولد رشت اند" میشود "بعضی از هنرمند های بزرگ ایرانی متولد رشت نیستند".

مثال ۲) نقیض گزارهٔ $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + \mathrm{x} + 1 > 0$ میشود: $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + x + 1 \leq 0$

❑ گزاره های سوری با دو متغیر

۱ $\forall x \forall y; p(x,y)$ به ازای هر x و هر y رابطهٔ p برقرار است.

۲ $\forall x \exists y; p(x,y)$ به ازای هر x وجود دارد y ای که در رابطهٔ p صدق کند.

۳ $\exists x \forall y; p(x,y)$ x وجود دارد که به ازای هر y رابطهٔ p برقرار است.

۴ $\exists x \exists y; p(x,y)$ وجود دارد x که به ازای لااقل یک y رابطهٔ p برقرار است.

نکـــته

برای **نقیض** کردن این نوع سور ها همان قاعدهٔ کلی برقرار است.

مثال) نقیض گزارهٔ $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: \mathrm{x} > \mathrm{y}$ میشود:

$$\sim(\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: \mathrm{x} > \mathrm{y}) \equiv \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}; x \leq y$$

Tolpam Academy

تمرین ۶) هریک از عبارات زیر را حساب کنید.

1) $11000 \wedge (01011 \vee 11011) \equiv 11000 \wedge (11011) \equiv 11000$

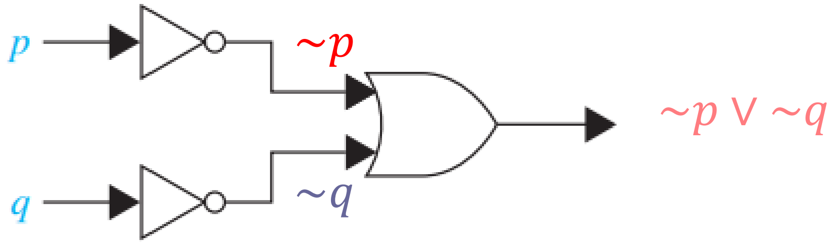
2) $(01111 \wedge 10101) \vee 01000 \equiv$ حل با دانشجو

3) $(01010 \oplus 11011) \oplus 01000 \equiv (10001) \oplus 01000 \equiv 11001$

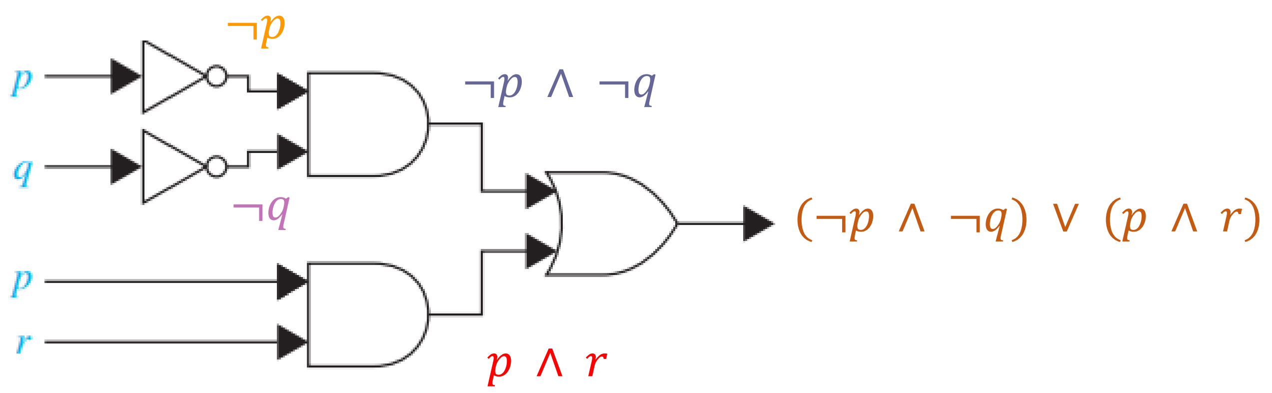
4) $(11011 \vee 01010) \wedge (10001 \vee 11011)$ حل با دانشجو

تمرین ۷) خروجی هریک از مدار های زیر چیست؟

1)



2)



❑ تقدم سورها

سور های $\forall$ و $\exists$ بر **تمام** عملگر های منطقی حساب گزاره **تقدم** دارند. به عنوان مثال $\forall x\, P(x) \ \vee\ Q(x)$ ترکیب فصلی بین $\forall x\, P(x)$ و $Q(x)$ است , یعنی $(\forall x\, P(x)) \ \vee\ Q(x)$ و اگر به این شکل $\forall x(P(x) \ \vee\ Q(x))$ بیان شود **اشتباه** است.

❑ هم ارزی های شامل سورها

1. $\forall x(P(x) \ \wedge\ Q(x)) \equiv \forall x\, P(x) \ \wedge\ \forall x\, Q(x)$
2. $\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$
3. $\neg\exists x\, Q(x) \equiv \forall x\, \neg Q(x)$

❑ ارزش درستی گزاره های سوری

اگر بتوان همهء عناصر موجود در یک دامنهء سور را به این شکل $x1, x2, \ldots, xn$ لیست کرد, میتوان گفت که سور ها مجموعه ای از ترکیبات به شکل روبه رو هستند.

1. $\exists x\, P(x) \equiv P(x1) \vee P(x2) \vee \cdots \vee P(xn)$
2. $\forall x\, P(x) \equiv P(x1) \wedge P(x2) \wedge \cdots \wedge P(xn)$

تمرین ۸) نقیض احکام $\forall x(x^2 > x)$ و $\exists x(x^2 = 2)$ چیست؟

$$\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x) \longrightarrow \neg\forall x(x^2 > x) \equiv \exists x \neg(x^2 > x) \equiv \exists x(x^2 \le x)$$

$$\neg\exists x\, Q(x) \equiv \forall x\, \neg Q(x) \longrightarrow \neg\exists x(x^2 \ne 2) \equiv \forall x \neg(x^2 \ne 2) \equiv \forall x(x^2 \ne 2)$$

تمرین ۹) نشان دهید که $\neg\forall x(P(x) \to Q(x))$ و $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ هم ارز منطقی هم هستند.

$$\neg\forall x(P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x(\neg(P(x) \to Q(x)))$$

$$\equiv \exists x(\neg(\neg P(x) \vee Q(x)))$$

$$\equiv \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

- از قوانین هم ارزی برای اثبات استفاده می‌کنیم چون کشیدن جدول برای بینهایت گزاره امکان پذیر نیست.

$$\boxed{\neg\forall x(P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))}$$

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت پنجم**

۱. تمرین های منطق گزاره ها

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

Tolpam Academy

۱- فرض کنید که p و q گزاره های زیر باشند:

(تمرین ۸-کتاب روزن)

p: "من در این هفته یک بلیط بخت آزمایی خریدم."

q: " من جایزهٔ یک ملیون دلار را بردم. "

هریک از گزاره های زیر را با یک جملهٔ فارسی بیان کنید.

a) $\neg p$ b) $p \vee q$ c) $p \rightarrow q$ d) $p \wedge q$

e) $p \leftrightarrow q$ f) $\neg p \rightarrow \neg q$ g) $\neg p \wedge \neg q$

حل)

a) $\neg p$: "من در این هفته بلیط بخت آزمایی **نخریدم**."

b) $p \vee q$: "من در این هفته یک بلیط بخت آزمایی خریدم **یا** من جایزهٔ یک ملیون دلار را بردم."

c) $p \rightarrow q$: "**اگر** من در این هفته یک بلیط بخت آزمایی بخرم **آنگاه** من یک ملیون دلار برنده میشوم."

d) $p \wedge q$: "من در این هفته یک بلیط بخت آزمایی خریدم **و** من جایزهٔ یک ملیون دلار را بردم."

e) $p \leftrightarrow q$: "من در این هفته یک بلیط بخت آزمایی خریدم **اگر و فقط اگر** جایزه یک ملیون دلار را ببرم."

f) $\neg p \rightarrow \neg q$: "**اگر** من این هفته یک بلیط بخت آزمایی **نخریدم آنگاه** جایزه یک ملیون دلار را **برنده نشدم**"

g) $\neg p \wedge \neg q$: "من این هفته یک بلیط بخت آزمایی **نخریدم و** جایزه یک ملیون دلار را برنده **نشدم**."

Tolpam Academy

(آزاد ۸۹-علوم کامپیوتر)

۲- گزاره $(p \to q) \land (p \to r)$ در چه حالت هایی درست است؟

حل)

- زمانی که نام از حالت های درستی به میان می‌آید باید جدول درستی رسم شود.

- پس در دو حالت یا باید p نادرست باشد یا هر سه گزاره‌ی r و q و p درست باشند.

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \land (p \to r)$
T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	T	F	T	F	$\boldsymbol{F}$
T	F	T	F	T	$\boldsymbol{F}$
T	F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
F	T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$

(تمرین ۱-کتاب روزن)

۳- فرض کنید که $P(x)$, حکم " $x \leq 4$ " باشد در این صورت ارزش گزاره های رو به رو چیست؟

حل)

1) P(0) ⟶ $0 \leq 4$ ⟶ **True**

2) P(4) ⟶ $4 \leq 4$ ⟶ **True**

3) P(6) ⟶ $6 \nleq 4$ ⟶ **False**

Tolpam Academy

۴- ارزش راستی هر یک از احکام زیر را در صورتی بیابید که قلمرو همهء متغیر ها همهء اعداد صحیح باشد. (تمرین ۱۵-کتاب روزن)

حل)

a) $\forall n(n^2 \geq 0)$ ⟶ $0 , 1 , 4 ,9 , 16 , \ldots$ ⟶ **True**

b) $\exists n(n^2 = 2)$ ⟶ $n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ ⟶ **False**

c) $\forall n(n^2 \geq n)$ ⟶ **True**

d) $\exists n(n^2 < 0)$ ⟶ **False**

۵- اثبات کنید که هم ارزی گزارهای $\neg(p \to (\neg q \land \neg p)) \equiv p$ برقرار است.

حل)

$$\neg(p \to (\neg q \land \neg p)) \equiv \neg(\neg p \lor (\neg q \land \neg p)) \equiv \neg(\neg p) \equiv p$$

۶- گزاره های سوری $\forall x\, p(x)$ و $\exists x\, p(x)$ در صورتی که $p(x) = x^2 \geq x$ باشد و قلمرو سورها شامل $x = 1,2,4,\frac{1}{2}$ باشد به صورت ترکیبات عطفی و فصلی بنویسید و ارزش آن را تعیین کنید.

حل)

$\forall x\, p(x)$: $(1 \geq 1) \land (4 \geq 2) \land (16 \geq 4) \land (\frac{1}{4} \ngeq \frac{1}{2})$ ⟶ **False**

$\exists x\, p(x)$: $(1 \geq 1) \lor (4 \geq 2) \lor (16 \geq 4) \lor (\frac{1}{4} \ngeq \frac{1}{2})$ ⟶ **True**

۷- نقیض هریک از گزاره های زیر را طوری بیان دارید که نماد نقیض قبل از گزاره نما قرار گیرد.

(تمرین ۳۲و۳۱-کتاب روزن)

a) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, T(x, y, z)$

b) $\forall x\, \exists y\, P(x, y) \lor \forall x\, \exists y\, Q(x, y)$

c) $\forall x\, \exists y\, (P(x, y) \land \exists z\, R(x, y, z))$

d) $\forall x\, \exists y\, (P(x, y) \to Q(x, y))$

e) $\exists x\, \exists y\, P(x, y) \land \forall x\, \forall y\, Q(x, y)$

f) $\exists x\, \exists y\, (Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x))$

g) $\forall y\, \exists x\, \exists z (T(x, y, z) \lor Q(x, y))$

	نقیض
a	$\exists x\, \forall y\, \exists z\ \neg T(x, y, z)$
b	$\exists x\, \forall y\, \neg P(x, y)\ \land\ \exists x\, \forall y\ \neg Q(x, y)$
c	$\exists x\, \forall y\, (\neg P(x, y)\ \lor\ \forall z\, \neg R(x, y, z))$
d	$\exists x\, \forall y\, (P(x, y)\ \land\ \neg Q(x, y))$
e	$\forall x\, \forall y\, \neg P(x, y)\ \lor\ \exists x\, \exists y\, \neg Q(x, y)$
f	$\forall x\, \forall y\, ((\neg Q(x, y)\ \lor\ \neg Q(y, x))\ \land\ (Q(x, y)\ \lor\ Q(y, x)))$
g	$\exists y\, \forall x\, \forall z\, (\neg T(x, y, z)\ \land\ \neg Q(x, y))$

۸- فرض کنید که $Q(x,y)$ حکم "$x - y = y + x$" باشد و قلمرو متغیر ها همه اعداد صحیح باشد

ارزش درستی گزاره های زیر را تعین کنید.

1. $Q(2,0)$
2. $\forall y\, Q(1,y)$
3. $\forall x\, \exists y\, Q(x,y)$
4. $\forall x\, \forall y\, Q(x,y)$

1) $2 - 0 = 0 + 2 \quad \rightarrow \quad$ **True**

2) $1 - 4 = 4 + 1 \rightarrow -3 \neq 5 \rightarrow$ **False**

3) $x - 0 = 0 + x \rightarrow y = 0 \rightarrow$ **True**

4) $5 - 2 \neq 2 - 5 \quad \rightarrow \quad$ **False**

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت ششم**

۱. استدلال
۲. قواعد استنتاج برای منطق گزاره ای
۳. قواعد استنتاج برای سور ها

- **مقدمه: در این بخش میپردازیم به چگونگی اثبات مسائل ریاضی و روش های اثبات یک مسئله.**

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

❖ **تعریف استدلال:** استدلال در منطق گزاره ای , رشته ای است از گزاره ها. همهء گزاره ها جز گزارهء آخر استدلال مفروضات و گزارهء نهایی نتیجه (حکم) نام دارد.یک استدلال معتبر است اگر صحت تمام مفروضات آن راست بودن نتیجه را ایجاب نماید.

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

یک استدلال

- **استدلال** ← اگر $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$ یک راستگو (Tautology) باشد , $(p_1, p_2, \ldots, p_n \therefore q)$ **معتبر** است.

- نکـــته: اگر یک استدلال درست **نباشد** باشد در این صورت یک **سفسطه** است.

- نماد ($\therefore$) به معنای " **بنابراین** " یا " **نتیجه میشود** " است و همان مفهوم نماد ترکیب شرطی ($\to$) را دارد.

مثال ۱) آیا استدلال رو به رو معتبر است؟

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array} \Rightarrow [(p \to q) \land p] \to q$$

p	q	$p \to q$	$[(p \to q) \land p] \to q$
T	T	T	$\boldsymbol{T}$
T	F	F	$\boldsymbol{T}$
F	T	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	T	$\boldsymbol{T}$

- اســـتدلال بالا یک tautology است
  پس یک **استدلال معتبر است**.

مثال ۲) آیا استدلال رو به رو معتبر است؟

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg p \\ \hline \therefore \neg q \end{array} \Rightarrow [(p \to q) \land \neg p] \to \neg q$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$[(p \to q) \land \neg p] \to \neg q$
1	1	0	0	1	**1**
1	0	0	1	0	**1**
0	1	1	0	1	**0**
0	0	1	1	1	**1**

- چون در یک حالت استدلال بالا درست نیست پس
  یک استدلال درست نیست و **سفسطه** است.

مثال ۳) آیا استدلال رو به رو معتبر است؟

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array} \Rightarrow [(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

- این استدلال یک tautology و معتبر است.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

❑قواعد استنتاج برای منطق گزاره ای

- با استفاده از جدول درستی همیشه می توان معتبر بودن یک استدلال را نشان داد اما این می تواند روش ملال آوری باشد به فرض مثال فرض کنید که استدلال شامل ۱۰ متغیر گزاره ای است در این صورت برای رسم جدول درستی به $2^{10} = 1024$ سطر برای جدول نیاز است اما به جای رسم جدول می توانیم از قوانین استنتاج بهره ببریم.

– جدول قواعد استنتاج

نام	راستگو	قاعده
جمع	$p \to (p \lor q)$	p $\therefore\ p \lor q$
ساده سازی	$(p \land q) \to p$	$p \land q$ $\therefore\ p$
ترکیب عطفی	$((p) \land (q)) \to (p \land q)$	p q $\therefore\ p \land q$
محلول	$((p \lor q) \land (\neg p \lor r)) \to (q \lor r)$	$p \lor q$ $\neg p \lor r$ $\therefore\ q \lor r$

– جدول قواعد استنتاج

نام	راستگو	قاعده
وضعیت تایید	$(p \land (p \to q)) \to q$	p $p \to q$ $\therefore\ q$
وضعیت نفی	$(\neg q \land (p \to q)) \to \neg p$	$\neg q$ $p \to q$ $\therefore\ \neg p$
قیاس فرضی	$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore\ p \to r$
قیاس فصلی	$((p \lor q) \land \neg p) \to q$	$p \lor q$ $\neg p$ $\therefore\ q$

مثال ۱) نشان دهید که مفروضات " امروز بعد از ظهر آفتابی نیست و هوا از دیروز سردتر است " و "ما فقط وقتی به شنا می رویم که هوا آفتاب باشد " و "هرگاه به شنا نرویم , آنگاه پارو زنی می رویم" و "هر گاه به پارو زنی رویم , آنگاه غروب در منزل هستیم" به نتیجه "غروب در منزل هستیم " منجر خواهد شد.

حل) فرض کنید که p: " امروز بعد از ظهر آفتابی است" و q: " هوا از دیروز سردتر است " و r: "به شنا می رویم" و s:"ما به پارو زنی می رویم" و t: " غروب در منزل هستیم."در این صورت استدلال به این صورت است:

$$[(\neg p \wedge q) \wedge (r \to p) \wedge (\neg r \to s) \wedge (s \to t)] \to t$$

$$\begin{array}{r} \neg p \wedge q \\ r \to p \\ \neg r \to s \\ \underline{s \to t} \\ \therefore\ t \end{array}$$

مرحله	دلیل
۱. $\neg p \wedge q$	فرض
۲. $\neg p$	ساده سازی با استفاده از (۱)
۳. $r \to p$	فرض
۴. $\neg r$	وضعیت نفی با استفاده از (۳) و (۲)
۵. $\neg r \to s$	فرض
۶. s	وضعیت تایید با استفاده از (۵) و (۴)
۷. $s \to t$	فرض
۸. t	وضعیت تایید از (۶) و (۷)

- اگر میخواستیم که برای استدلال بالا جدول درستی رسم کنیم نیاز به رسم ۳۲ سطر بود.

❑ قواعد استنتاج برای سور ها

- این قواعد در استدلال های ریاضی اغلب بدون ذکر صریح به طور گسترده به کار خواهند رفت.

– جدول قواعد استنتاج برای سورها	
نام	قاعده
لحظه سازی عمومی	$\dfrac{\forall x\, P(x)}{\therefore P(c)}$
تعمیم عمومی	$P(c)$ به ازای یک c دلخواه $\therefore \forall x\, P(x)$
لحظه سازی وجودی	$\exists x\, P(x)$ $\therefore P(c)$ به ازای عنصری مانند c
تعمیم وجودی	$P(c)$ به ازای عنصری مانند c $\therefore \exists x\, P(x)$

مثال ۲) نشان دهید که مفروضات " هرکس در این کلاس ریاضیات گسسته است درسی در مهندسی کامپیوتر گرفته است " و " مریم شاگرد این کلاس است " نتیجه "مریم درسی در مهندسی کامپیوتر گرفته است" را ایجاب می کند.

- فرض کنید $D(x)$ عبارت " x در این کلاس ریاضیات گسسته است " و $C(x)$ باشد: " x درسی در مهندسی کامپیوتر گرفته است." باشد در اینصورت:

$$\frac{\forall(\,D(x) \to C(x))}{\therefore\ C(v)}$$

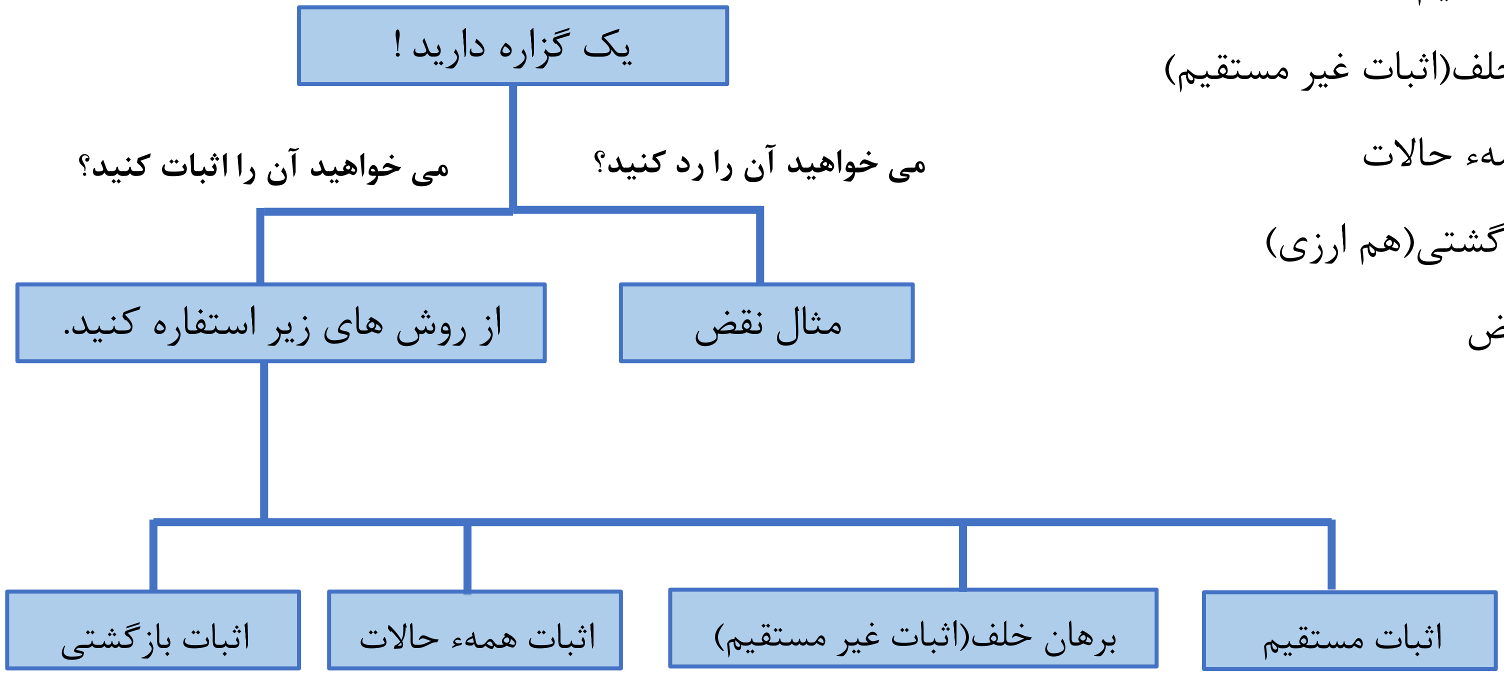
	مرحله	دلیل
1	$\forall x(D(x) \ \to \ C(x))$	فرض
2	D(مریم) $\to C$ (مریم)	لحظه سازی عمومی از (۱)
3	D(مریم) $\to C$ (مریم)	فرض
4	C (مریم)	وضعیت تایید از(۲) و (۳)

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت هفت**

۱. اثبات مستقیم
۲. برهان خلف(اثبات غیر مستقیم)
۳. اثبات همهء حالات
۴. اثبات بازگشتی(هم ارزی)
۵. مثال نقض



برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

❑اثبات مستقیم

- در اثبات مستقیم سعی میکنیم که با استفاده از دانش ریاضی که پیش از این داریم به صورت مستقیم از فرض به حکم برسیم.

مثال) اثبات کنید که مربع هر عدد فرد عددی فرد است.

$$n = 2k + 1$$

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{q} + 1 = 2q + 1$$

Tolpam Academy

❑برهان خلف(اثبات غیر مستقیم،عکس نقیض)

پایه و اساس این شیوه بر این استوار است که یک گزارهٔ شرطی با **عکس نقیض** خود **هم ارز** است. یعنی فرض میکنیم که حکم نادرست باشد و از این نادرستی حکم به نادرستی فرض اولیه میرسیم در بعضی قضایا اثبات عکس نقیض آن از اثبات خود قضیه راحت تر است بنابر این از این روش استفاده میکنیم.

مثال) اثبات کنید هرگاه n یک عدد صحیح باشد و $3n+2$ یک عدد فرد باشد آنگاه n فرد است.

- اگر بخواهید از روش مستقیم این قضیه را اثبات کنیم باید $3n+2 = 2k+1$ که قابل حل نیست. پس از روش غیر مستقیم این قضیه را اثبات میکنیم.

$$n = 2k$$

$$3n + 2 = 3(2k) + 2$$

$$6k + 2 = 2(3k + 1) = 2q$$

- عکس نقیض درست است پس قضیهٔ اصلی نیز درست است.

❑ اثبات همهٔ حالات

گاهی برای اثبات یک مسئله باید آن را در چند حالت در نظر بگیریم فرض کنید که میخواهیم که:

$p \to q$ را اثبات کنیم و باید برای n، p حالت $p_1 , p_2 , \dots , p_n$ در نظر بگیریم یعنی:

$$p_1 \land p_2 \land \dots \land p_n \Longrightarrow q \equiv (p_1 \Longrightarrow q) \land (p_2 \Longrightarrow q) \land \cdots \land (p_n \Longrightarrow q)$$

این هم ارزی دقیقا در روش اثبات همهٔ حالات استفاده میشود.

- توضیحات: به طور کلی این روش اثبات برای مسائلی کاربرد دارد که مفروضات (فرض ها)، حالت های مختلفی میتوانند داشته باشند در این روش از اثبات مسئله را در همه حالات بررسی میکنیم و تنها اگر در همه حالات مسئله حکم برقرار بود می‌توان گفت که گزاره حکم در این مسئله صادق است.

مثال) ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح n حاصل $n^2 - 3n + 7$ عددی فرد است.

- برای اثبات این مسئله باید ببینیم که n چند حالت میتواند داشته باشد که دو حالت است یا زوج باشد یا فرد پس:

① $n = 2k \implies (2k)^2 - 3(2k) + 7 = 4k^2 - 6k + 7$

$2(2k^2 - 3k + 3) + 1 = 2q + 1 :$ فرد است.

② $n = 2k + 1 \implies (2k+1)^2 - 3(2k+1) + 7$

$4k^2 + 4k + 1 - 6k - 3 + 7 = 4k^2 - 2k + 5$

$2(2k^2 - k + 2) + 1 = 2q + 1 :$ فرد است.

- پس در همهء حالت ها حاصل عبارت بالا یک عدد فرد است و مسئله اثبات شد.

❑ اثبات بازگشتی(هم ارزی)

در این دوش باید سعی کنید که با تشکیل رشته ای از گزاره های هم ارز به یک گزاره همواره درست برسید. این روش بر اساس هم ارزی زیر است:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

این روش بیشتر وقت ها برای اثبات نامساوی ها استفاده میکنیم.

مثال) اگر x و y دو عدد صحیح باشد آنگاه ثابت کنید که میانگین حسابی آن ها از میانگین هندسی آن ها بزرگ تر مساوی است.

- روش اول:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \iff x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\iff x-2\sqrt{xy}+y \geq 0 \iff (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$$

میانگین حسابی : $\frac{x+y}{2}$

میانگین هندسی : $\sqrt{xy}$

مثال) اگر x و y دو عدد صحیح باشد آنگاه ثابت کنید که میانگین حسابی آن ها از میانگین هندسی آن ها بزرگ تر مساوی است.

- **روش دوم:**

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \iff \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$$

$$\iff x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\iff (x-y)^2 \geq 0$$

❑مثال نقض

- **مثالی** که نشان میدهد یک نتیجه گیری یا حدس کلی **اشتباه** است و آن را رد میکند.

مثال ۱) مثال نقضی برای گزاره‌ء " به ازای هر عدد صحیح n عبارت n^2+2 همواره بر 3 بخش پذیر است." بیابید.

$n=1 \Longrightarrow 3$ $\quad$ $n=3 \Longrightarrow 11$

$n=2 \Longrightarrow 6$ $\quad$ مثال نقض: $n=3$

مثال ۲) درستی یا نادرستی گزاره‌ء " اگر p عددی اول باشد آنگاه عددی فرد است " را اثبات کنید.

پس گزاره‌ء بالا درست نیست. $\Longrightarrow$ مثال نقض : $p=2$

مثال ۳) نادرستی برای گزاره " برای هر y و x رابطه‌ء $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ برقرار است" را اثبات کنید.

$$\begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{4+9}=\sqrt{4}+\sqrt{9} \Longrightarrow \sqrt{13}\neq 5$$

مثال نقض : $x=4\ ,y=9$

فهرست مطالب

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

❑ سوال های طبقه بندی شدهء سری دوم (برهان ها)

۱- با استفاده از قواعد استنتاج نشان دهید که مفروضات " رضا سخت کار میکند " و " هرگاه رضا سخت کار کند آنگاه او پسر خسته کننده ای است" و هر گاه رضا پسر خسته کننده ای باشد آنگاه شغل مورد نظر را بدست نخواهد آورد " نتیجه : " رضا شغل مورد نظر را بدست نمی آورد " را ایجاب میکند.

(تمرین ۵-کتاب روزن)

حل)

- فرض میکنیم که: p : " رضا سخت کار میکند " و q : " رضا پسر خسته کننده ای است " و r : " رضا شغل مورد نظر را بدست می آورد" باشد. در این صورت استدلال به شکل زیر است:

$$[\,(p) \wedge (p \to q) \wedge (q \to \neg r)\,] \dashv \ \neg r$$

مرحله	دلیل
۱. p	فرض
۲. $p \to q$	فرض
۳. q	وضعیت تایید از (۱) و (۲)
۴. $q \to \neg r$	فرض
۵. $\neg r$	وضعیت تایید از (۳) و (۴)

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ q \to \neg r \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

- استدلال بالا معتبر است .

۲- ثابت کنید که استدلال رو به رو معتبر است.

(سوال تالیفی)

الف)

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ t \\ p \to r \\ t \to s \\ \hline \therefore s \vee j \end{array}$$

ب)

$$\begin{array}{l} \neg w \\ \neg v \vee r \\ v \\ r \to w \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$$

حل)

مرحله		دلیل
۱.	$p \wedge q$	فرض
۲.	p	ساده سازی (۱)
۳.	$p \to r$	فرض
۴.	r	وضعیت تایید از (۳) و (۲)
۵.	t	فرض
۶.	$\mathrm{t} \wedge r$	ترکیب عطفی از (۵) و (۴)
۷.	t	ساده سازی (۶)
۸.	$t \to s$	فرض
۹.	s	وضعیت تایید از (۷) و (۸)
۱۰.	$s \vee j$	جمع از (۹)

مرحله		دلیل
۱.	$\neg w$	فرض
۲.	$r \to w$	فرض
۳.	$\neg r$	وضعیت نفی (۱) و (۲)
۴.	v	فرض
۵.	v	ساده سازی (۳) و (۴)
۶.	$v \vee q$	جمع از (۵)
۷.	$\neg v \vee r$	فرض
۸.	$q \vee r$	محلول از (۶) و (۷)

۳- با استفاده از قواعد استنتاج ثابت کنید که اگر $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x))$ و $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ درست باشد ، گزاره‌ء سوری $\forall x(R(x) \wedge S(x))$ نیز درست است .

(تمرین ۲۷ -کتاب روزن)

حل)

$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x)) \\ \forall x(P(x) \wedge R(x)) \\ \hline \therefore \forall x(R(x) \wedge S(x)) \end{array}$$

مرحله		دلیل
۱.	$\forall x(P(x) \wedge R(x))$	فرض
۲.	$P(a) \wedge R(a)$	نمونه سازی عمومی از (۱)
۳.	$P(a)$	ساده سازی از (۲)
۴.	$\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x))$	فرض
۵.	$P(a) \rightarrow (Q(a) \wedge S(a))$	نمونه سازی عمومی از (۴)
۶.	$Q(a) \wedge S(\mathrm{a})$	وضعیت تایید از (۳) و (۵)
۷.	$S(\mathrm{a})$	ساده سازی از (۶)
۸.	$R(a)$	ساده سازی از (۲)
۹.	$R(a) \wedge S(a)$	ترکیب عطفی از (۷) و (۸)
۱۰.	$\forall x(R(x) \wedge S(x))$	تعمیم نمونه سازی عمومی

- **یادآوری قوانین :**

– جدول قواعد استنتاج برای سورها	
نام	قاعده
لحظه سازی عمومی	$\forall x\, P(x)$ $\therefore P(c)$
تعمیم عمومی	به ازای یک c دلخواه $P(c)$ $\therefore \forall x\, P(x)$
لحظه سازی وجودی	$\exists x\, P(x)$ $\therefore$ به ازای عنصری مانند c $P(c)$
تعمیم وجودی	به ازای عنصری مانند c $P(c)$ $\therefore \exists x\, P(x)$

(تمرین ۱۷-کتاب روزن)

۴- به وسیلهء برهان خلف ثابت کنید که هرگاه n^3+5 عددی فرد باشد آنگاه n عددی زوج است.

حل)

$$n = 2k+1$$
$$n^3+5 = (2k+1)^3+5 = 8k^3+12k^2+6k+1+5 = 2(4k^3+6k^2+3k+3)$$ زوج

۵- a و b دو عدد حقیقی و مثبت هستند ثابت کنید که : $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

حل)

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leftrightarrow \frac{a^3+b^3}{b^2a^2} \geq \frac{a+b}{ab} \xrightarrow{\times a^2b^2} \leftrightarrow a^3+b^3 \geq (a+b)(ab)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد}} \leftrightarrow \cancel{(a+b)}(a^2-ab+b^2) \geq \cancel{(a+b)}(ab) \leftrightarrow (a^2-ab+b^2) \geq (ab)$$

$$\leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \leftrightarrow \underbrace{(a-b)^2 \geq 0}_{\text{همواره درست.}}$$

۶- ثابت کنید که مجموع پنج عدد صحیح متوالی همواره بر ۵ بخش پذیر است .

- اگر عدد اول را n بگیریم عدد بعدی $n+1$ و $n+2$ و... است.

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10 \quad =5(n+2)$$

- با برهان مستقیم ثابت کردیم که مجموع پنج عدد متوالی مضربی از ۵ است .

۷- ثابت کنید که حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی همواره بر ۳ بخش پذیر است .

- باید ثابت کنیم که ضرب سه عدد متوالی تقسیم بر ۳ برابر یک عدد صحیح است.

$$n(n+1)(n+2)=3q$$

۱ $n=3k \quad \rightarrow n(n+1)(n+2)=3k(3k+1)(3k+2)$

۲ $n=3k+1 \quad \rightarrow n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)$

$$=3(k+1)(3k+1)(3k+2)$$

۳ $n=3k+2 \quad \rightarrow n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+3)(3k+4)$

$$=3(k+1)(3k+2)(3k+4)$$

پایان فصل اول (منطق و برهان ها)