Tolpam Academy

ریاضیات گسسته

(ساختمان گسسته)

۴

فصل چهارم (گراف ها)

Tolpam Academy

YouTube channel

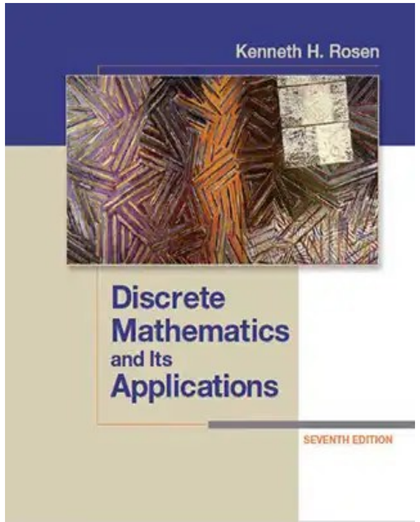
Tolpam Academy

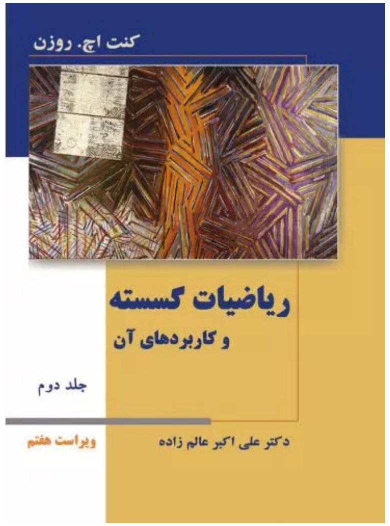
- تهیه و تدوین: پارسا زمانی

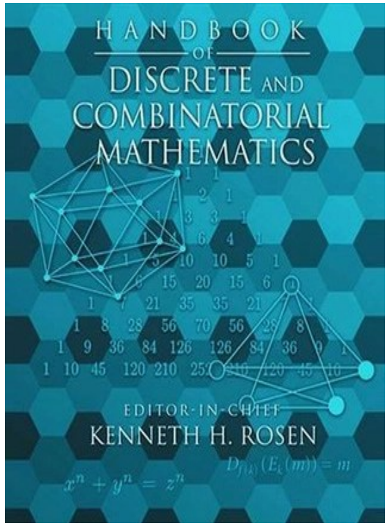
بهار ۱۴۰۴

Tolpam Academy

❖ منابع علمی:







Tolpam Academy

راهنمای استفاده از اسلایدها

- در صورت مشاهده‌ی هرگونه **اشکال علمی، نگارشی یا فنی** در اسلایدها، لطفاً از طریق ایمیل زیر اطلاع دهید:

tolpamacademy@gmail.com

- همچنین برای دسترسی به **آموزش ویدیویی هر بخش از درس**، می‌توانید:

QR Code موجود در اسلاید اول هر بخش مثل QR Code رو به رو را اسکن کنید.

یا روی متن لینک‌شده در پایین اسلاید اول هر بخش از درس کلیک نمایید.

تا به آموزش مربوط به همان مبحث دسترسی پیدا کنید.

برای دیدن آموزش این قسمت کلیک کنید

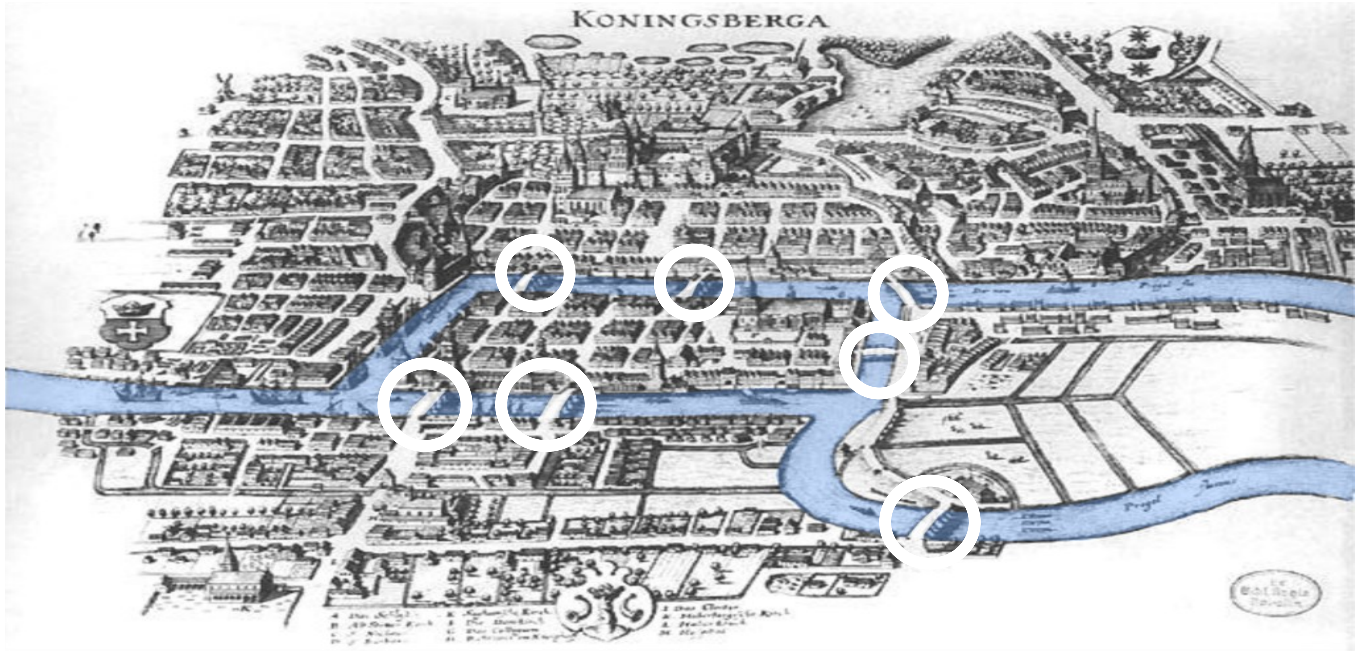
Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت اول**

❑ تاریخچه گراف ها

▪ در سال ۱۷۳۶ « اویلر» **(Euler)** ، اولین بار مسئله مشهور «هفت پل کونیگسبرگ» (Seven Bridges of Konigsberg) را حل کرد.

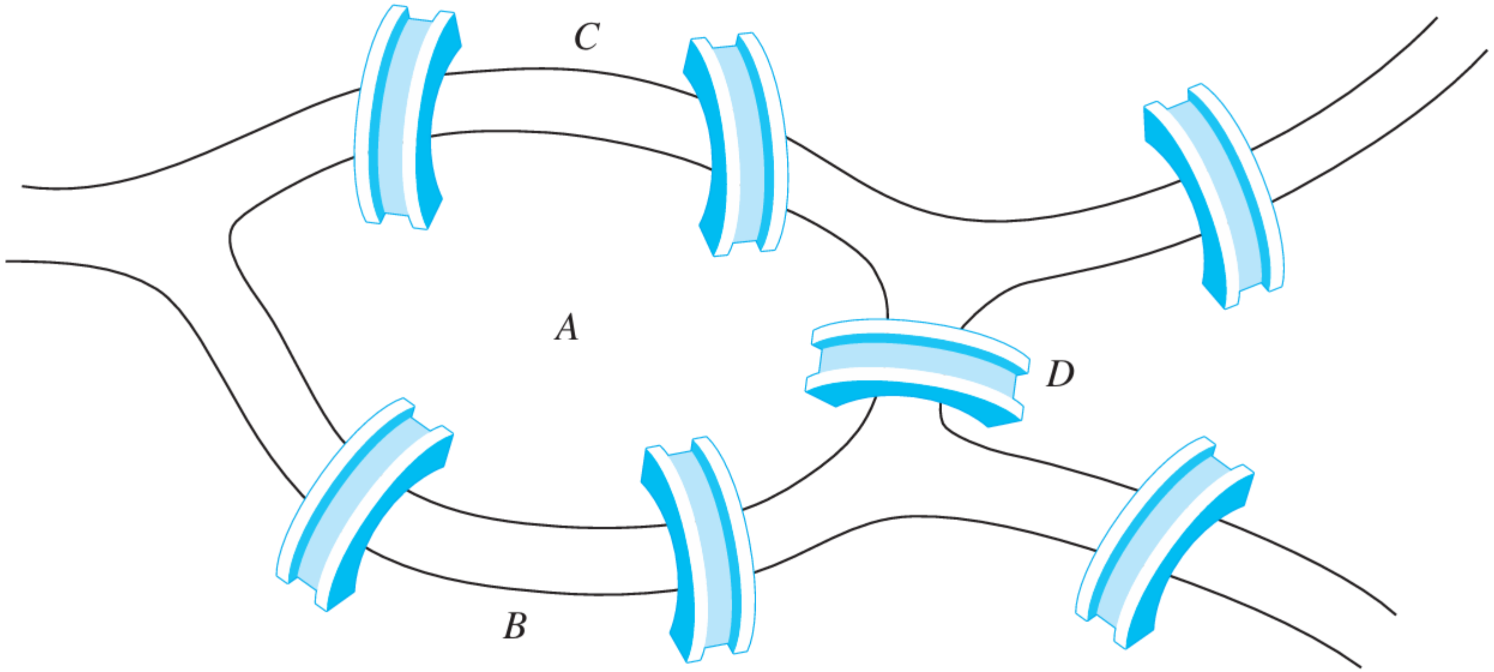


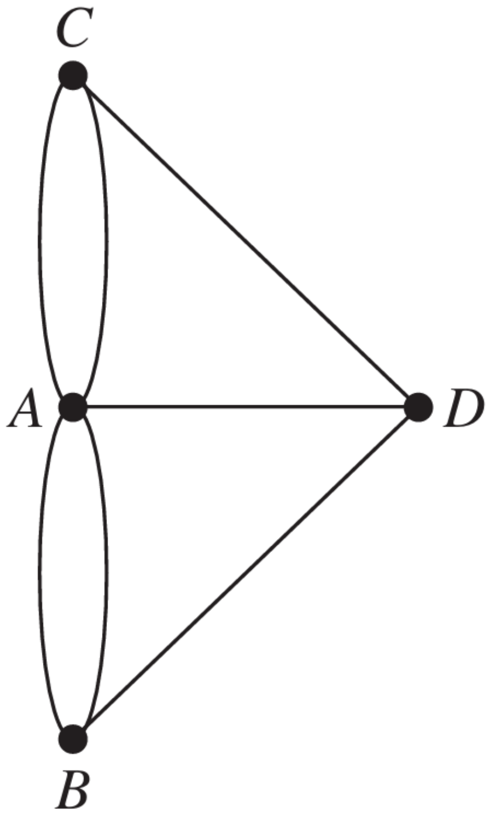
Königsberg

Leonhard Euler

- مسئله به این صورت بیان می‌شود که آیا می‌توان از نقطه‌ای شروع به قدم زدن کرد و همه پل‌ها را پیمود؟
- **خیر**

چرایی جواب این مسئله را بعداً خواهید فهمید.

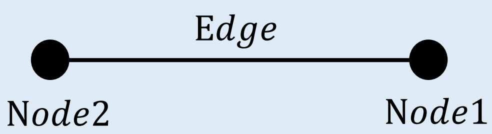




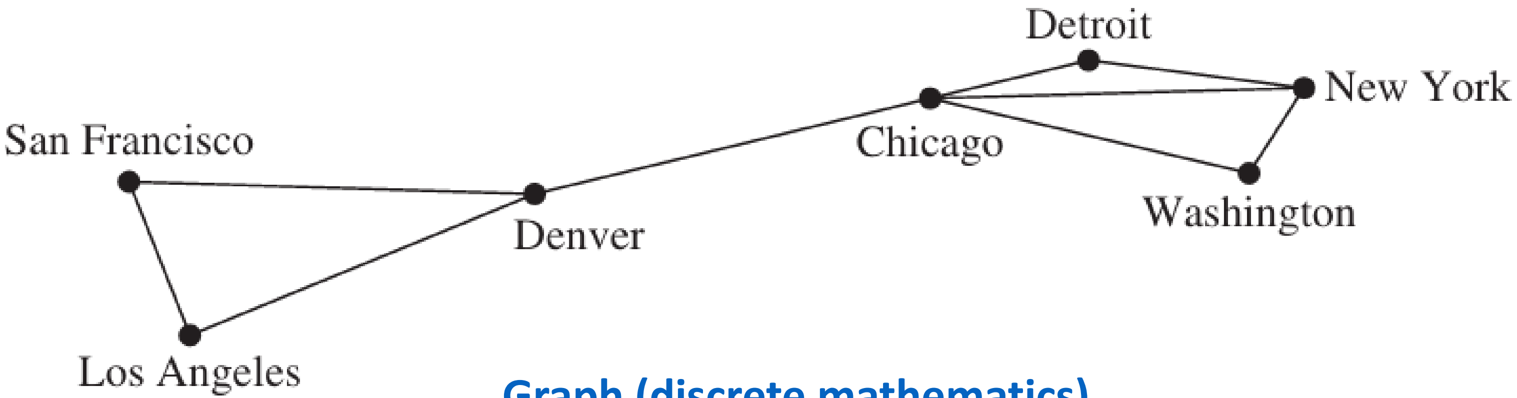
❖ **تعریف گراف**: گراف $G = (V,E)$ عبارت است از دو مجموعه « V , E » که

V : یعنی مجموعه **متناهی و <u>ناتهی</u>**$(V \neq \emptyset)$ **رئوس** $(Vertices)$ یا **گره ها** (Nodes).

E : یعنی مجموعه **متناهی یال ها** (Edges)

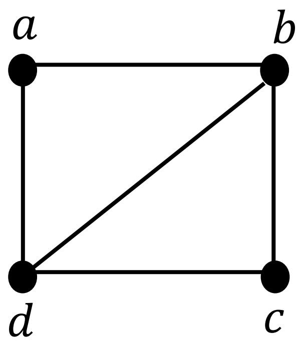


مثال۱) یک شرکت مخابراتی برای یکی از سرویس های شبکه ای خود تعدادی از دیتاسنتر های خود را در شهر های زیر به کار گرفته جهت مدل کردن این سیستم ها و ارتباط بین آن ها میتوان از نظریه گراف ها استفاده کرد و این شبکه را مدل کرد.



[Graph (discrete mathematics)]

- برای نمایش اینکه یالی از دو رأس a ,b عبور میکند از نمایش $\{a,b\}$ یا ab استفاده میشود.

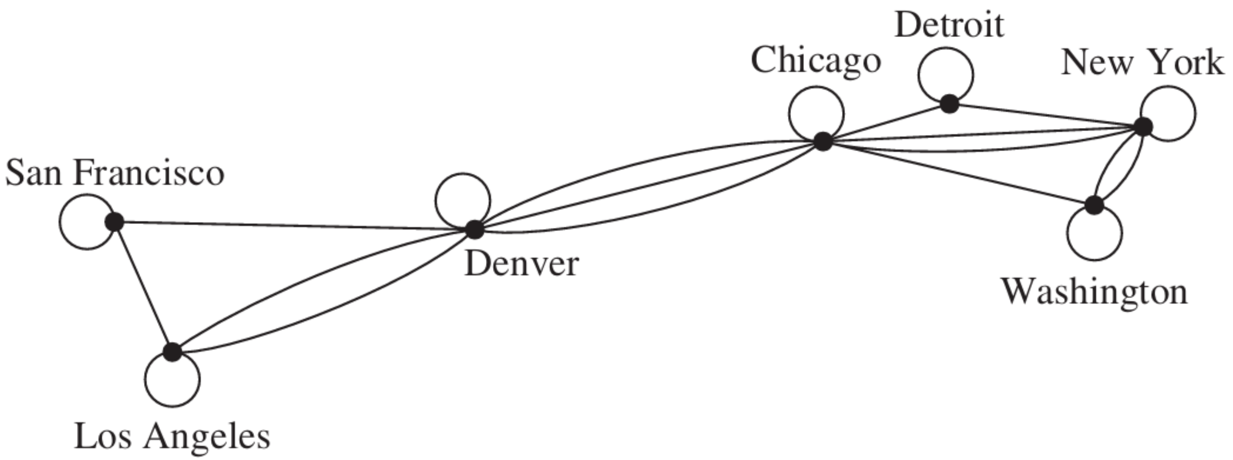


مثال۲) گراف $G=(V,E)$ را رسم کنید.

$$V=\{a,b,c,d\}$$

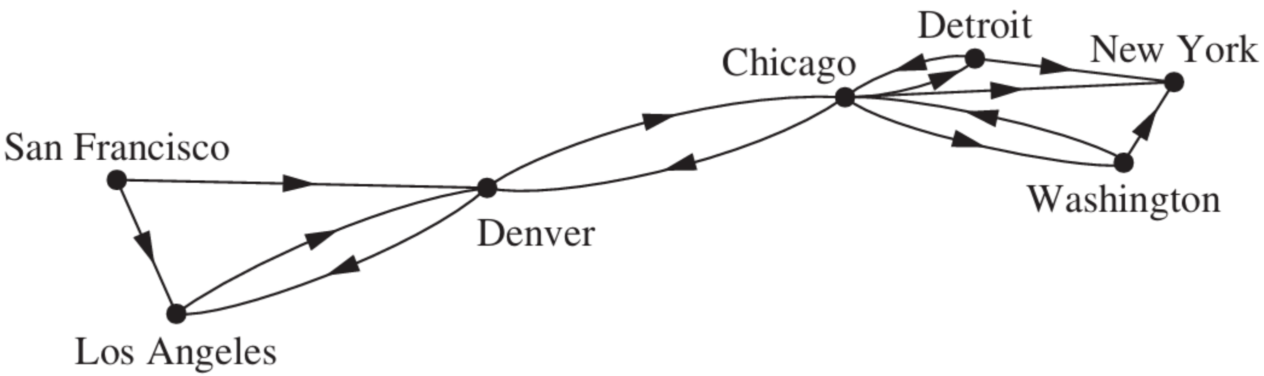
$$E=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{a,d\},\{b,d\}\}=\{ab,bc,cd,ad,bd\}$$

❖ **طوقه** : یالی که **تنها یک** رأس دارد را طوقه یا حلقه (Loop) میگویند.



❖ **گراف تهی** : گرافی که یال ندارد را گراف تهی گویند، گراف تهی را با N_P نمایش میدهند.

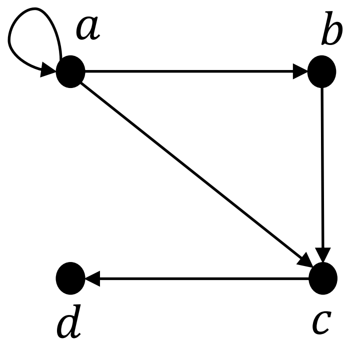
❖ **گراف جهت دار** $(Directed\ Graph)$: اگر فرض کنیم که V یک مجموعهء متناهی و ناتهی باشد و $E \subseteq V \times V$ در اینصورت گراف $D = (V,E)$ را یک گراف جهت دار میگویند.



مثال۳) گراف $D=(V,E)$ را رسم کنید.

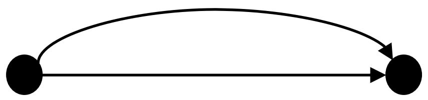
$$V=\{a,b,c,d\}$$

$$E=\{(a,b),(b,c),(c,d),(a,c),(a,a)\}$$

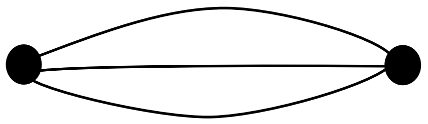


❖ **یال های موازی(چندگانه)** : هرگاه بین دو رأس یک گراف بیش از یک یال وجود داشته باشد آن یال ها را موازی گویند در گراف جهت دار یال های بین دو رأس را موازی نامند هرگاه یال ها هم جهت باشند.

❖ **گراف چندگانه** : به گرافی که در آن یال های موازی وجود دارد گراف چندگانه گویند.

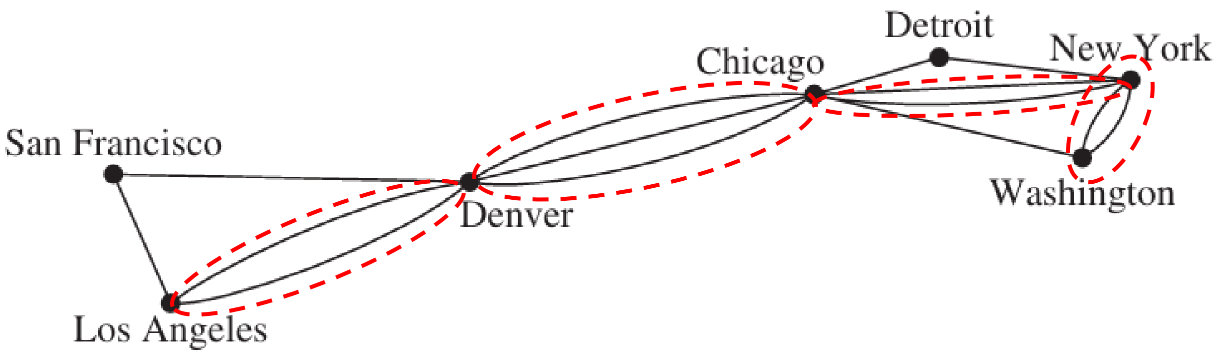


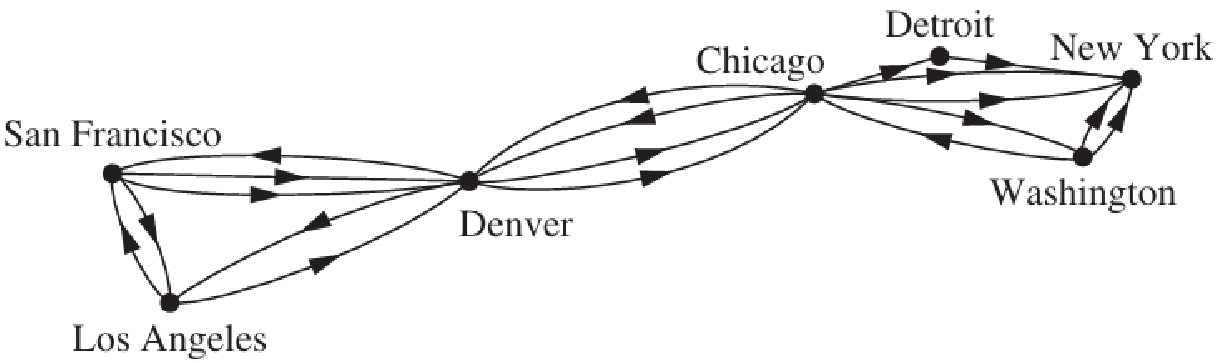
گراف جهت دار با دو یال موازی



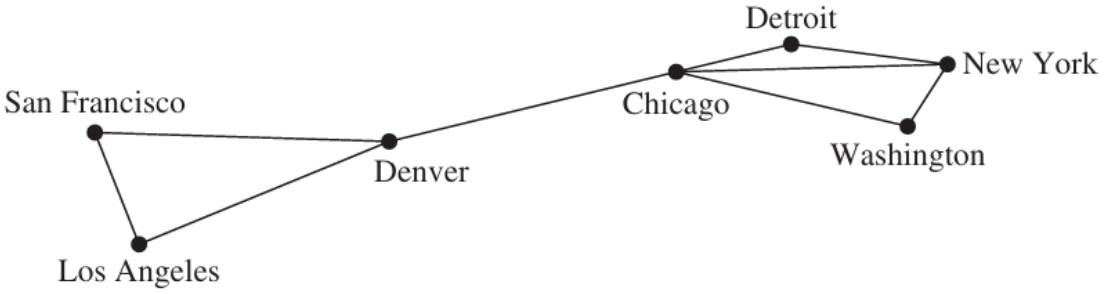
گراف با سه یال موازی

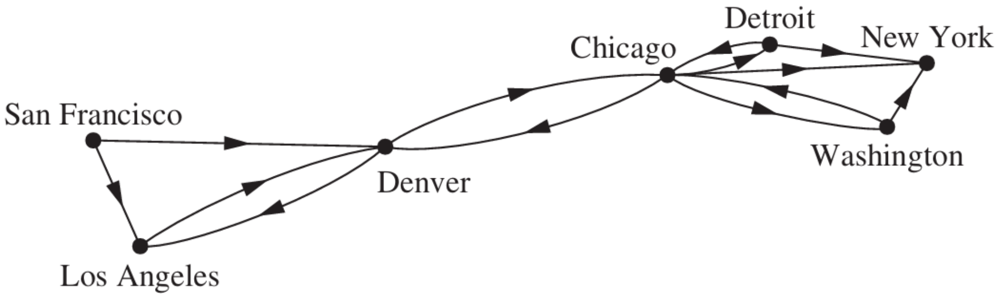
مثال۴) در گراف های چندگانه زیر دور یال های موازی با همدیگر خط بکشید.



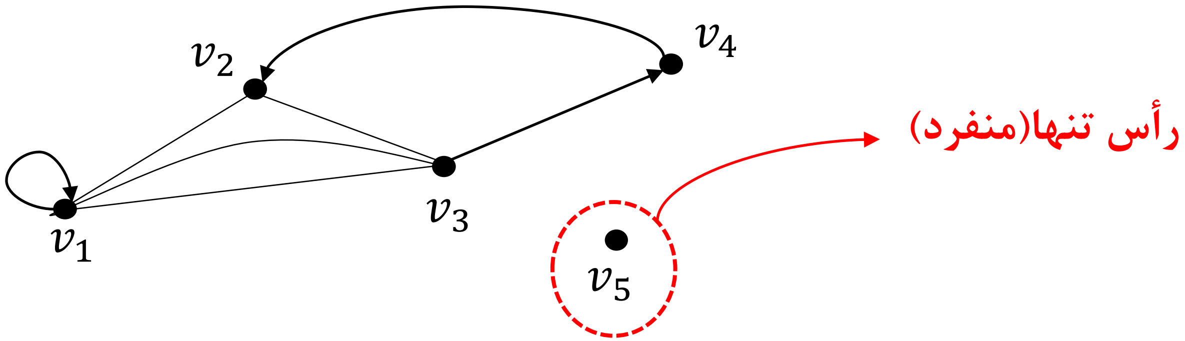


❖ **گراف ساده** : گراف فاقد یال موازی و طوقه را گراف ساده می نامند، گراف ساده جهت دار به طور مشابه تعریف میشود.





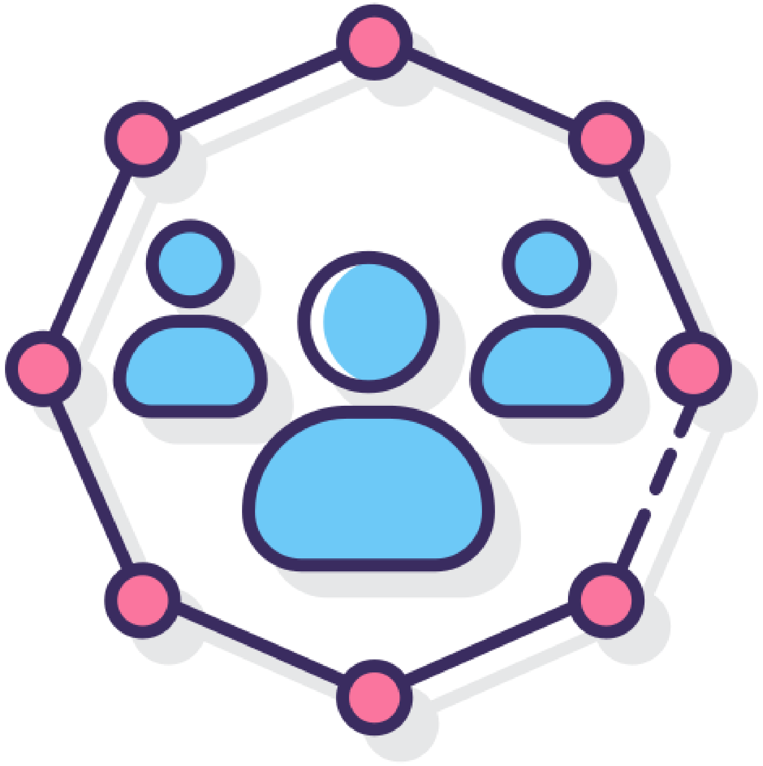
❖ **گراف مختلط** (Mixed graph): به گرافی که هم دارای یال جهت دار و بدون جهت باشد گویند



Tolpam Academy

فهرست مطالب

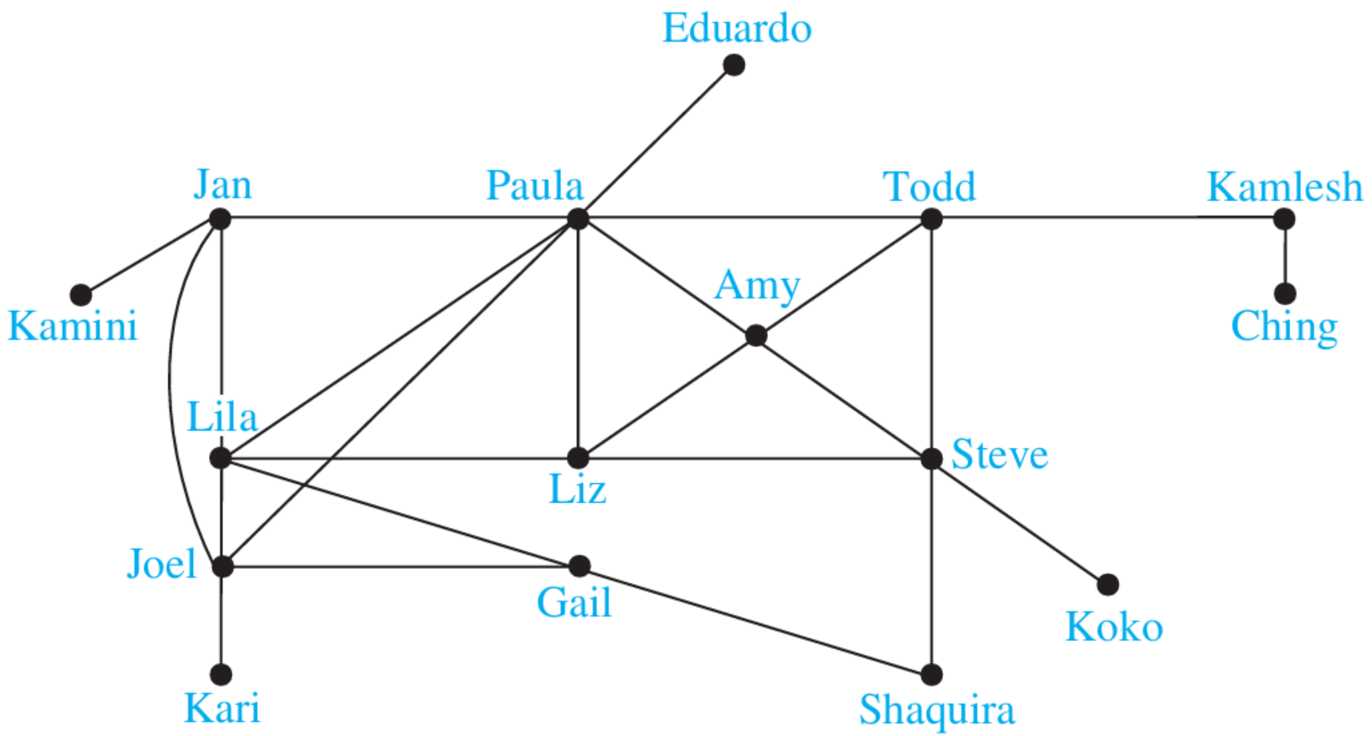
- **قسمت دوم**



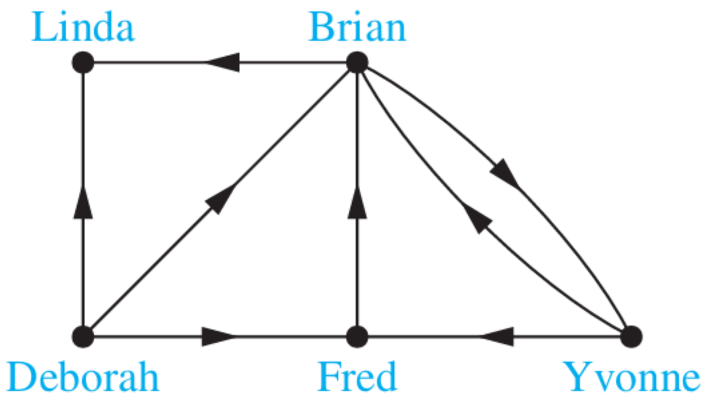
۱. انواع مدل های گراف از نظر کاربرد عملی

❑انواع مدل های گراف (Graph Models)

- **شبکه های اجتماعی** : مدل سازی ساختارهای اجتماعی مبتنی بر روابط بین مردم و گروه های از کاربران.

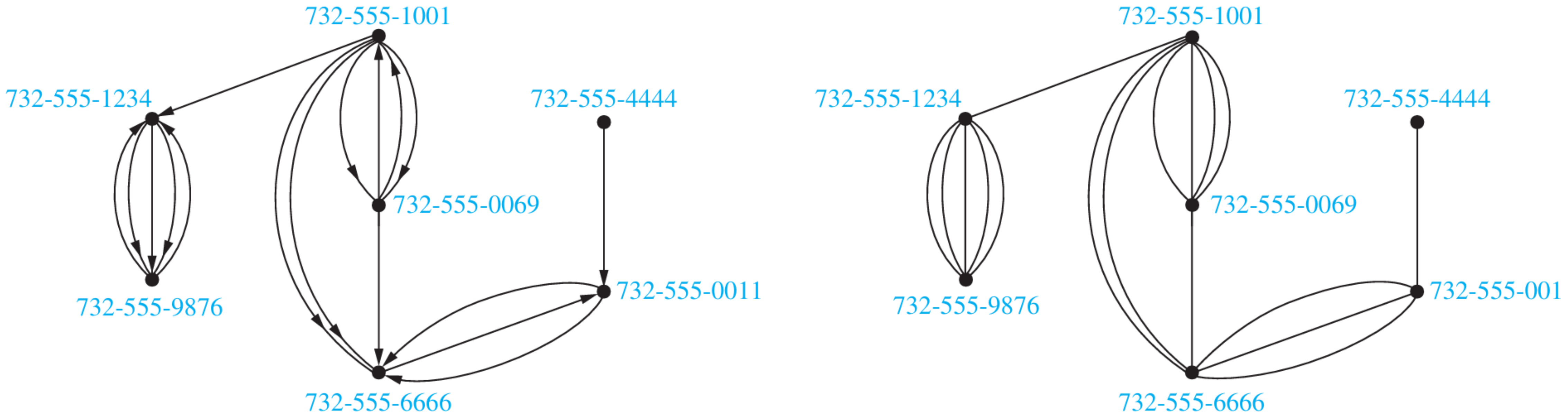


گراف آشنایی

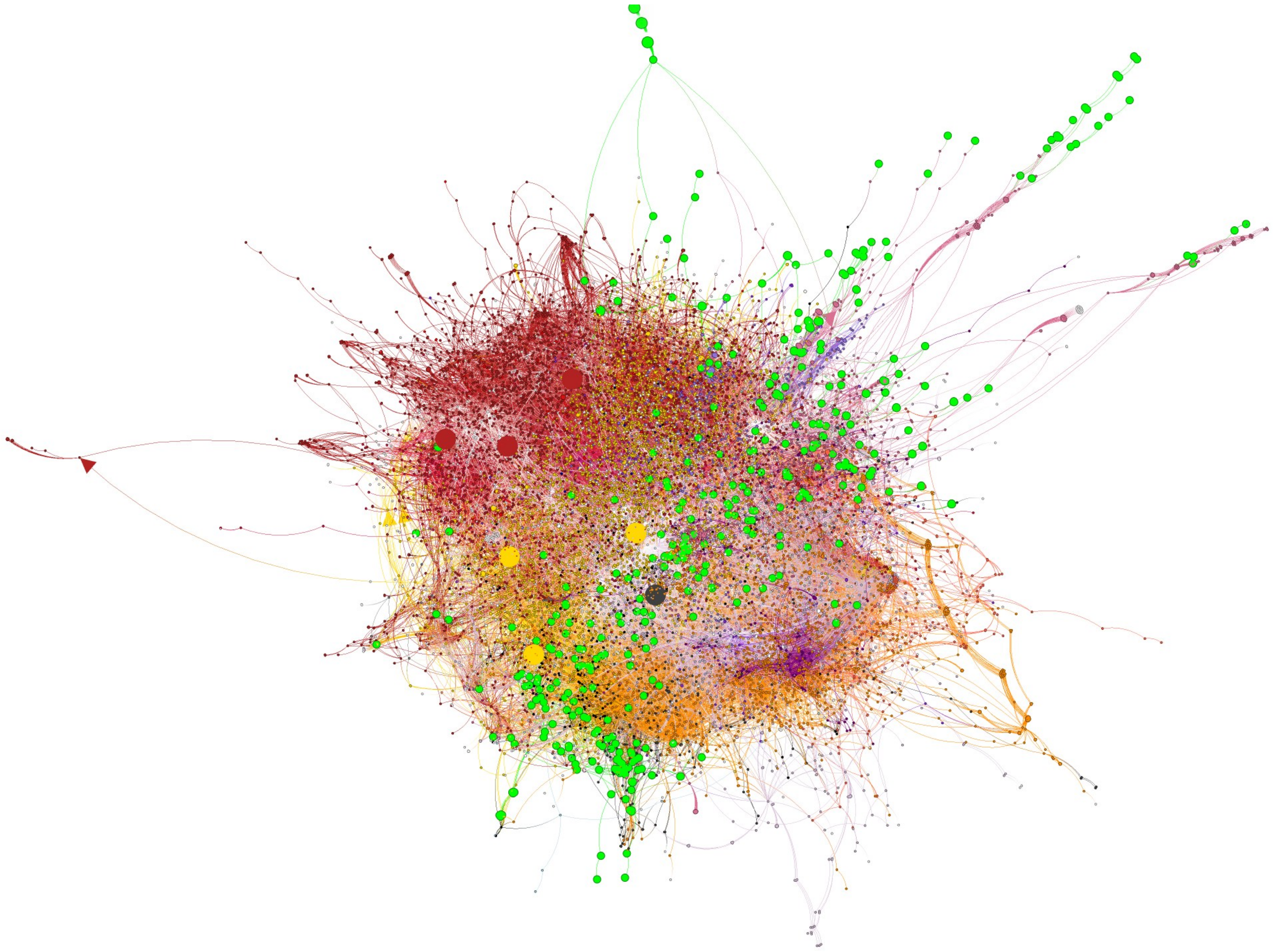


گراف نفوذ

- **شبکه ارتباطاتی**: برای مدل سازی ابزار ها و روش ها و نوع های خاصی از اتصالات ارتباطاتی مورد نظر در شبکه های ارتباطاتی مختلف.

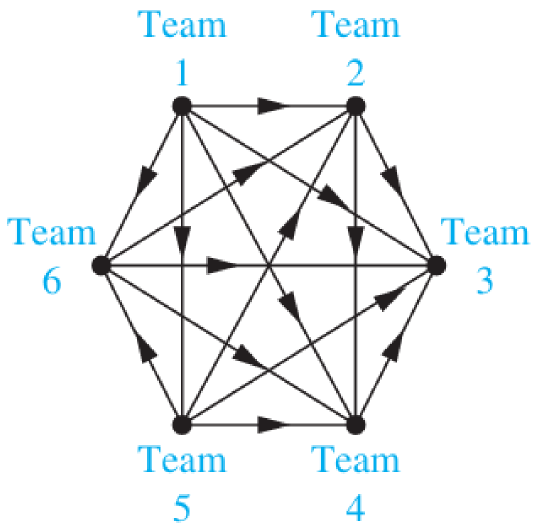


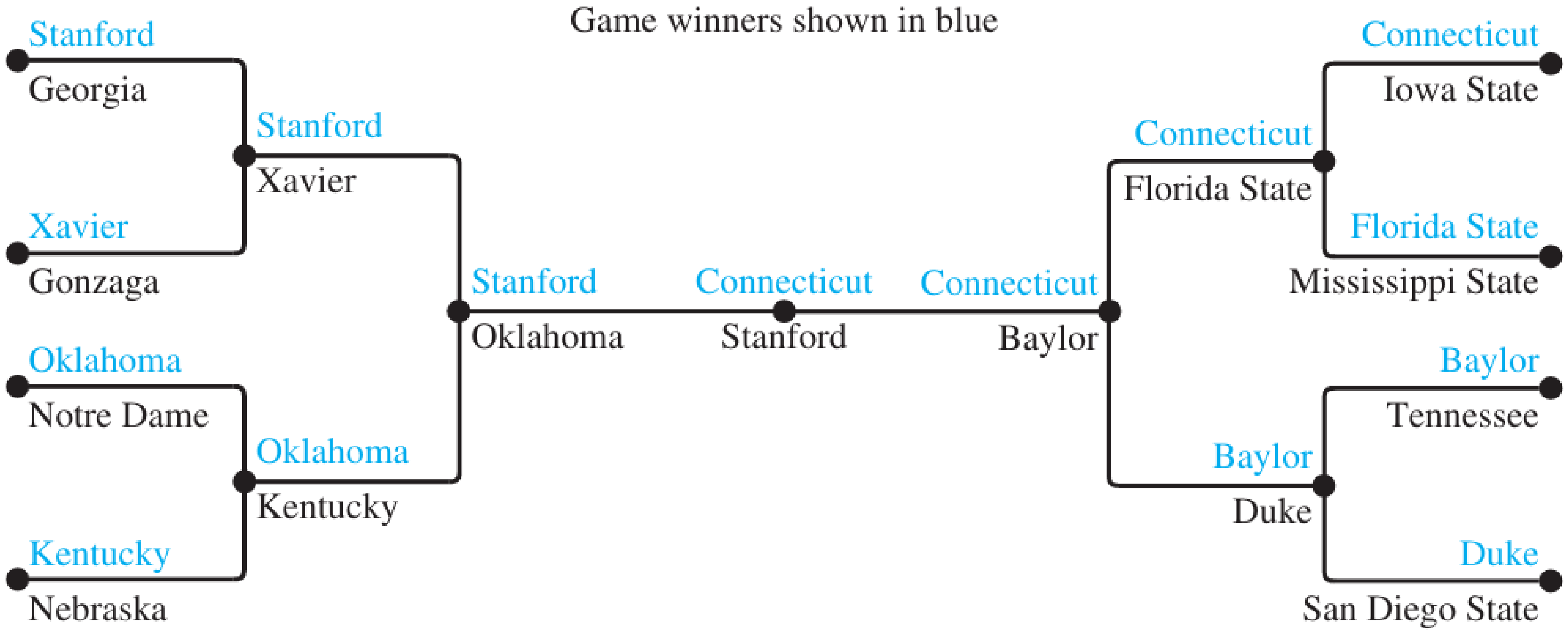
شبکه تلفن



نمونه ای از یک ابر گراف

• گراف در مسابقات





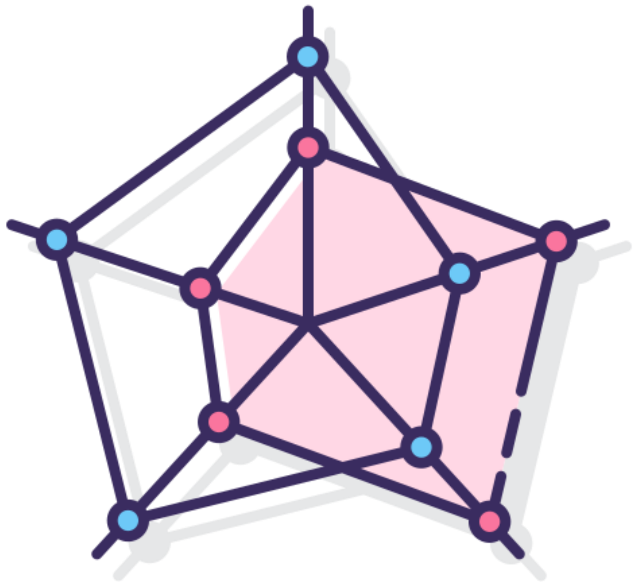
Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت سوم**

۱. اصطلاحات اساسی در گراف (Basic Terminology)

- رئوس مجاور
- مرتبه و اندازه گراف
- درجه
- رأس تنها



❑اصطلاحات اساسی در گراف (Basic Terminology)

- **رئوس مجاور:** در گراف $G = (V,E)$، دو رأس u و v را مجــاور گویند هرگاه u و v **دو سر یک یال** در گراف G باشند.

- **مرتبه و اندازه گراف:** تعداد رئوس یک گراف مرتبه گراف و تعداد یال های گراف را اندازه گراف گویند که به ترتیب با حرف n و m نمایش میدهند.

$$|E| = m ,|V| = n$$

- **درجه رأس:** تعداد k یال های متصل به رأس v را درجه رأس v گویند و به شکـــل زیر نمایش میدهند:

$$deg(v) = k \quad \text{و} \quad k = 0,1,2,\ldots$$

توجه: درجه رأسی که دارای یال طوقه باشد استثنا است و **۲ واحد در درجه رأس** محاسبه میکنیم.

- **قضیه۱** : در یک **گراف ساده بدون جهت** تعداد یال ها در قضیه زیر صدق میکند:

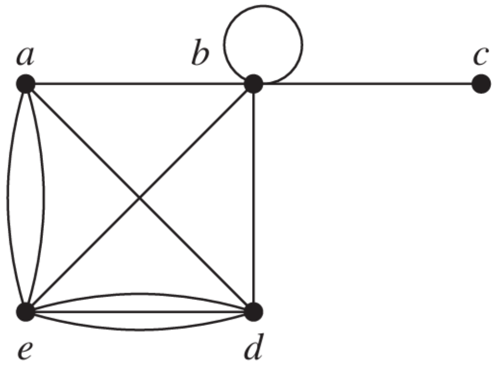
$$0 \leq m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- **رأس تنها (منفرد)**: رأسی که **درجه آن صفر** باشد، رأس تنها یا منفرد نامیده میشود.

مثال۵) در یک گراف ساده بدون جهت با ۴۲ رأس حداکثر تعداد یال های که ممکن چقدر است؟

$$m = \binom{42}{2} = \frac{42 \times 41}{2} = 861$$

مثال۶) در گراف های زیر: الف) درجه همه رئوس را بدست آورید ، ب) رئوس مجاور رأس a را بدست آورید.



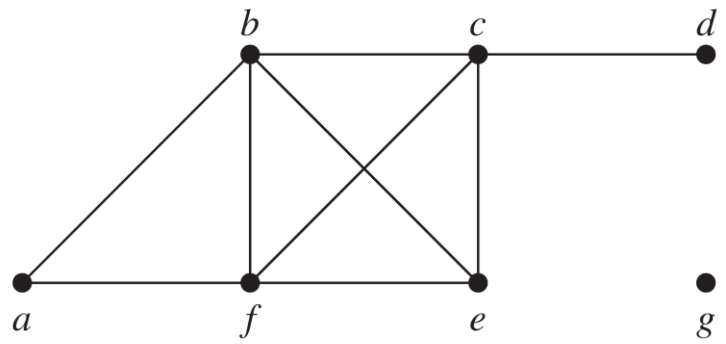
الف)

$\deg(a) = 4, \deg(b) = 6\ \deg(e) = 6$

$\deg(c) = 1, \deg(d) = 5$

ب)

$\{b,e,d\}$



الف)

ب)

- **قضیه۲** : اگر فرض کنیم که $G = (V,E)$ یک گراف بی جهت با m یال باشد در اینصورت:

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

(توجه کنید که این قضیه حتی اگر یال های موازی و طوقه هم داشته باشیم برقرار است.)

مثال۷) در یک گراف ۱۰ رأسی با دنبالهء درجه های ۶،۶،۵،۳،۴،۴،۴،۲،۲،۰ تعداد یال ها را پیدا کنید .

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = 6 + 6 + 3 + 5 + 0 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 = 36$$

$$m = \frac{36}{2} = 18$$

Tolpam Academy

- **قضیه۳ :** در هر گراف بی جهت، تعداد رأس های با درجه فرد **عددی زوج** است.

- **اثبات قضیه بالا**:

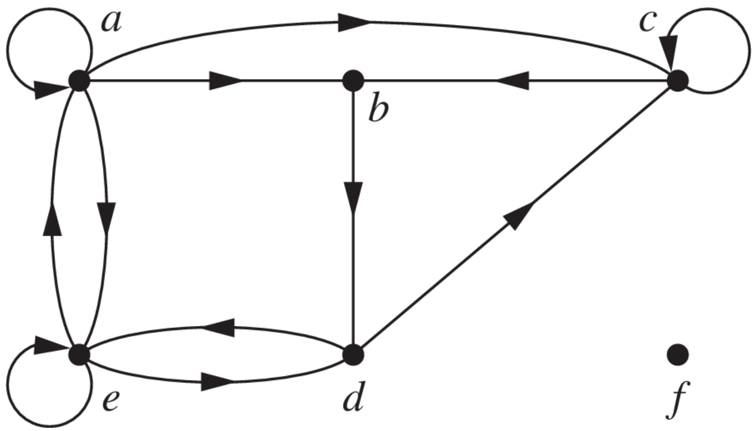
فرض کنیم که V_1 و V_2 به ترتیب مجموعه رئوس با درجه زوج و فرد در گراف بی جهت $G = (V,E)$ دارای m یال باشد د اینصورت با استفاده از قضیه ۲:

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

- چون $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ زوج است، **باید جمله بعدی**$\left(\sum_{v \in V_2} \deg(v)\right)$ **هم زوج باشد**.
- در اینصورت باید تعداد رأس های با درجه فرد عددی زوج باشد.

- در یک **گراف جهتدار** تعداد یال های ورودی به رأس v را با عنوان **درجه ورودی** و به شکل $\deg^-(v)$ نمایش میدهند و تعداد یال های خروجی را با عنوان **درجه خروجی** به شکل $\deg^+(v)$ نمایش مدهند

مثال۸) درجه ورودی و درجه خروجی گراف زیر را با یال های جهتدار هر رأس بیابید.



$$\deg-(a)=2, \deg-(b)=2, \deg-(c)=3,$$
$$\deg-(d)=2, \deg-(e)=3, \deg-(f)=0$$

$$\deg+(a)=4\,, \deg+(b)=1\,, \deg+(c)=2$$
$$\deg+(d)=2\,, \deg+(e)=3\,, \deg+(f)=0$$

Tolpam Academy

- **قضیه۴** : فرض کنیم که $G=(V,E)$ یک گراف جهتدار باشد در این صورت گزاره زیر صادق خواهد بود:

$$\sum_{v\in V}\deg^{-}(v)=\sum_{v\in V}\deg^{+}(v)=|E|=m$$

(یعنی مجموع درجه های خروجی یا ورودی و همینطور با تعداد یال های جهتدار **برابر** است.)

- اثبات قضیه بالا:

در گراف های جهت دار هر یال از یک رأس خارج و به رأسی دیگر وارد میشود بنابراین مجموع درجه های خروجی با مجموع درجه های ورودی همیشه برابر خواهد بود.

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت چهارم**

۱. رأس ماکزیمم و مینیمم

۲. چند گراف ساده خاص:

کامل (Complete Graph)

حلقوی یا دور (Cycle)

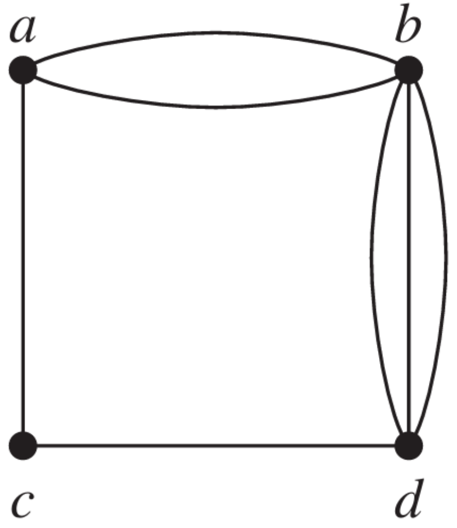
چرخی(Wheel)

n_مکعب (n-Cube)

- **رأس ماکزیمم**: <u>بزرگترین درجه</u> در بین درجه رئوس گراف $G = (V,E)$ را ماکزیمم درجه گویند و با $\Delta(G)$ نمایش میدهند.

- **رأس مینیمم**: <u>کوچکترین درجه</u> در بین درجه رئوس گراف $G = (V,E)$ را مینیمم درجه گویند و با $\delta(G)$ نمایش میدهند.

مثال۹) در گراف $G = (V,E)$ زیر ماکزیمم درجه و مینیمم درجه را مشخص نمایید.



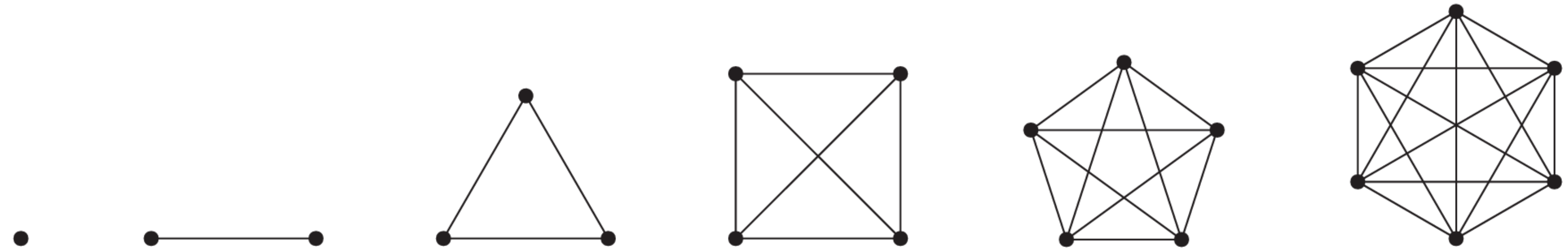
$$\deg(a) = 3, \deg(b) = 5$$
$$\deg(c) = 2, \deg(d) = 4$$

$$\Delta(G) = 5$$
$$\delta(G) = 2$$

Tolpam Academy

❑ چند نوع گراف ساده خاص

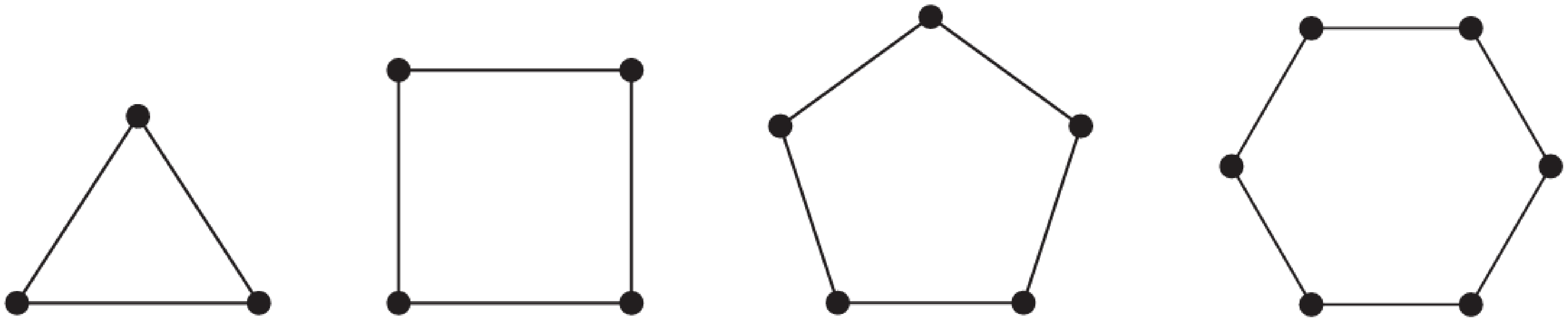
- **گراف کامل**(Complete Graph) : گراف ساده G را کامل گویند هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن دقیقا یک یال موجود باشد و آن را با K_n نمایش میدهند.
(به عبارتی در گراف کامل هر رأس دارای درجهء $n-1$ است.)



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

- **گراف دور**(Cycle Graph): گرافی با $n \geq 3$ که دقیقا یک دور دارد و همهء رأس ها روی همان دور هستند و آن را با C_n نمایش میدهند

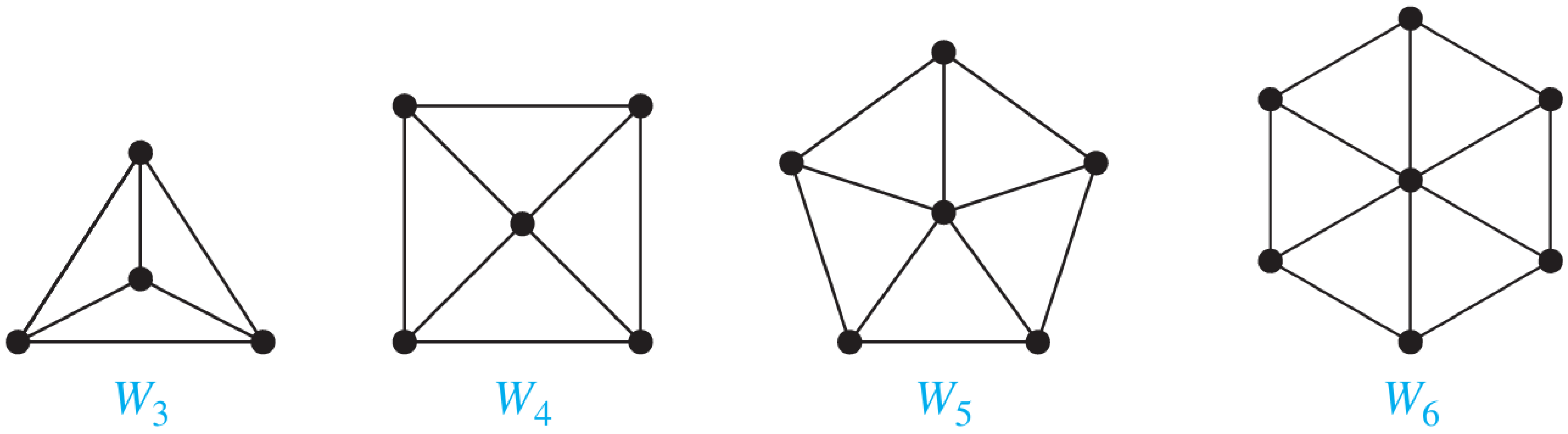
(به عبارتی درجه همه رأس ها در این گراف 2 است.)



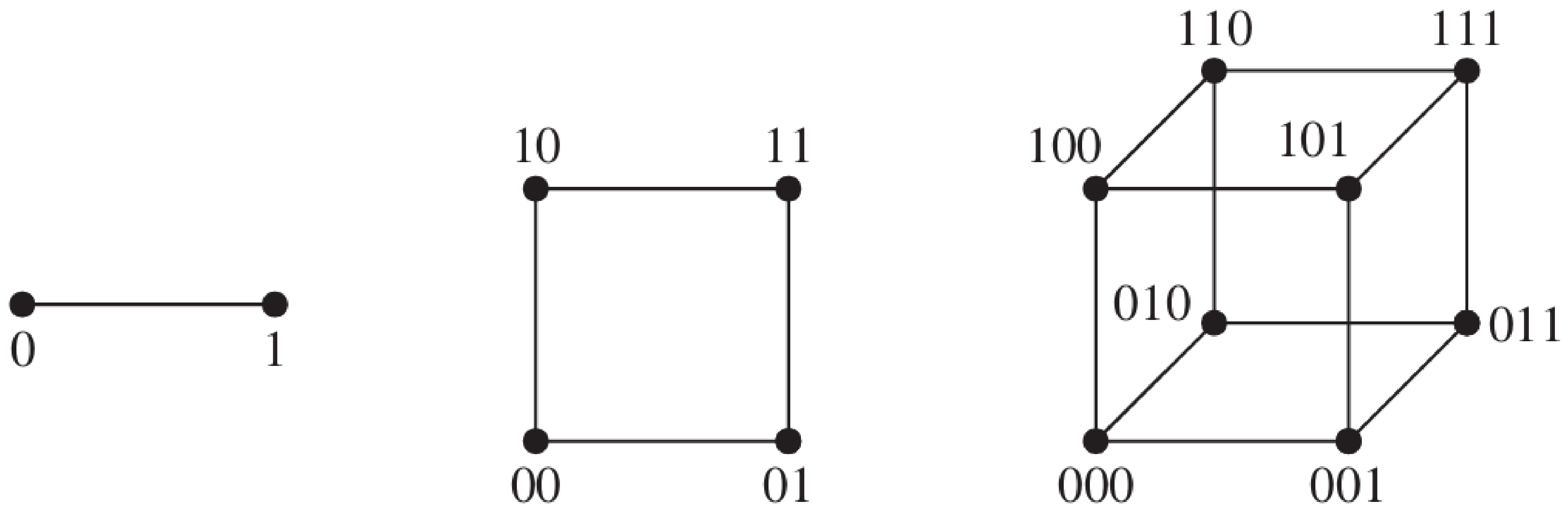
C_3 C_4 C_5 C_6

Tolpam Academy

- **گراف چرخ** (Wheel Graph): گرافی با $n \geq 3$ که همان گراف دور است که یک رأس به آن اضافه کرده و از آن را به هر n رأس در گراف C_n ، یال داریم و با W_n نمایش میدهیم.
(به عبارتی درجه همه رأس ها بجز رأس وسط 3 است و درجه راس وسط n .)

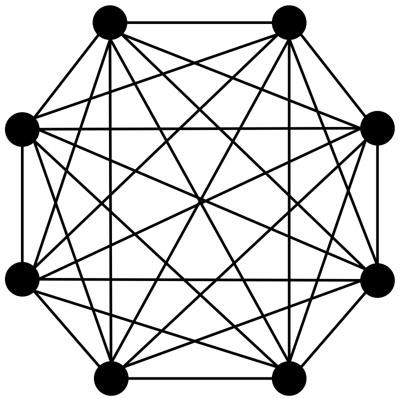


- گرافn_مکعب$(\mathrm{n}-\mathrm{Cube})$: گرافی است که رئوس آن نشان دهنده 2^n رشته بیتی به طول n است دو رأس در این گراف فقط در صورتی مجاور هستند که تنها در یک بیت اختلاف داشته باشند.



Q_1 Q_2 Q_3

مثال۱۰) گراف K_8 را رسم کنید و تعداد یال های آن را بدست آورید.



$$m = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

مثال۱۱) اگرگراف K_n از K_{n-2} ، ۱۳ یال بیشتر داشته باشد مقدار n را بدست آورید.

- K_n: $\quad m_1 = \frac{n(n-1)}{2}$
- K_{n-2}: $\quad m_2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$

$$m_1 - m_2 = 13$$

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = 13$$

$$\frac{n^2-n-(n^2-5n+6)}{2} \to 4n = 32 \to n = 8$$

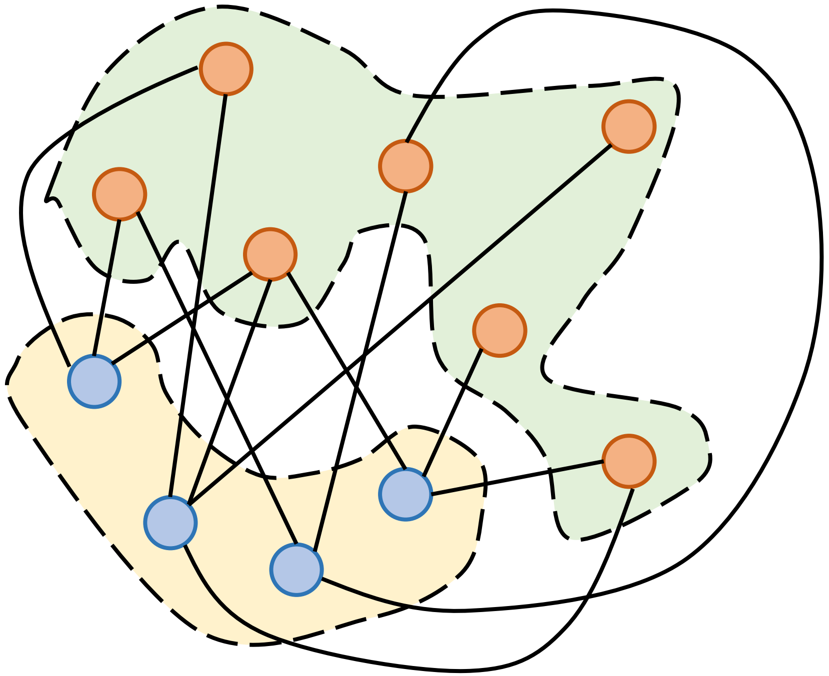
Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت پنجم**

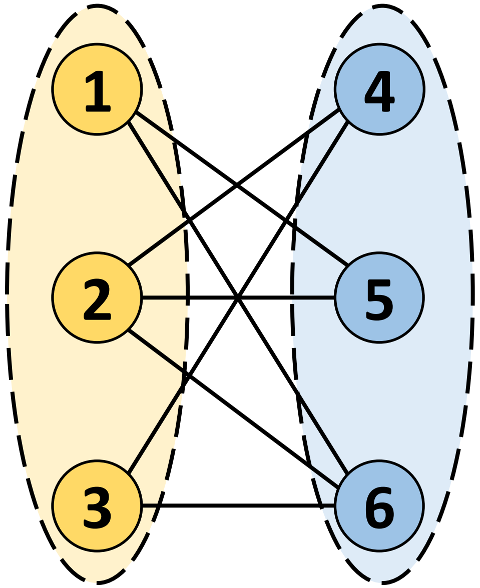
۱. گراف های دوبخشی (Bipartite Graphs)

۲. گراف های دوبخشی کامل (Complete Bipartite Graphs)



❑ گراف های دوبخشی(Bipartite Graphs)

- **گراف دوبخشی**: گرافی که بتوان مجموعه رئوس آن را به دو زیرمجموعه V_1 و V_2 افراز نمود به گونه ای که هر یال این گراف یک رأس آن در مجموعه V_1 و رأس دیگرش در مجموعه V_2 باشد یک گراف دو بخشی نامیده میشود.

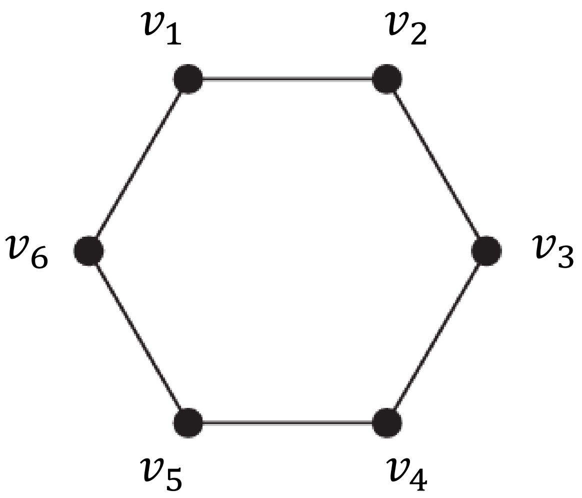


$$V = V_1 \cup V_2 \quad , V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

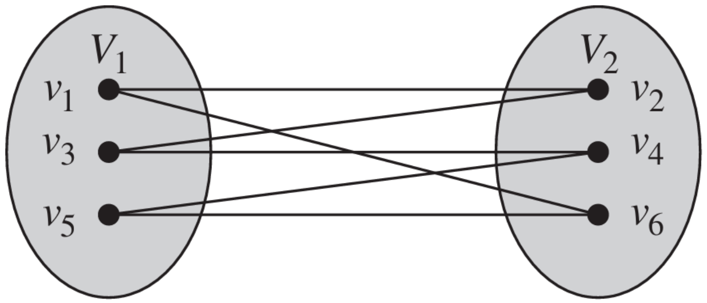
$$uv \in E \rightarrow u \in V_1 \, , v \in V_2$$

$$V_1 = \{1,2,3\}$$
$$V_2 = \{4,5,6\}$$

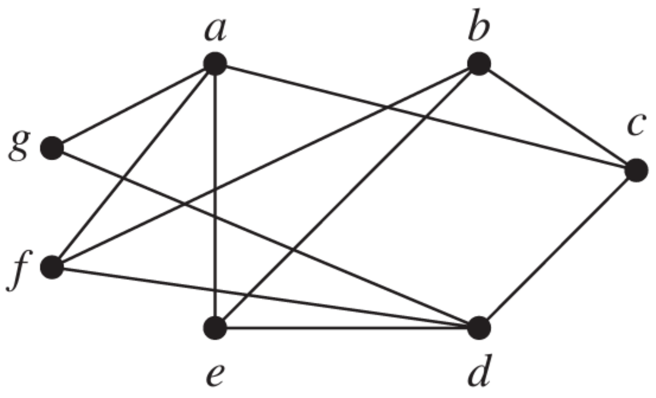
مثال۱۲) نشان دهید که گراف C_6 یک گراف دوبخشی است.



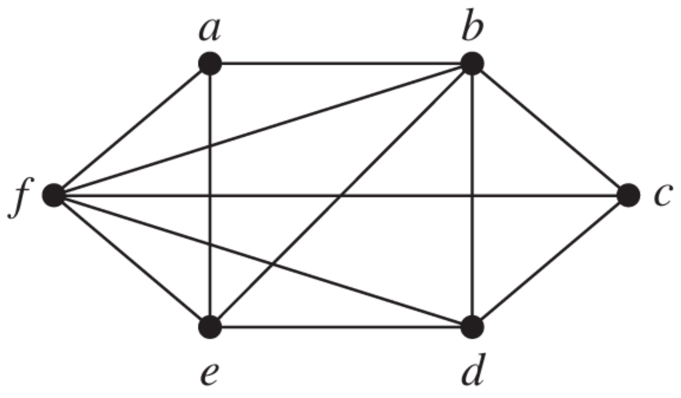
$$V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$$
$$V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$$



مثال۱۳) آیا گراف های G و H دوبخشی هستند یا خیر نشان دهید.



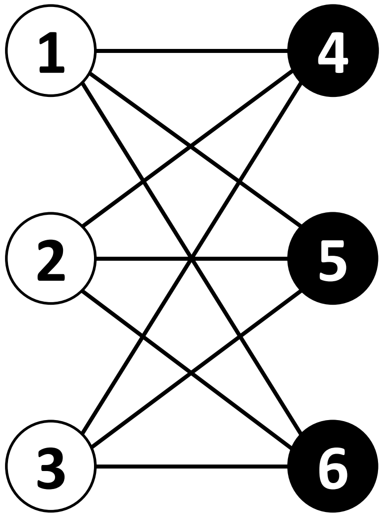
$$V_1 = \{a, b, d\}$$
$$V_2 = \{c, e, f, g\}$$

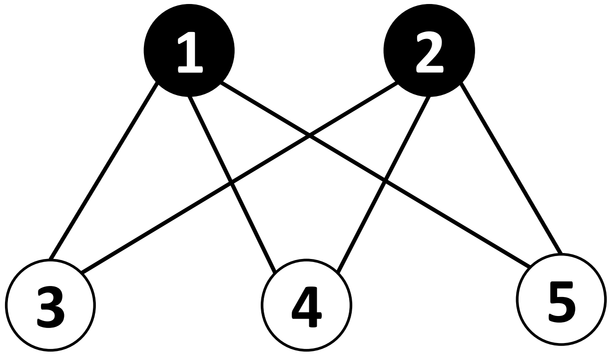


- **این گراف دوبخشی نیست.**

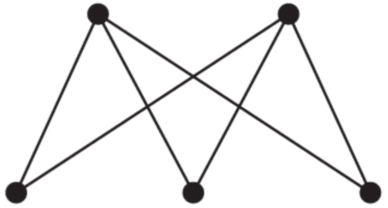
- **قضیه ۵** : یک گراف ساده دوبخشی است اگر و فقط اگر بتوان به هر رأس آن یکی از دو رنگ مختلف را طوری منتسب کرد که **هیچ دو رأس مجاوری هم رنگ نباشند**.

- اثبات: اگر فرض کنیم که هر کدام از دو رنگ رئوس در گراف نشان دهنده عضویت در مجموعه های V_1 و V_2 هستند این قضیه اثبات میشود.

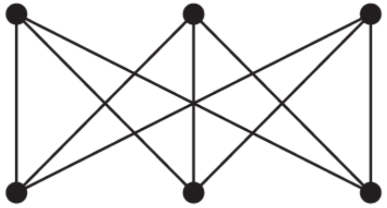




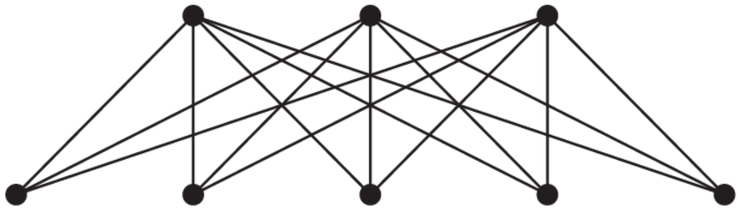
- **گراف های دوبخشی کامل** (Complete Bipartite Graphs): در یک گراف دوبخشی هرگاه هر رأس در V_1 با هر رأس در V_2 مجاور باشد یک گراف دوبخشی کامل است. اگر V_1 شامل m رأس و V_2 شامل n رأس باشد گراف دوبخشی کامل را با $K_{m,n}$ نمایش میدهیم.



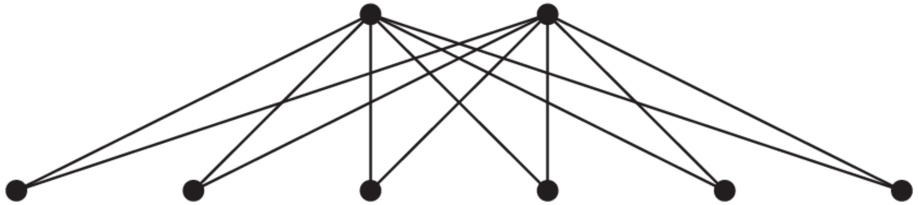
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$

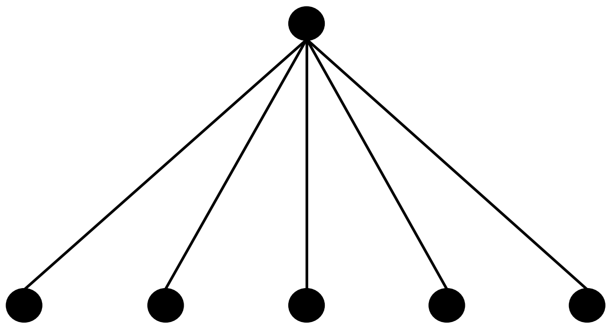


$K_{3,5}$

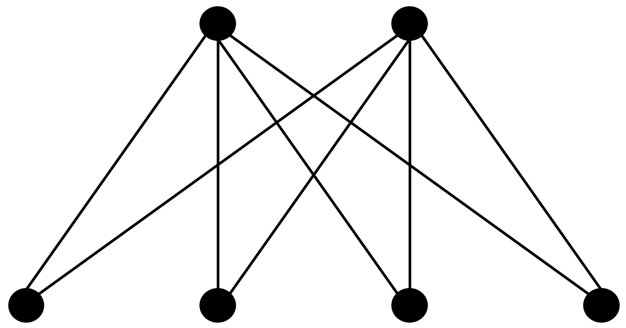


$K_{2,6}$

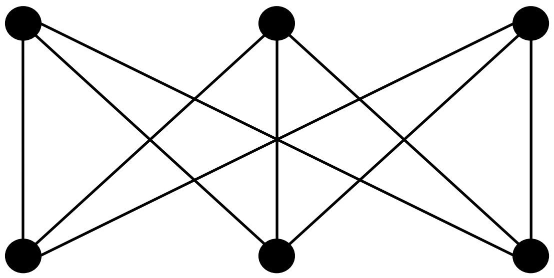
مثال۱۴) گراف های دوبخشی کامل و متفاوت $G = (V,E)$ با $6 = |V|$ را بیابید .



$K_{1,5}$



$K_{2,4}$



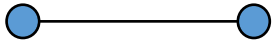
$K_{3,3}$

فهرست مطالب

- **قسمت ششم**

❖ **گراف منتظم**: گرافی که درجه همهء رأس های آن با هم **برابر** باشد گراف منتظم نامیده میشود.

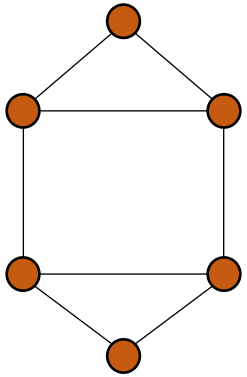
❖ **گراف r_منتظم**: گرافی که درجه همهء رأس های آن **برابر با** r $(r \geq 0)$ باشد گراف r_منتظم از مرتبهء n نامیده میشود.



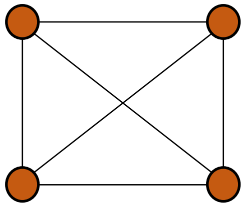
1_منتظم مرتبهء2

0_منتظم مرتبهء2

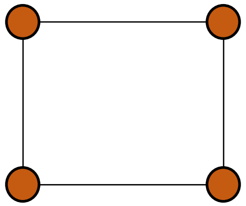
0_منتظم مرتبهء1



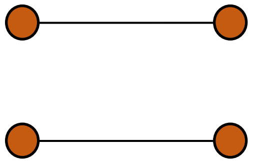
3_منتظم مرتبهء6



3_منتظم مرتبهء4

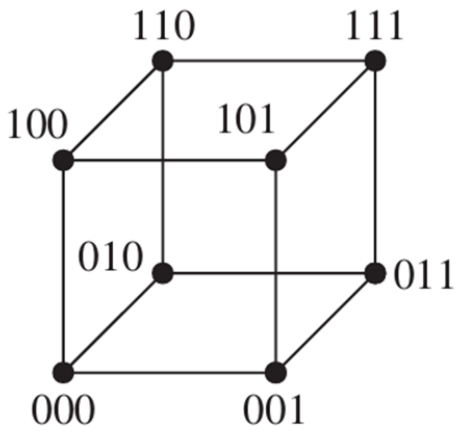


2_منتظم مرتبهء4

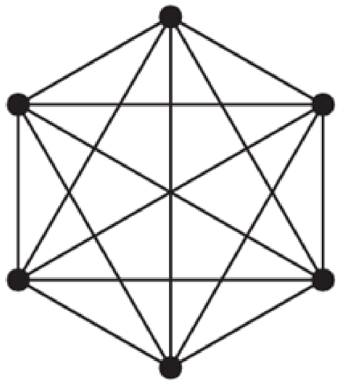


1_منتظم مرتبهء4

- **نکته۱** : گراف کامل K_n یک گراف $(n-1)$_منتظم است. (یعنی گراف کامل یک گراف منتظم است.)
- **نکته۲** : گراف دور C_n یک گراف 2_منتظم است.
- **نکته۳** : گراف n_مکعب هم یک گراف n_منتظم از مرتبه‌ء 2^n.

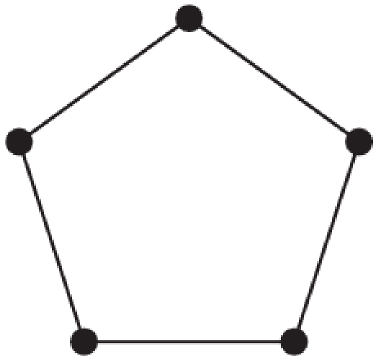


3_منتظم مرتبه‌ء8



K_6

5_منتظم مرتبه‌ء6



C_5

2_منتظم مرتبه‌ء5

مثال۱۵) در یک گراف ۴_منتظم داریم $m = 3n - 8$. مرتبه و اندازه این گراف را بدست آورید و گراف را رسم کنید.

یادآوری:

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

- تعمیم یادآوری برای گراف منتظم:

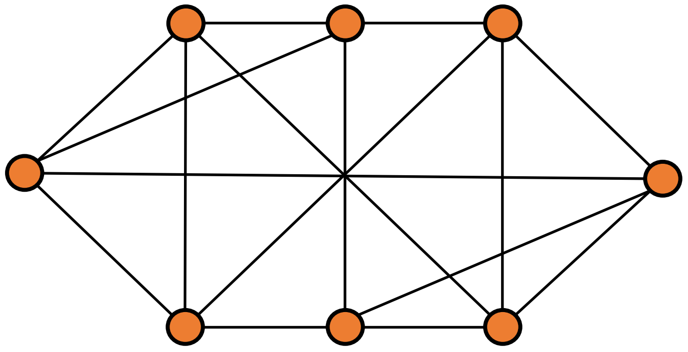
$$2m = 4n$$

$$m = 2n$$

$$m = 3n - 8 \xrightarrow{m=2n} 2n = 3n - 8$$

$$n = 8 \xrightarrow{m=2n} m = 2(8) = 16$$

$$\boxed{n = 8\,, m = 16}$$



Tolpam Academy

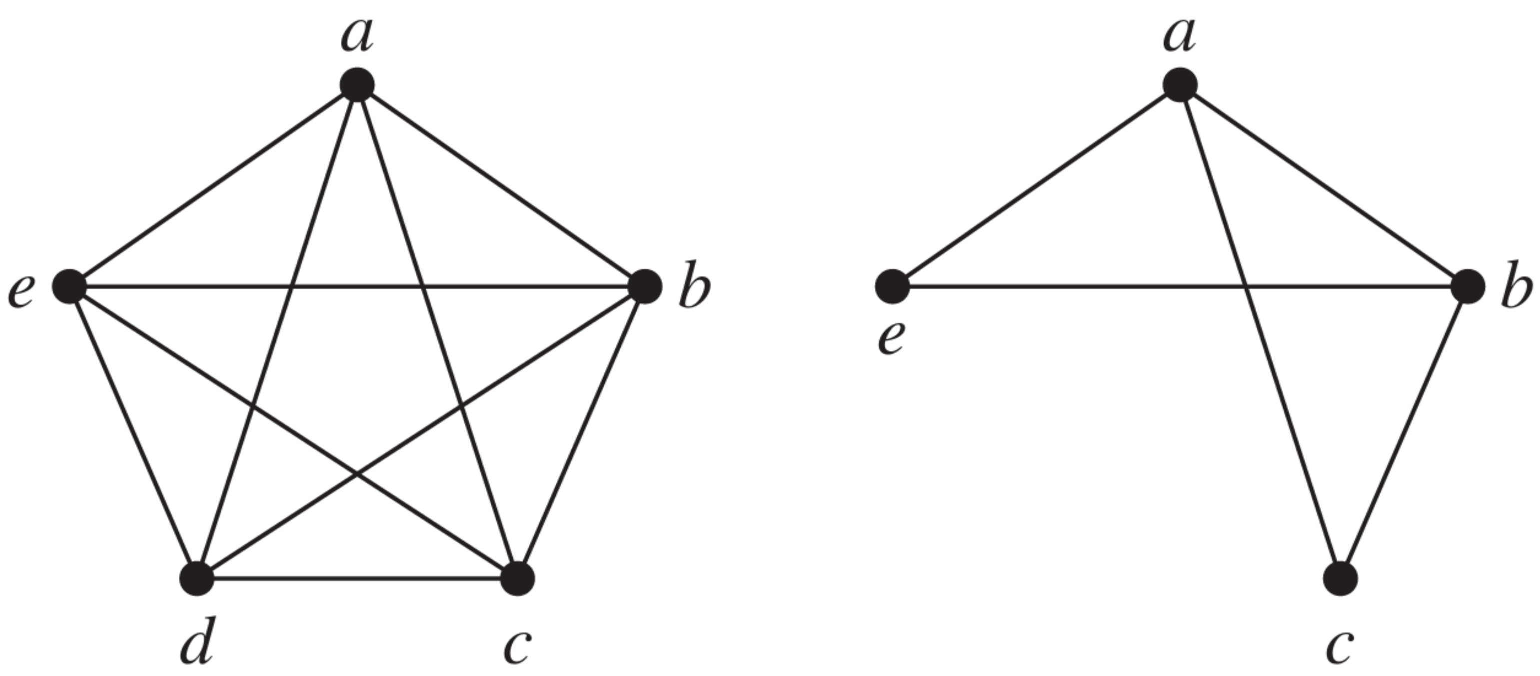
فهرست مطالب

- **قسمت هفتم**

۱. زیر گراف ها (Subgraphs)

❖ **زیرگراف**(Subgraph): یک زیرگراف برای گراف $G = (V,E)$ گراف $H = (W,F)$ است به شرطی که:

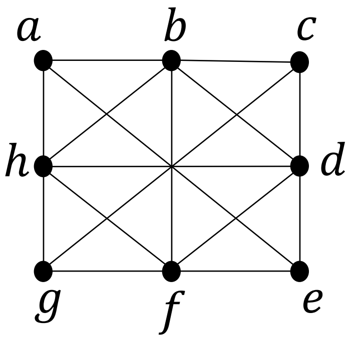
$W \subseteq V, F \subseteq E$

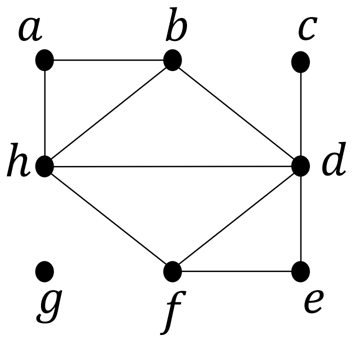


A Subgraph of K_5

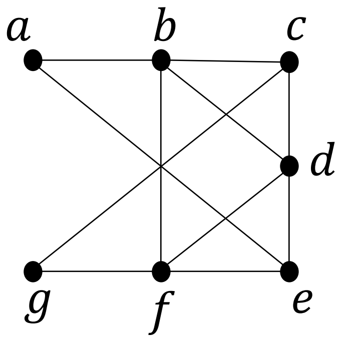
- **زیر گراف پوشا**: زیرگرافی که شامل همه رئوس گراف اصلی باشد زیرگراف پوشا یا فراگیر مینامند.
- **زیر گراف** $G-v$: زیرگرافی که از حذف رأس v و همه یال های متصل به آن بدست آید.
- **زیر گراف** $G-e$: زیرگرافی که از حذف یال e در مجموعه یال های گراف بدست آید.

مثال۱۶) در گراف زیر زیرگراف های الف) پوشا، ب) $G-h$ ، پ) $G-\{cd\ ,bf\}$ را رسم کنید.

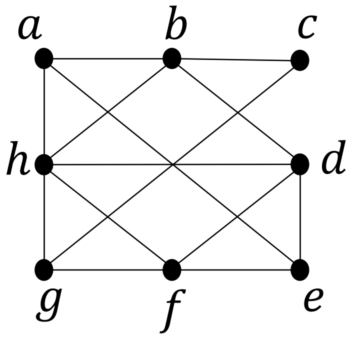




(الف)

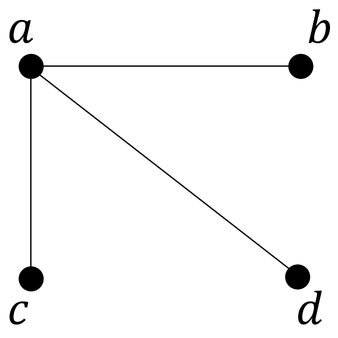


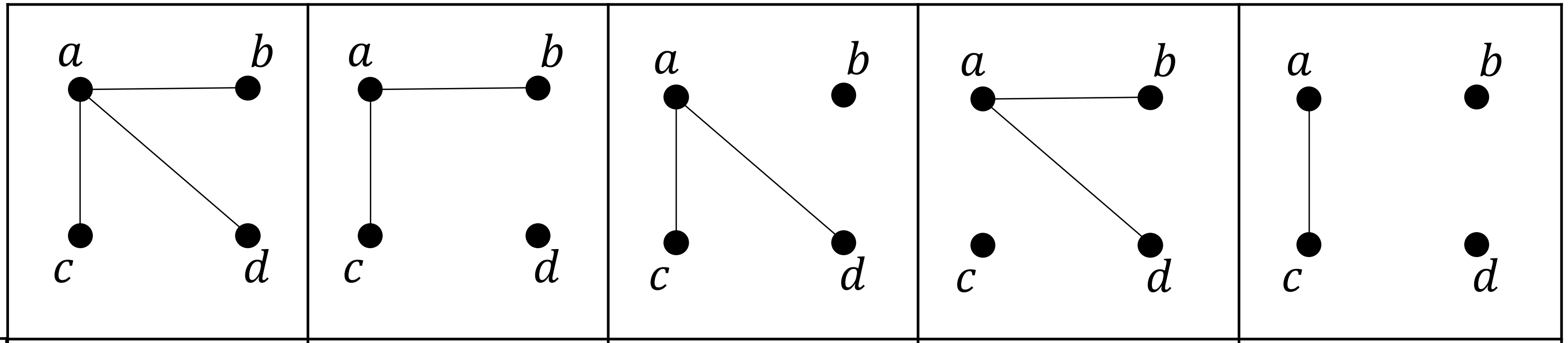
(ب)

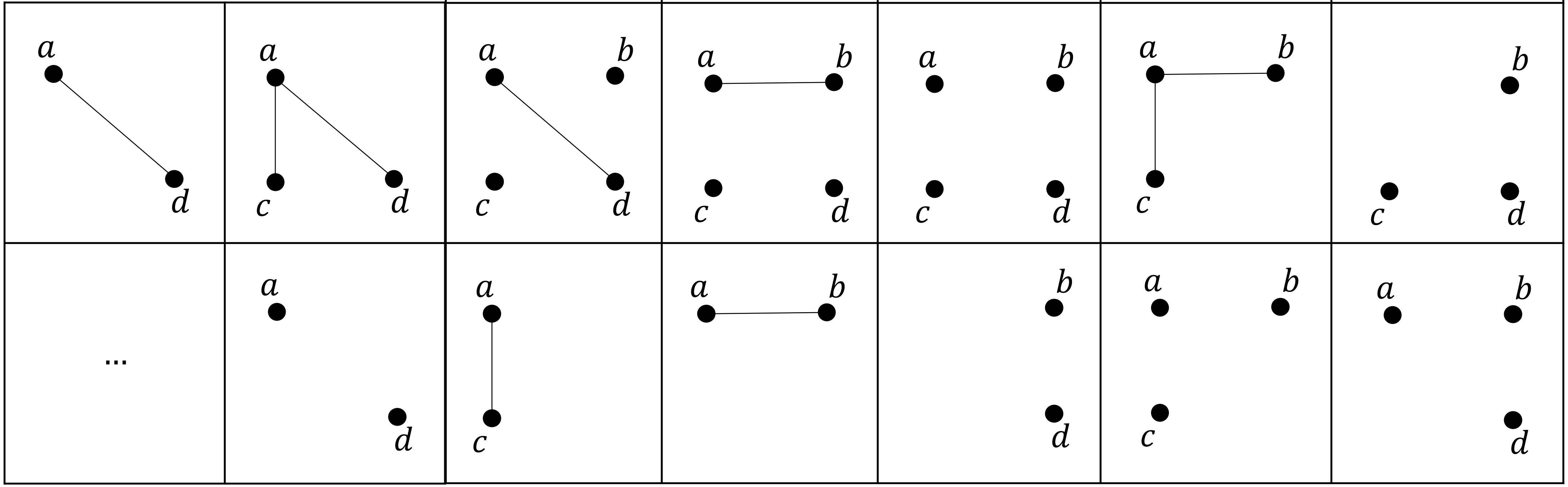


(پ)

مثال۱۷) همه زیرگراف های ممکن گراف زیر را رسم کنید.







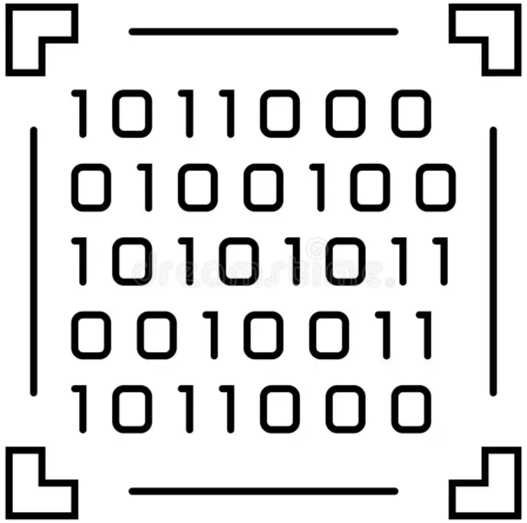
Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت هشتم**

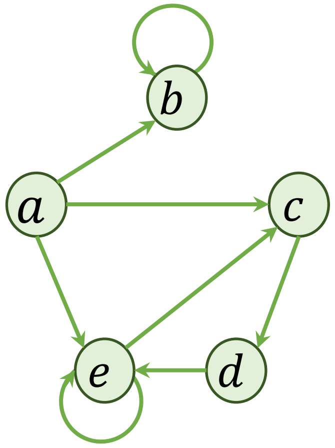
۱. نمایش گراف ها

- لیست مجاورت
- ماتریس مجاورت



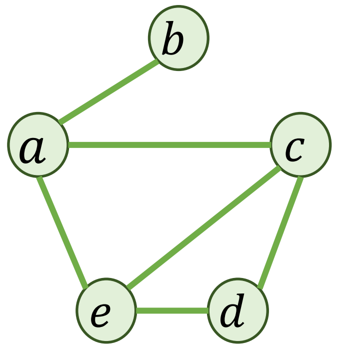
❑ نمایش گرافها (لیست مجاورت)

- **لیست مجاورت**: یک راه نمایش گرافهای بدون یال چندگانه استفاده از لیستهای مجاورت است، این لیستها رئوس مجاور به هر رأس از گراف را مشخص خواهند کرد.



$Initial\ Vertex$	$Terminal\ Vertices$
a	$b\ ,c\ ,e$
b	b
c	d
d	e
e	c,e

گراف جهت دار



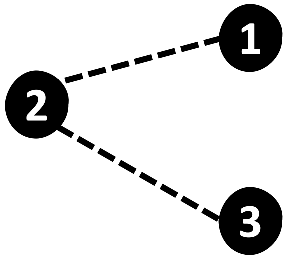
$Vertex$	$Adjacent\ Vertices$
a	$b\ ,c\ ,e$
b	a
c	$a\ ,e\ ,d$
d	$c\ ,e$
e	$a\ ,c\ ,d$

گراف بدون جهت

❑ نمایش گرافها (ماتریس مجاورت)

- **ماتریس مجاورت**: فرض کنید که گراف $G = (V,E)$ یک گراف ساده با n رأس باشد، در اینصورت ماتریس مجاورت گراف را با $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ (A_G) نمایش میدهند که در آن:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & if\ \{v_i,v_j\} \in E \\ 0 & if\ \{v_i,v_j\} \notin E \end{cases}$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

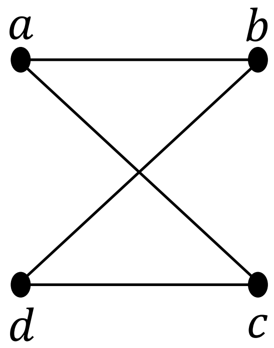
- **نکته:** ماتریس مجاورت برای گراف های با یال **طوقه** و **چندگانه** نیز بکار میرود، اما ماتریس مجاورت این گراف ها دیگر ماتریسی با درایه های صفر و یک نیست.

- در ماتریس مجاورت برای رئوس با یال طوقه درایه $a_{ii} = 1$ و برای یال های چندگانه درایه a_{ij} برابر با تعداد یال های چندگانه است

Tolpam Academy

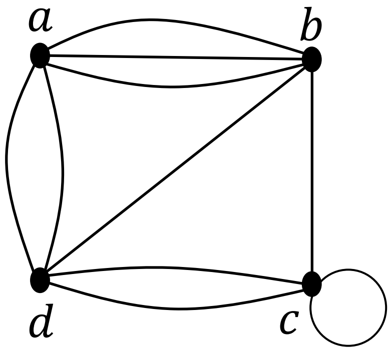
مثال۱۸) ماتریس مجاورت گراف های زیر را بدست آورید.

G_1:



$$A_{G_1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

G_2:



$$A_{G_2} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- **نکته:** ماتریس مجاورت در گراف های بدون جهت **متقارن** است.

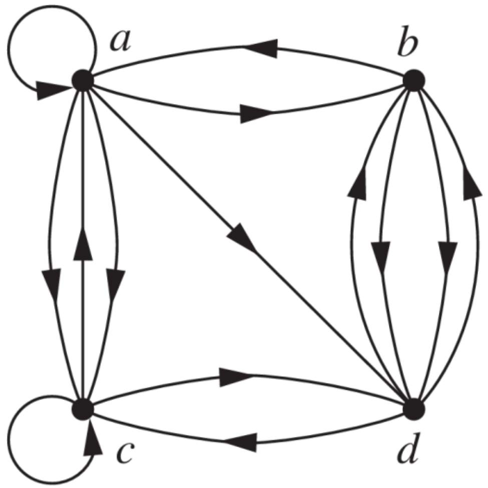
- **ماتریس مجاورت گراف جهت دار:** فرض کنید که گراف $D = (V,E)$ یک گراف بدون یال چندگانه با n رأس باشد، در اینصورت ماتریس مجاورت گراف را با $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ (A_D) نمایش میدهند که در آن:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & if\ (v_i, v_j) \in E \\ 0 & if\ (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

- البته ماتریس مجاورت برای گراف جهت دار با یال های چندگانه نیز تعریف میشود به ازای تعداد (m) یال های چندگانه ای که از v_i به v_j هست باید در ماتریس مجاوت گراف جهت دار $a_{ij} = m$ باشد.

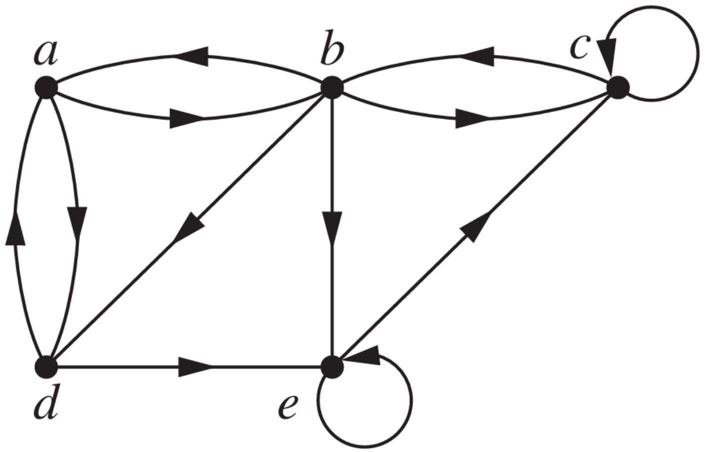
مثال۱۹) ماتریس مجاورت گراف های زیر را بدست آورید.

G_1:



$$A_{G_1} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

G_2:



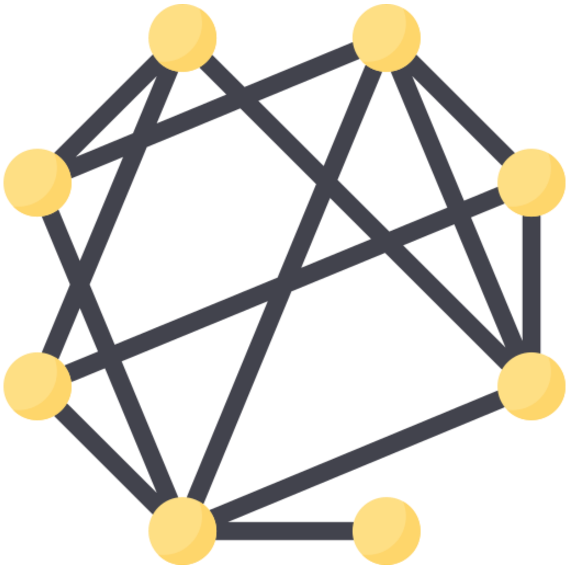
$$A_{G_2} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت نهم**

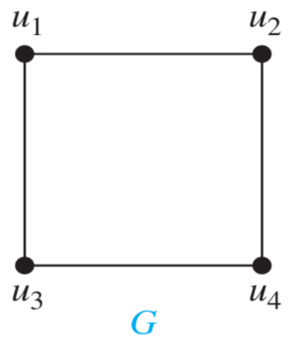
۱. یکریختی گراف ها (Isomorphism of Graphs)

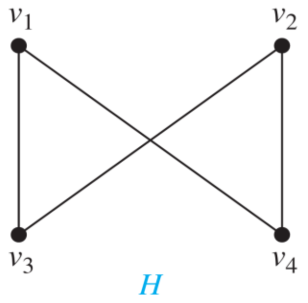


❖ **گراف های یکریخت**: دو گراف ساده مانند $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ هستند اگر و فقط اگر یک تابع یک به یک و پوشا مانند $f: V_1 \to V_2$ وجود داشته باشد که :

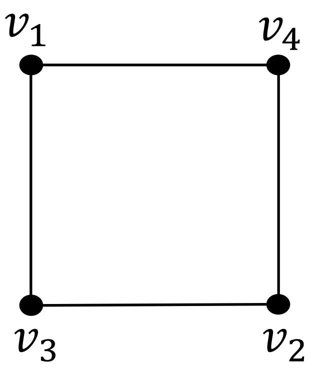
- $\forall\, v_i, v_j \in V_1 : v_iv_j \in E_1 \iff f(v_i)f(v_j) \in E_2$

مثال۲۰) نشان دهید که دو گراف زیر یکریخت هستند.





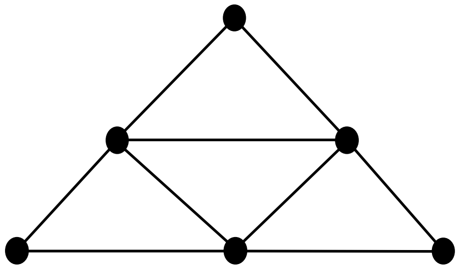
$H:$



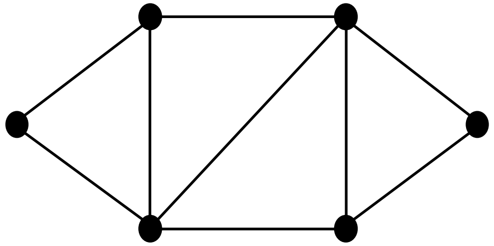
$$f(u_1)=v_1 \quad ,f(u_2)=v_4 \quad ,f(u_3)=v_3 \quad ,f(u_4)=v_2$$

$$A_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A_H = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_4 \\ v_3 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_4 & v_3 & v_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

مثال۲۱) آیا دو گراف زیر یکریخت هستند؟



G_1



G_2

- هر دو گراف دارای ۶ رأس و ۹ یال هستند.

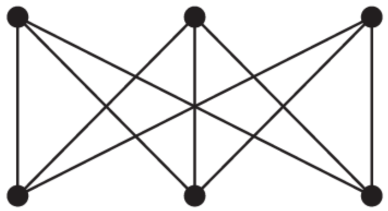
- حال باید طبق تعریف یک ریختی تابع یک به یک و پوشایی بیابیم به طوری که برای هر رأس در گراف G_1 یک رأس متناظر با همان خاصیت ها در گراف G_2 باشد.

- دنباله درجه رئوس در گراف $G_2: 2,3,4,2,3,4$ و در گراف $G_1: 2,4,4,2,4,2$ در گراف G_1 هیچ رأسی با درجه ۳ وجود ندارد درحالی برای یکریخت بودن باید دنباله درجه رئوس برابر باشد.

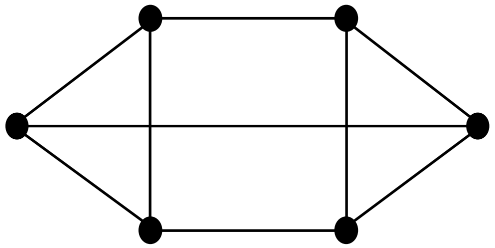
- **پس این دو گراف یک ریخت نیستند.**

- **نکته:** برابر بودن دنباله درجه رئوس در گراف ها برای یکریخت بودن دو گراف یک **شرط لازم و ناکافی** است.

مثال۲۲) آیا دو گراف زیر یکریخت هستند؟



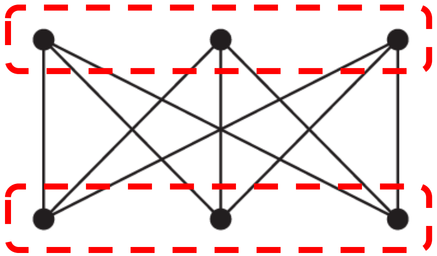
$K_{3,3}$



G_1

- هر دو گراف دارای ۶ رأس و ۹ یال هستند.

- دنباله درجه رئوس در هردو گراف هم 3,3,3,3,3,3 است،
اما یکریخت نیستند.

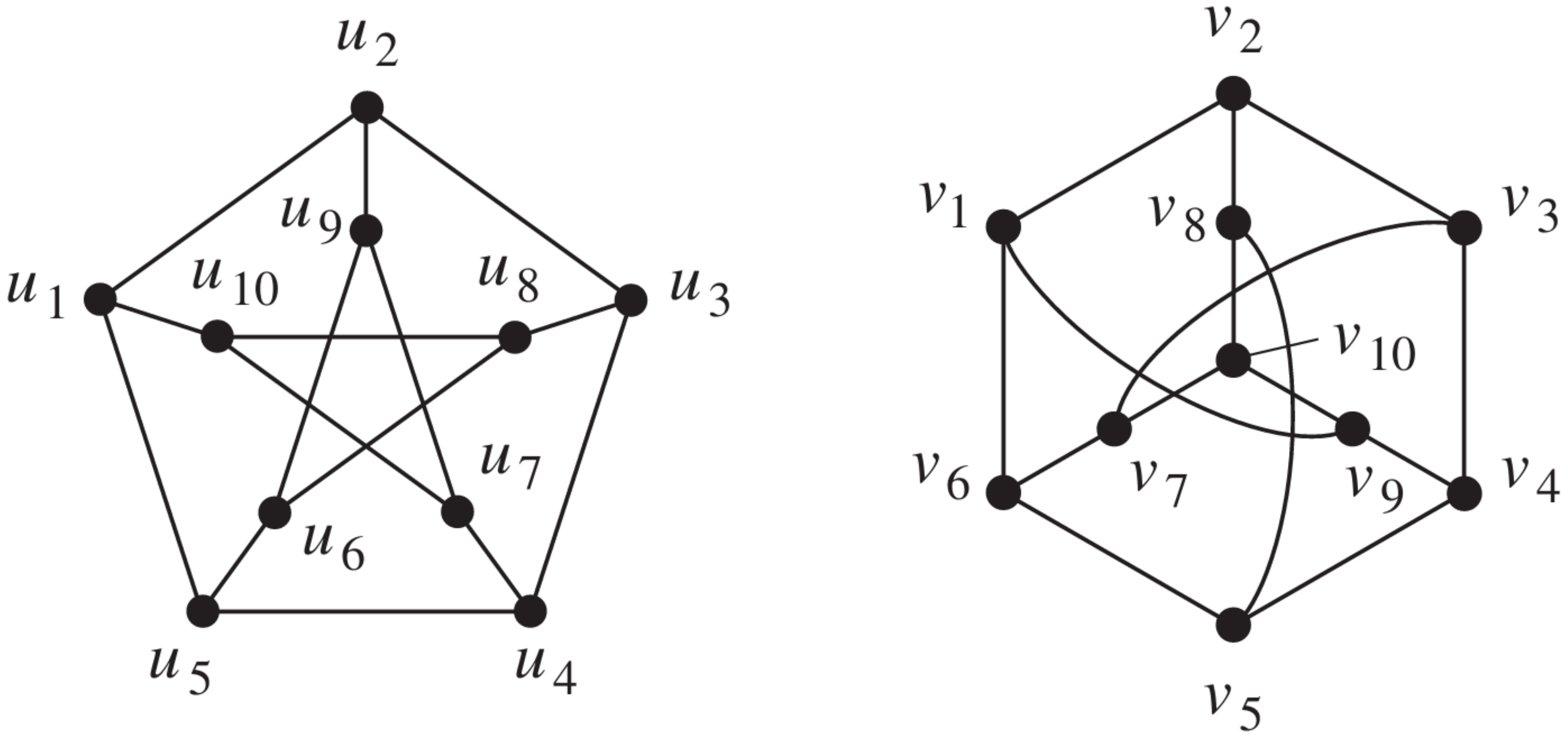


$K_{3,3}$

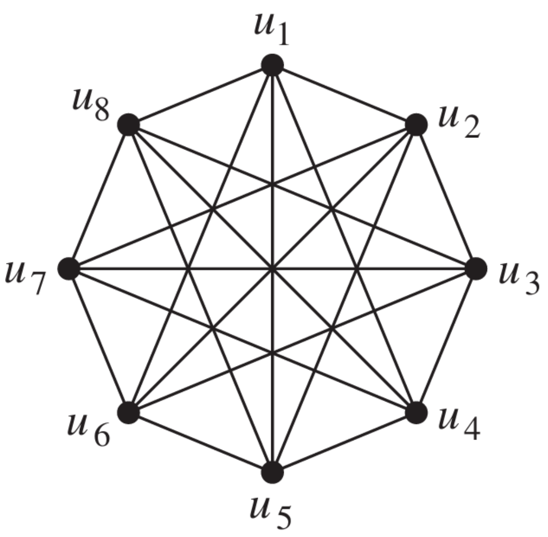
- در گراف $K_{3,3}$ سه رأس وجود دارد که باه هم مجاور نیستند اما در گراف G_1 شما هیچ سه رأسی نمیتوانید پیدا کنید که با هم مجاور نباشند.
  - **پس این دو گراف یک ریخت نیستند.**

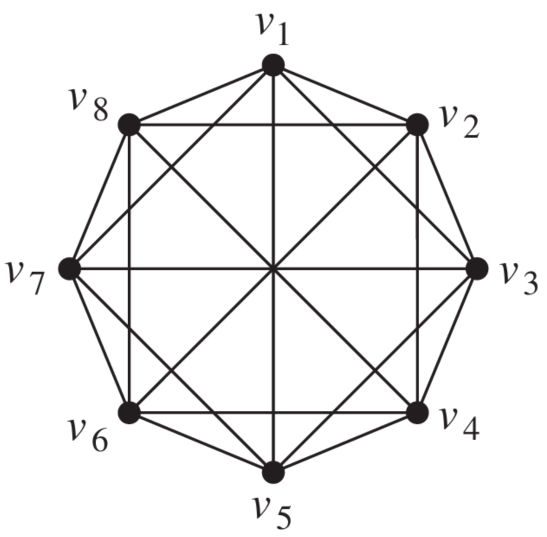
❑ گراف پترسن (Petersen Graph)

▪ این گراف ها یکریخت هستند.

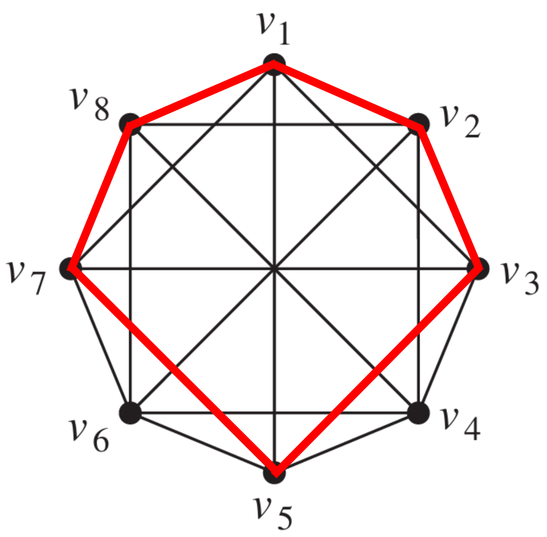


مثال۲۳) آیا دو گراف زیر یکریخت هستند؟





- **خیر این گراف ها یکریخت نیستند.**

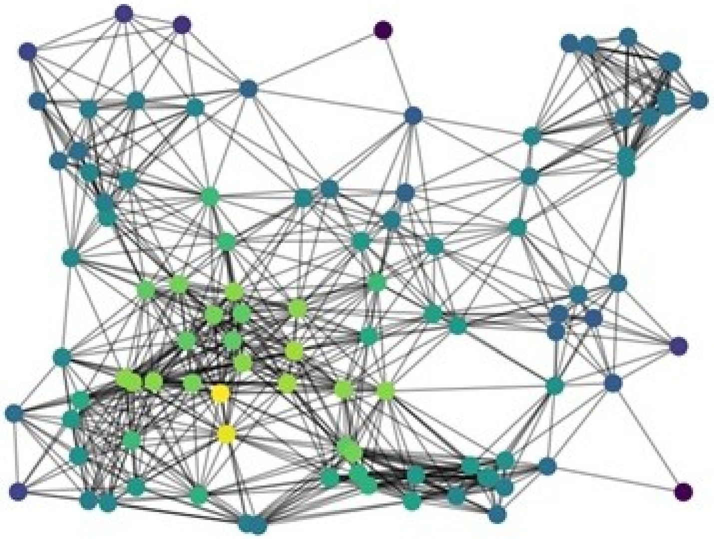


- v_1 دارای ۵ رأس مجاور است که میتواند با این ۵ رأس از هر مسیری و با انتخاب هر رأسی از رئوس مجاورش یک دور به طول ۶ بسازد.
- u_1 هم دارای ۵ رأس مجاور است اما این ویژگی را ندارد.

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت دهم**



۱. مکمل گراف (Complement Graph)

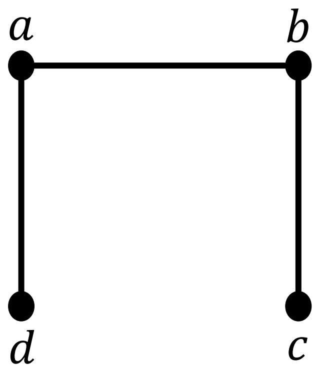
۲. گرف خودمکمل(Self Complement)

- **مکمل گراف:** اگر گراف $G = (V,E)$ یک گراف ساده n رأسی باشد، مکمل گراف G گراف ساده ای است که رئوس آن همان مجموعهء V و یال های آن تمامی یال‌هایی است که در گراف G وجود ندارد اما میتواند وجود داشته باشد، مکمل گراف G را به صورت $\bar{G} = (V,\bar{E})$ نشان میدهند.

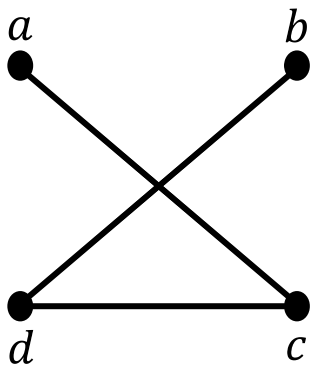
$\forall\, u,v \in V : \quad uv \notin E \Leftrightarrow uv \in \bar{E} \,,\, G \cup \bar{G} = K_n$

مثال۲۴) گراف های G_1 , G_2 مکمل یکدیگر هستند.

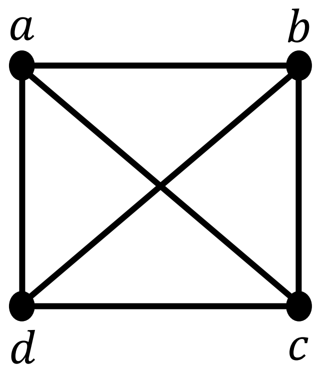
G_1:



G_2:

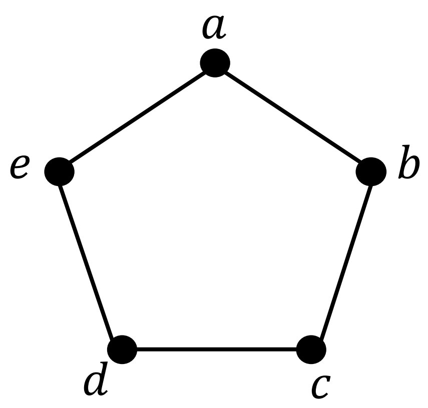


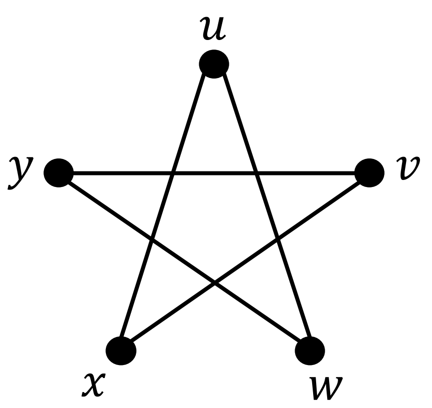
$G_1 \cup G_2 : K_4$



○ **گراف خود مکمل** (Self Complement) : گراف G را خود مکمل گویند هرگاه ، $\bar{G}$ و G **یکریخت** باشند.

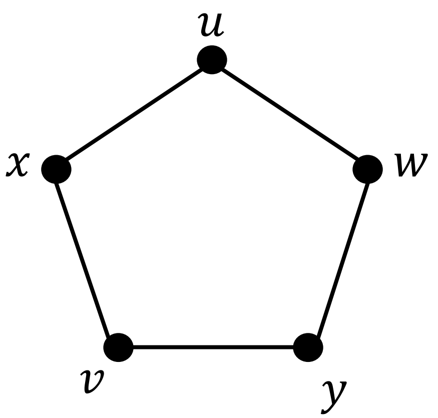
مثال۲۵) آیا گراف های $\bar{G}$, G خود مکمل هستند؟





- **واضح است که این دو گراف مکمل هم هستند، اما برای خودمکمل بودن باید یکریخت هم باشند**

$$f:G \to \bar{G} \quad : \quad f(a)=u\,,f(b)=w\,,f(c)=y\,,f(d)=v\,,f(e)=x$$



- **گراف های $\bar{G}$, G خود مکمل هستند**

Tolpam Academy

مثال۲۶) آیا گرافی که دارای ۱۰ رأس است میتواند خود مکمل باشد؟

- در گراف خود مکمل تعداد یال های گراف با مکملش برابر خواهد بود چون یکریخت هستند:

$$|E| = |\bar{E}|$$

$$|E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{10(9)}{2} = 45$$

- اجتماع یال های هر گراف ساده ۱۰ رأسی با مکملش **برابر ۴۵** خواهد شد پس یک گراف ساده ۱۰ **نمیتواند خود مکمل** باشد زیرا هیچ دو گراف مکمل ۱۰ رأسی یافت نمیشود که تعداد یال برابر داشته باشد :

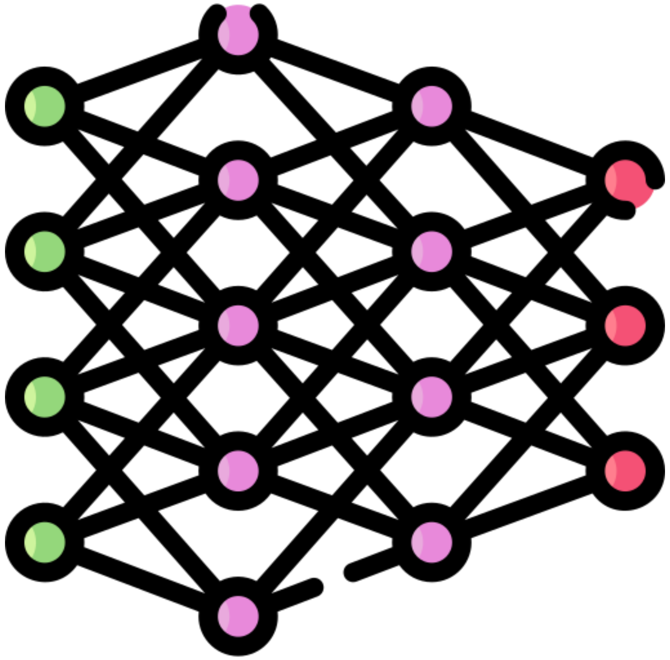
$$|E| \neq |\bar{E}|$$

Tolpam Academy

فهرست مطالب

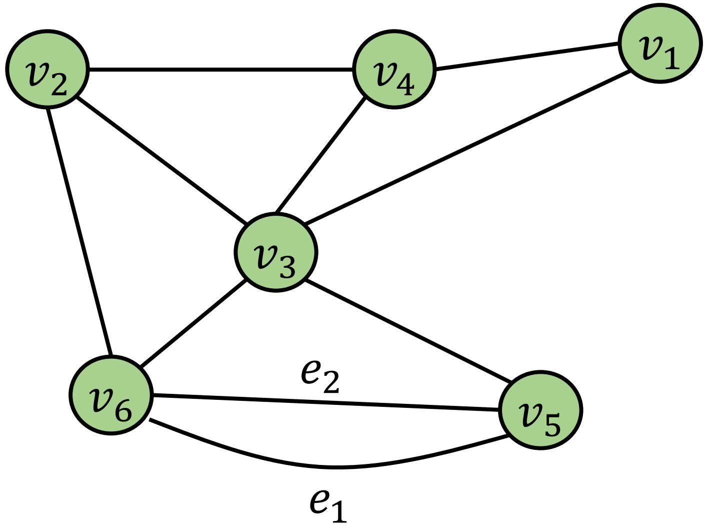
- **قسمت یازدهم**

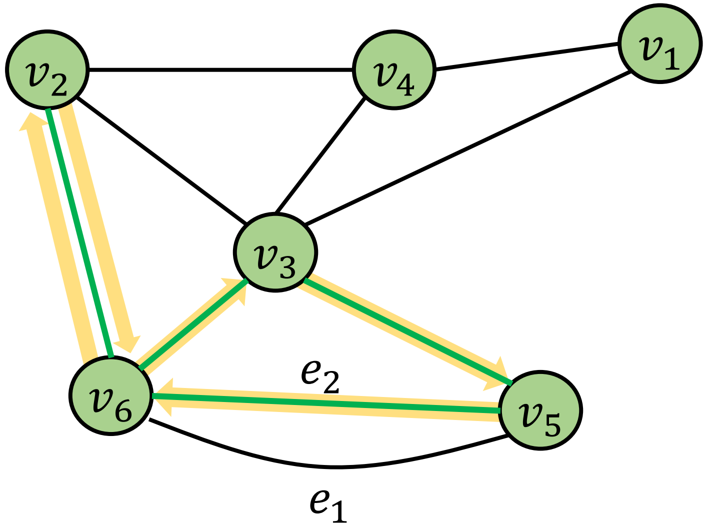
۱. مسیر و دور



- گشت
- گذر
- مسیر
- مدار
- دور

گَشت$(Walk)$: دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌هاست که از یک رأس شروع می‌شود و به ترتیب از روی یال‌های موجود در گراف حرکت می‌کند. (در گشت می‌توان رأس‌ها و یال‌ها را تکرار کرد.)



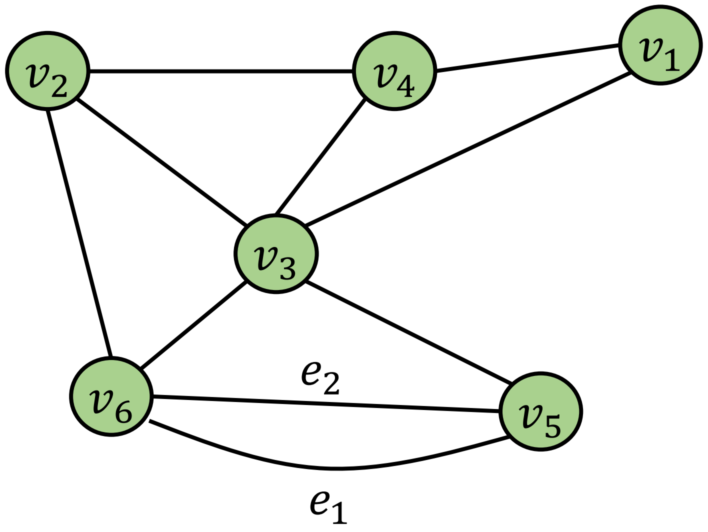


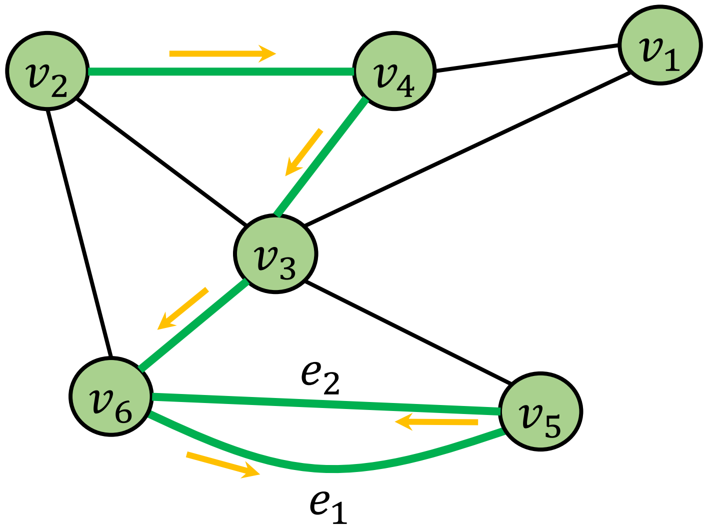
$$w = v_3\{v_3, v_5\}v_5e_2v_6\{v_6, v_2\}v_2\{v_2, v_6\}v_6\{v_3, v_6\}v_3$$

$$w = v_3v_5e_2v_6v_2v_6v_3$$

گُذر($Trail$): یک نوع گشت است که در آن **هیچ یالی تکرار نمی‌شود**، اما امکان دارد رأس‌ها تکرار شوند.

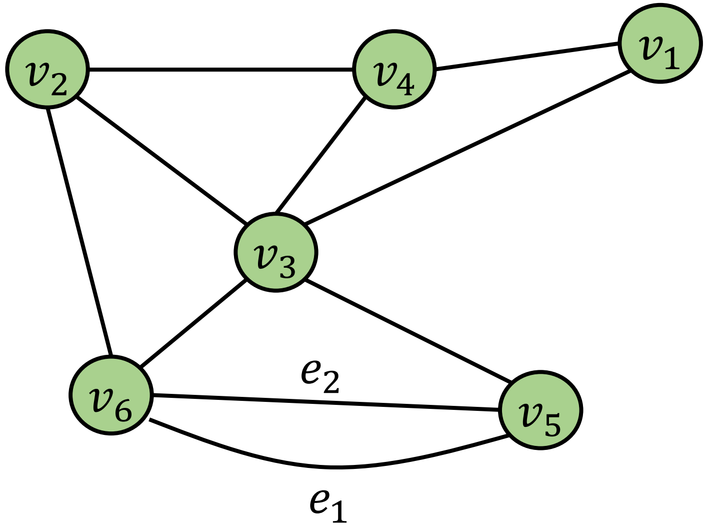
- **نکته:** در یک گذر اگر راس شروع و پایان یکی باشد یک مدار(Circuits) تشکیل میشود.

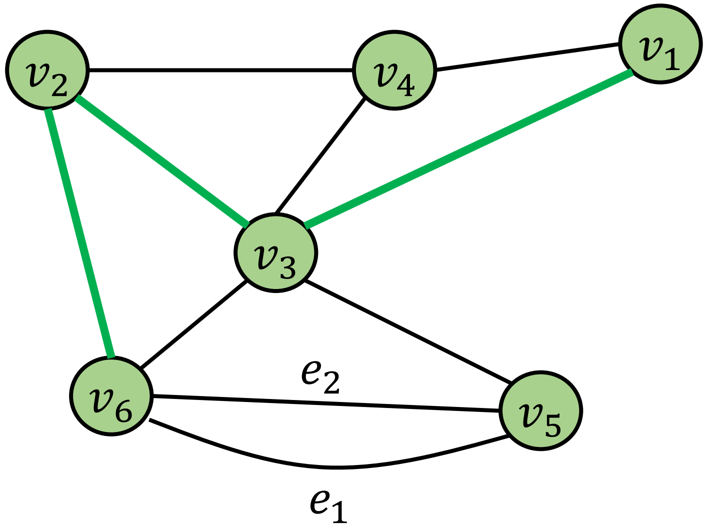




$$T = v_2 v_4 v_3 v_6 e_1 v_5 e_2 v_6$$

مَسیر$(Path)$: یک گذر خاص است که در آن **هیچ رأسی تکرار نمی‌شود** (به جز شاید رأس شروع و پایان در حالت دور).

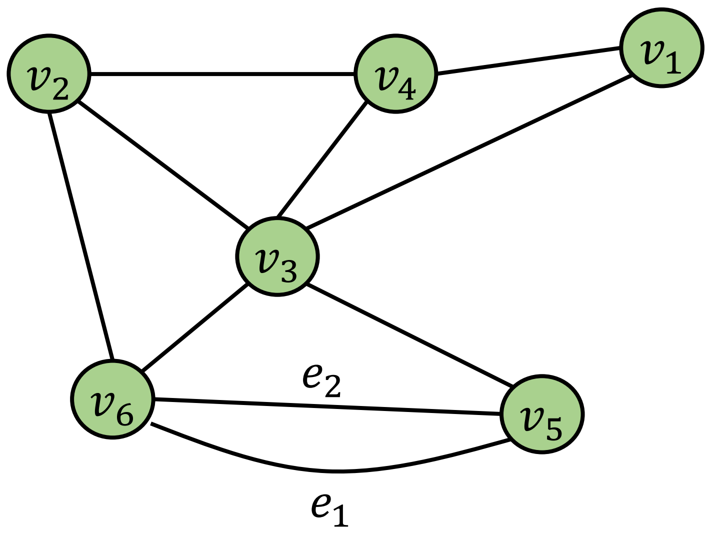


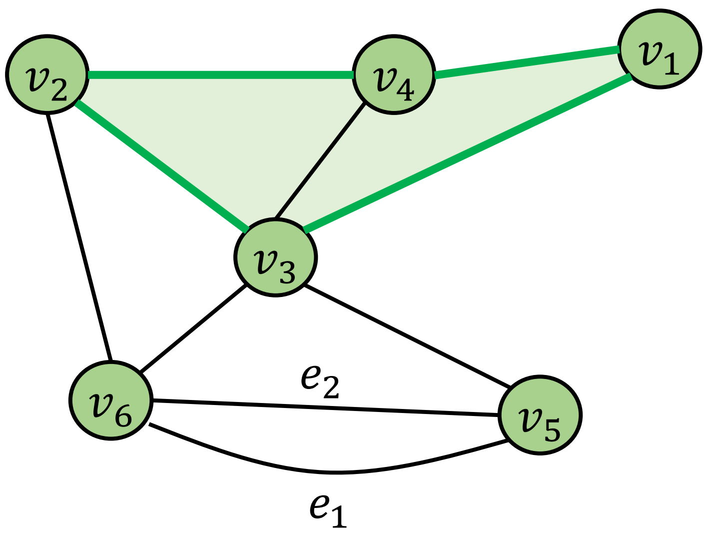


$$P = v_1 v_3 v_2 v_6$$

دور$(Cycle)$: یک مسیر است که **راس آغاز و پایان یکی باشد** و طول آن دست‌کم ۳ باشد

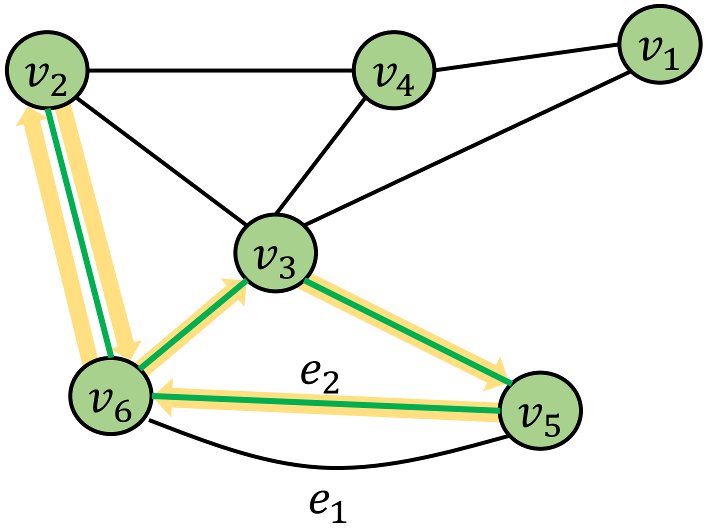
(یعنی حداقل سه رأس و سه یال داشته باشد).



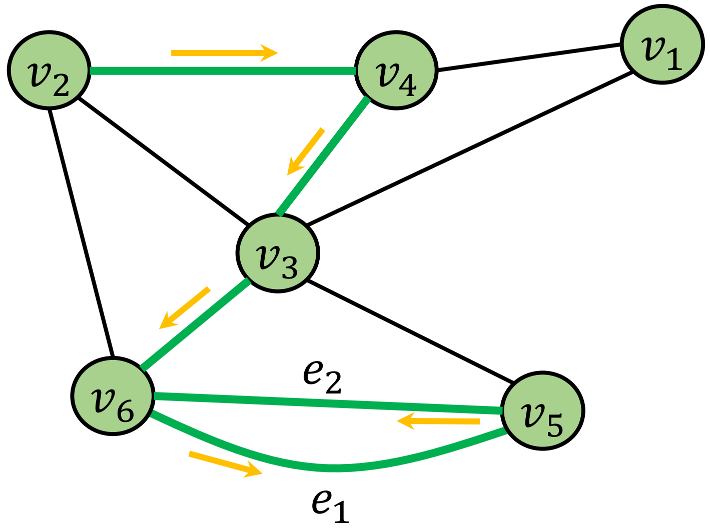


$$C = v_1v_4v_2v_3v_1$$

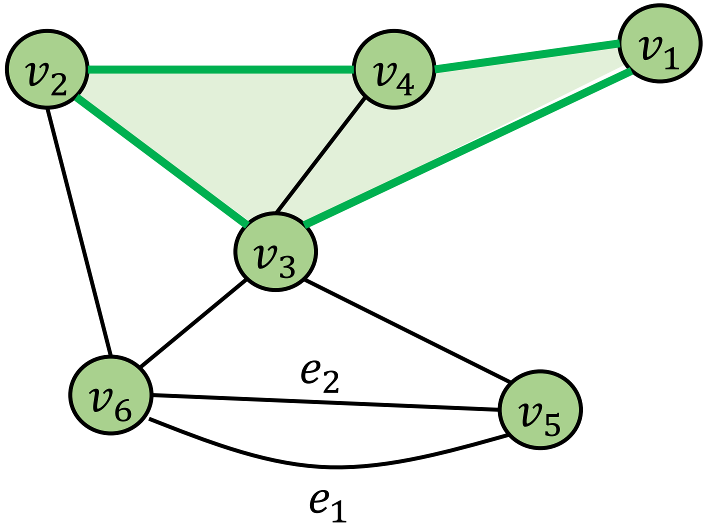
Walk:



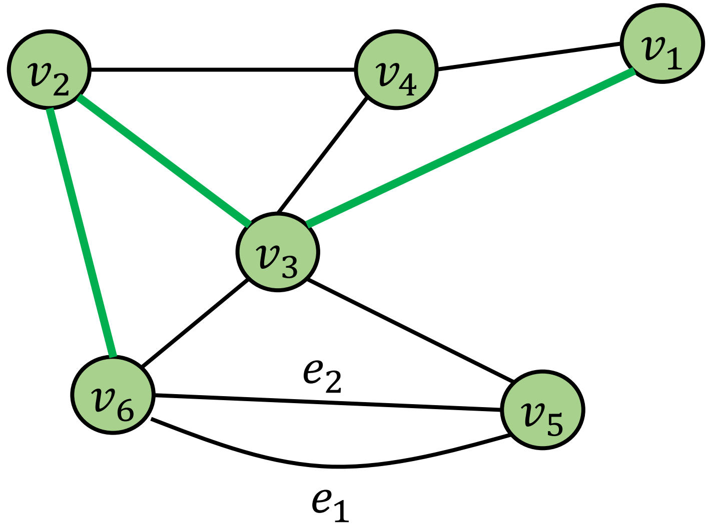
Trail:



Cycle:



Path:



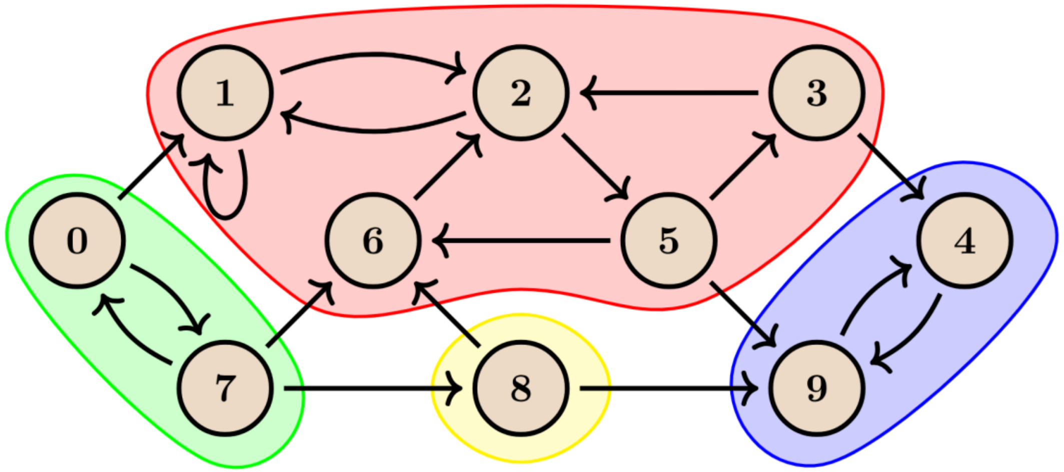
Tolpam Academy

فهرست مطالب

- **قسمت دوازدهم**

۱. همبندی

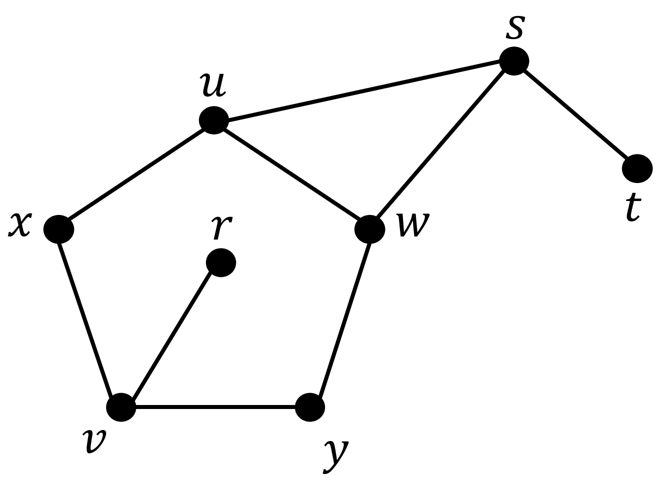
- مؤلفه همبندی
- همبندی در گراف های جهت دار
- رأس برشی
- پل



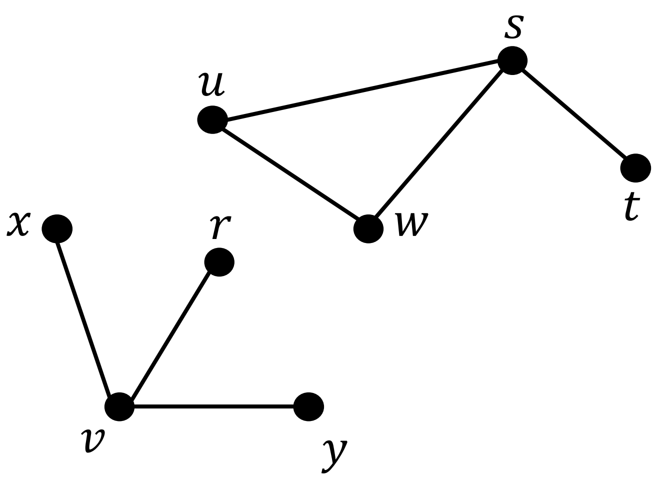
گراف همبند: یک گراف همبند است اگر بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

گرافی که این ویژگی را ندارد **ناهمبند** گویند.

- **نکته:** گرافی که دارای **رأس تنها** باشد یک گراف ناهمبند است.

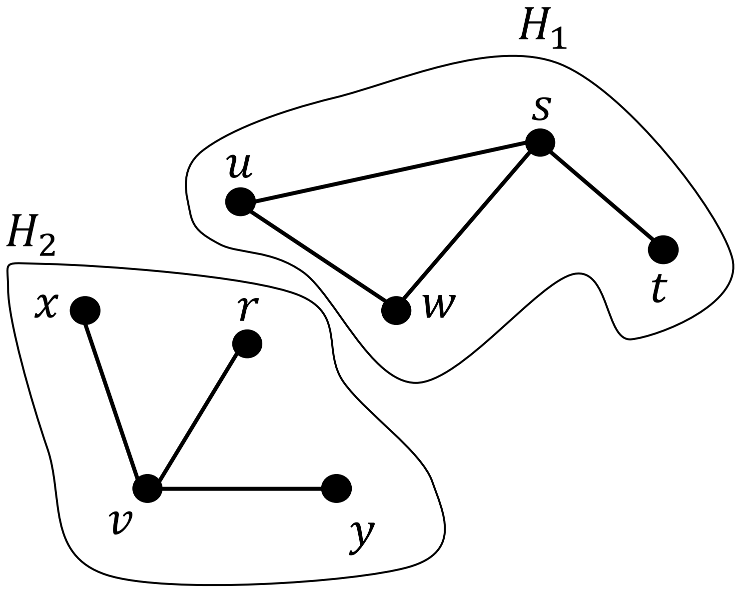


گراف همبند

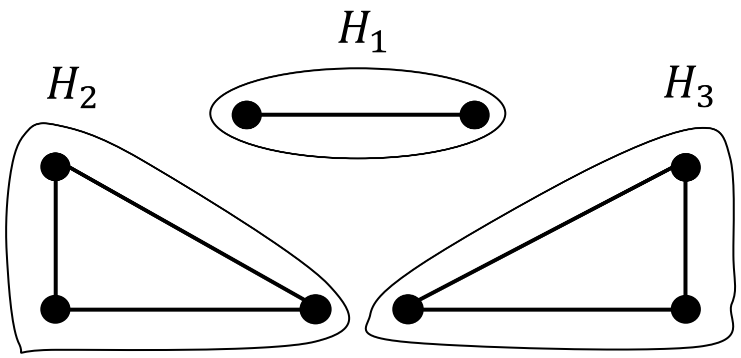


گراف ناهمبند

موءلفه همبندی: هر گراف ناهمبند تشکیل شده از چند **زیرگراف** همبند است، این زیرگراف ها را موءلفه‌ی همبندی گویند.



H_2 و H_1 موءلفه های همبندی گراف ناهمبند بالا هستند.



H_2,H_3 و H_1 موءلفه های همبندی گراف ناهمبند بالا هستند.

❖ همبندی در گراف های جهت دار

- همبندی در گراف‌های جهت دار به ۳ نوع تقسیم میشود:

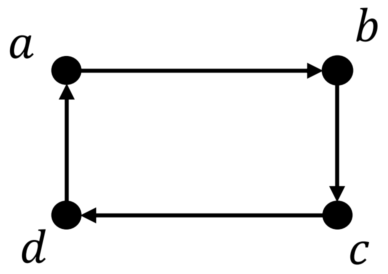
۱. همبندی قوی

۲. همبندی ضعیف

۳. همبندی یکطرفه

همبندی قوی: یک گراف جهتدار همبند قوی است، اگر بین هر دو رأس a و b مسیری جهتدار از a به b و بلعکس از b به a هم مسیری جهتدار وجود داشته باشد.

مثال۲۷) آیا گراف جهتدار رو به رو یک گراف همبند قوی است؟

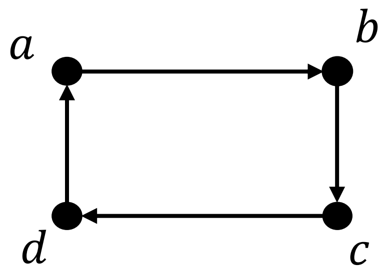


- بله، زیرا از هر رأس دلخواه آن مسیر جهتداری به همه رأس های دیگر وجود دارد.

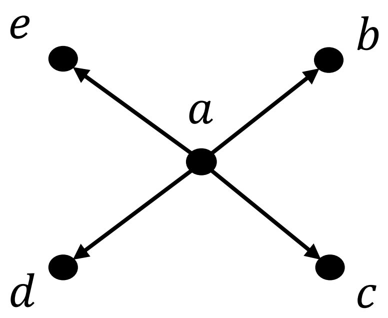
همبندی ضعیف: یک گراف جهتدار همبند ضعیف است، اگر با بی جهت درنظر گرفتن گراف (گراف زمینه) یک گراف همبند باشد.

مثال۲۸) آیا گراف‌های جهتدار رو به رو گراف همبند ضعیف هستند؟

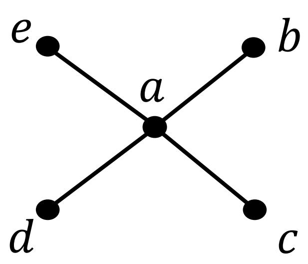
G_1:

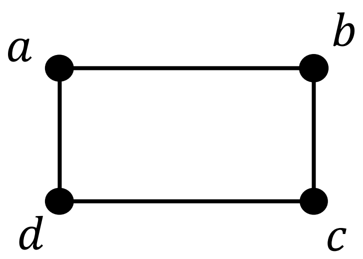


G_2:



- با بی جهت در نظر گرفتن گراف ها میتوان فهمید که هردو گراف همبند هستند که در این صورت هر دو گراف همبند ضعیف محسوب میشوند.

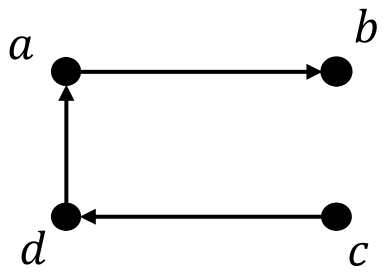




- **نکته:** یک گراف همبند قوی همواره یک گراف همبند ضعیف است اما عکس آن صادق نیست.

همبندی یکطرفه: یک گراف جهتدار همبند قوی است، اگر بین هر دو رأس a و b حداقل از یک طرف مسیر وجود داشته باشد.

مثال۲۹) آیا گراف جهتدار رو به رو یک گراف همبند یکطرفه است.

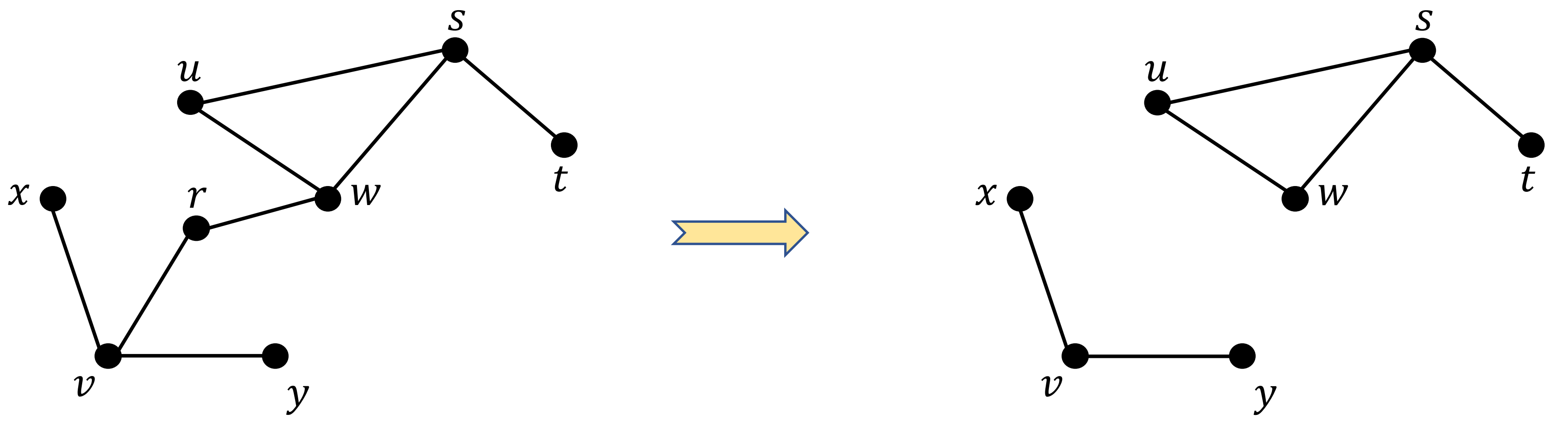


- **نکته:** یک گراف همبند قوی همواره یک گراف همبند یکطرفه است اما عکس آن صادق نیست.

- توضیح : مثال۲۹ یک مثال نقض برای عکس نکته بالا هست.
آیا میتوانید یک مثال نقض هم برای گراف های همبند ضعیف بزنید که گراف همبند یکطرفه نیست؟

رأس برشی: در گراف همبند G رأس v را رأس برشی گویند اگر و تنها اگر زیرگراف $G-v$ ناهمبند باشد.

مثال۳۰) با حذف رأس r در گراف G که یک گراف همبند است یک ناهمبند تشکیل میشود.

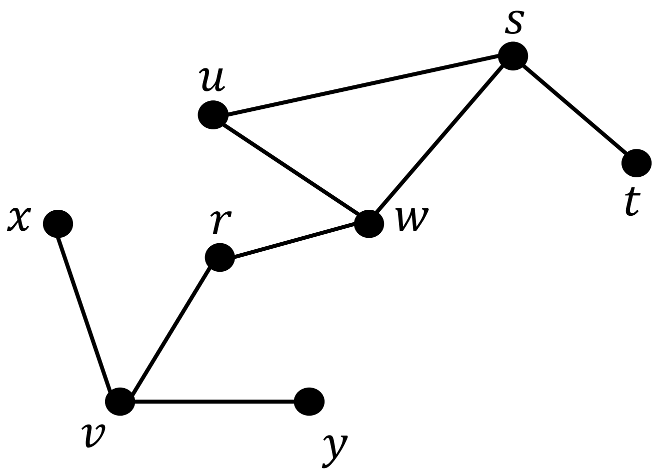


گراف همبند G

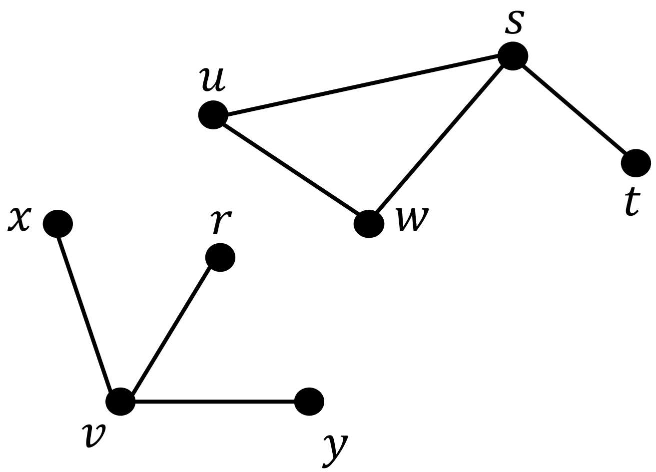
گراف ناهمبند $G-v$

پل: در گراف همبند G یال e را پل گویند اگر و تنها اگر زیرگراف $G-e$ ناهمبند باشد.

مثال(۳۱) با حذف یال rw در گراف G که یک گراف همبند است یک گراف ناهمبند تشکیل میشود.



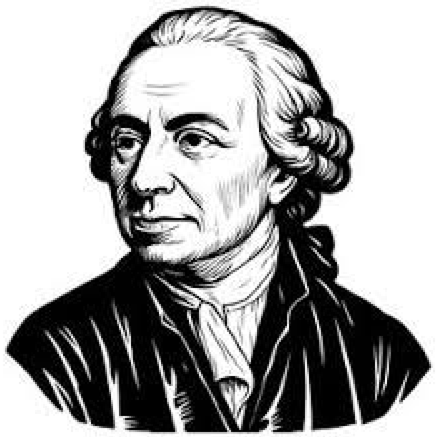
گراف همبند G



گراف ناهمبند G

فهرست مطالب

- **قسمت سیزدهم**



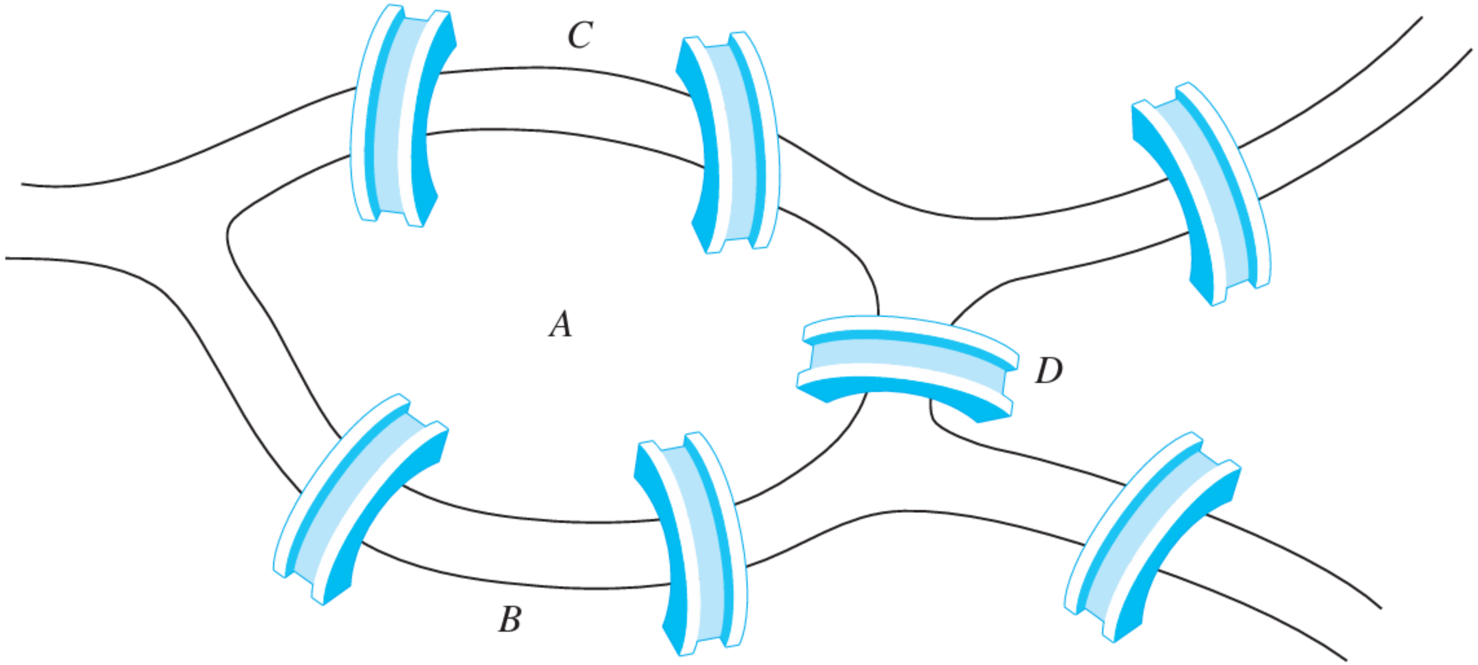
1. **گراف اویلری**

- مسیر اویلری (Euler Paths)
- مدار(دور) اویلری (Euler Circuits)

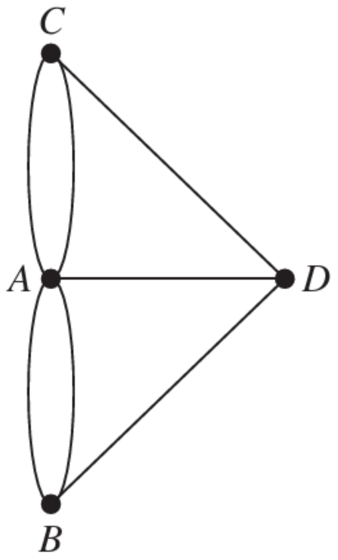
مسیر و مدار اویلری (Euler Paths and Circuits)

شهر کونیگزبرگ، پروس (که اکنون کالینینگراد نامیده می‌شود و بخشی از جمهوری روسیه است) توسط شاخه‌های رودخانه پرگل به چهار بخش تقسیم شده بود. این چهار بخش شامل دو منطقه در سواحل پرگل، جزیره نیفوف و منطقه بین دو شاخه پرگل بود. در قرن هجدهم، هفت پل این مناطق را به هم متصل می‌کردند. مردم شهر یکشنبه‌ها پیاده‌روی‌های طولانی در شهر انجام می‌دادند. آنها از خود می‌پرسیدند که آیا می‌توان از مکانی در شهر شروع کرد، یک بار از روی همه پل‌ها عبور کرد بدون اینکه دو بار از روی هیچ پلی عبور کرد و به نقطه شروع بازگشت. ریاضیدان سوئیسی، لئونارد اویلر، این مسئله را حل کرد. راه‌حل او که در سال ۱۷۳۶ منتشر شد، ممکن است اولین کاربرد نظریه گراف باشد. اویلر این مسئله را با استفاده از گراف چندگانه‌ای که وقتی چهار ناحیه با رأس‌ها و پل‌ها با یال‌ها نمایش داده می‌شوند، به دست می‌آید، مطالعه کرد. این گراف چندگانه در اسلاید بعدی نمایش داده شده است.

مسیر و مدار اویلری (Euler Paths and Circuits)



هفت پل کونیگزبرگ



مدلسازی گراف هفت پل
شهر کونیگزبرگ

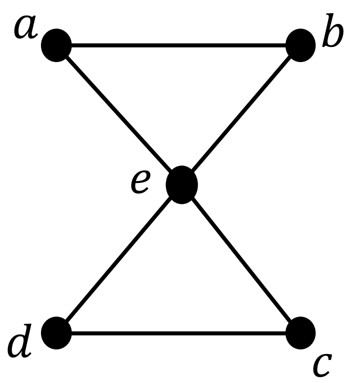
مسیر(گذر) اویلری: گراف G را در نظر بگیرید، **گذری** در این گراف است که از **تمام یال‌های** این گراف عبور کند.

- **توجه:** مسیر اویلری (Euler Paths) یا گذر اویلری (Euler Trail) در حقیقت یک **گذر** است، و تکرار رئوس در آن مجاز است، اما بدلیل وقایع تاریخی این اسم روی آن مانده است. البته در بعضی از منابع از همان واژه Euler Trail استفاده میشود.

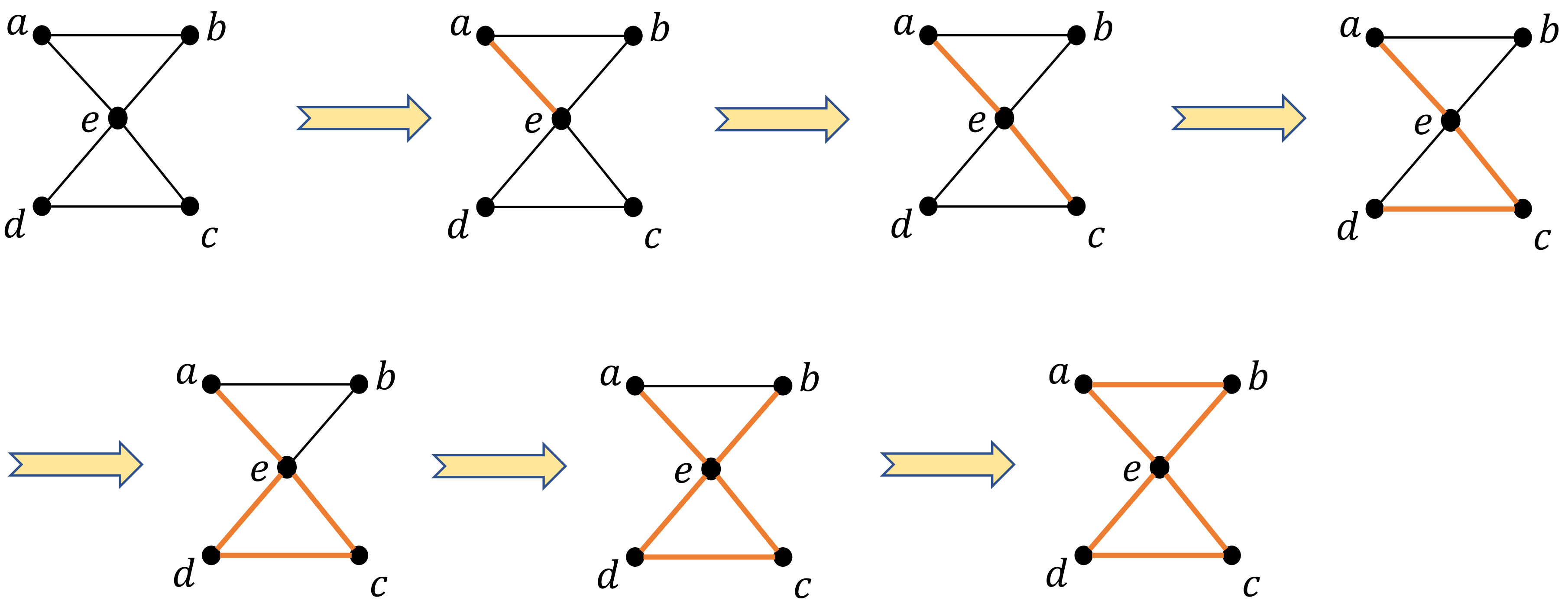
مدار اویلری: گراف G را در نظر بگیرید، مداری در این گراف که از **تمام یال‌های** این گراف عبور کند مدار اویلری گویند.

- **یادآوری:** مدار، گذری است که رأس ابتدا و انتهایش یکی است در برخی منابع به مدار اویلری، دور اویلری هم میگویند ولی اینجا هم تکرار روئوس برخلاف تعریف دور در گراف مجاز است.

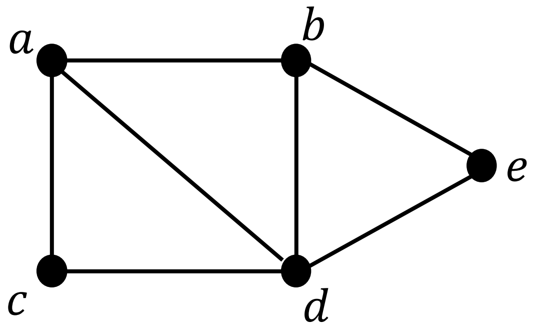
مثال۳۲) آیا گراف زیر دارای مدار یا مسیر اویلری هست؟



- بله گراف رو به رو دارای مدار اویلری است. برای مثال دور a,e,c,d,e,b,a را درنظر بگیرید.



مثال۳۳) آیا گراف زیر دارای مدار یا مسیر اویلری هست؟



خیر این گراف مدار اویلری ندارد اما مسیر اویلری دارد:

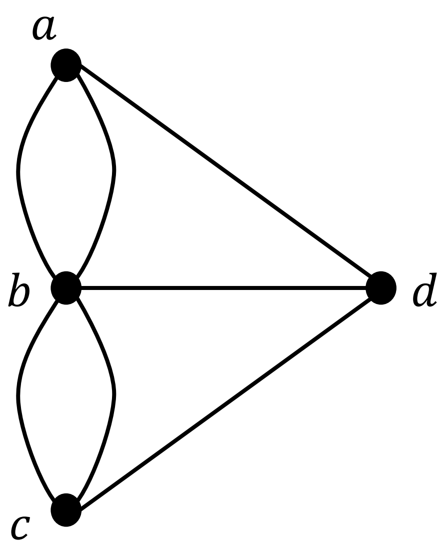
$$abdcadeb$$

- **قضیه ۶ :** گراف G دارای مدار اویلری است، اگر و فقط اگر G یک گراف همبند باشد و درجه تمام رئوس آن زوج باشد.

- **گراف اویلری:** به گرافی که مدار اویلری داشته باشد گراف اویلری گویند، اما اگر فقط مسیر اویلری داشته باشد **گراف نیمه اویلری** گویند و در غیر این صورت گراف را **غیر اویلری** می‌گونید.

- **قضیه ۷** : گراف G دارای مسیر اویلری است، اگر و فقط اگر G یک گراف همبند باشد و **دقیقا** **صفر**(درصورتی که گراف اویلری باشد.)، یا **دو** رأس با **درجه فرد** داشته باشد.

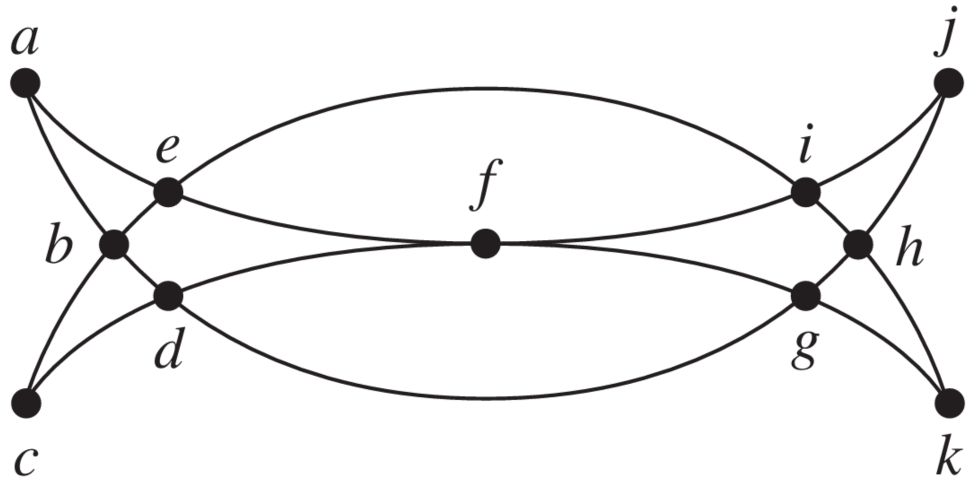
مثال۳۴) آیا گراف زیر دارای مدار یا مسیر اویلری هست؟



$$\deg(a) = 3\,, \deg(b) = 5, \deg(c) = 3\,, \deg(d) = 3$$

- طبق قضایای ۶ و ۷ این گراف مدار و مسیر اویلری ندارد. زیرا در این گراف هر ۴ رأس از درجه فرد هستند.

تمرین) آیا گراف زیر یک گراف اویلری است؟



- راهنمایی: درجه همه رئوس را بدست آورید و از قضایای ۶ و ۷ استفاده کنید.

Tolpam Academy

فهرست مطالب

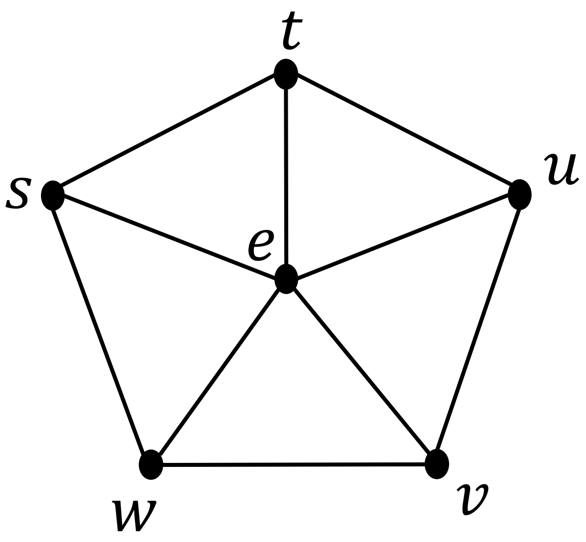
- **قسمت پانزدهم**

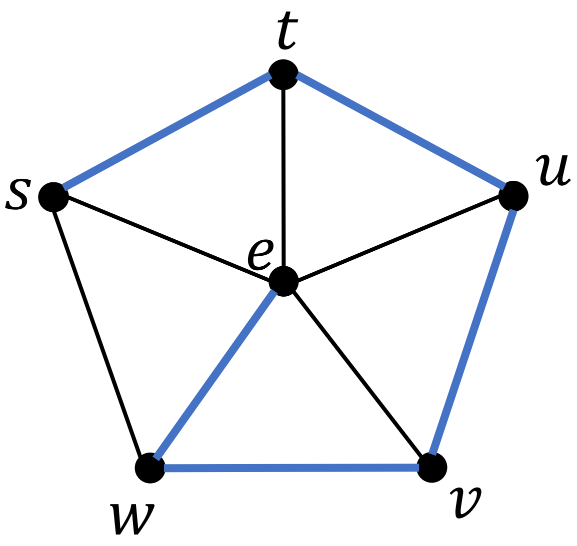
۱. گراف همیلتونی

- مسیر همیلتونی (Hamilton Paths)
- دور همیلتونی (Hamilton Circuits)

مسیر همیلتونی: گراف G را در نظر بگیرید، **مسیری** که از **تمام رئوس** گراف G عبور کند مسیر همیلتونی است.

مثال۳۵) در گراف زیر مسیری با شروع از رأس s و رسیدن به رأس e یک مسیر همیلتونی است.



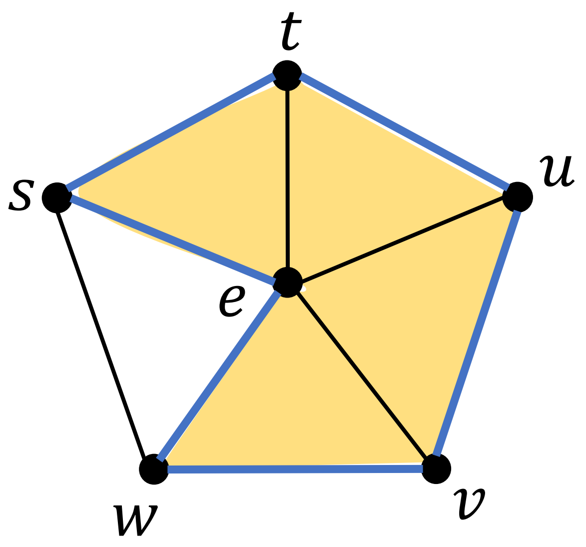


$$\text{Hamilton Paths} = s\ t\ u\ v\ w\ e$$

دور همیلتونی: گراف G را در نظر بگیرید، **دوری** در این گراف که از تمامی رئوس **فقط یکبار** عبور کند را دور همیلتونی گویند.

- **توجه:** دور همیلتونی اویلری (Hamilton Cycle) یا مدار همیلتونی(Hamilton Circuits) در حقیقت یک **دور** است، و تکرار رئوس در آن مجاز نیست، اما بدلیل وقایع تاریخی اسم مدار همیلتونی روی آن مانده است. البته در بعضی از منابع از همان واژه دورهمیلتونی استفاده میشود و در اینجا ما هم از این اسم استفاده میکنیم.

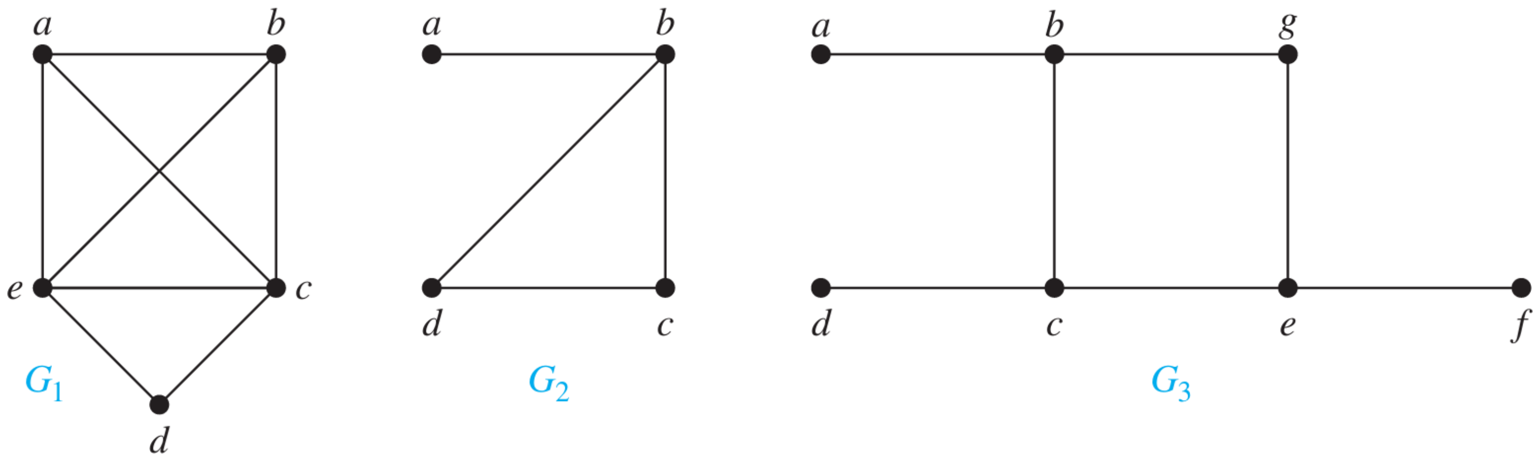
مثال۳۶) در همان گراف مثال ۳۴ دور همیلتونی به شکل زیر خواهد بود.



$$Hamilton\ Cycle = s\ t\ u\ v\ w\ e\ s$$

- **نکته:** به گرافی که دارای دور همیلتونی است **گراف همیلتونی** گویند.

تمرین) در گراف های زیر، دور یا مسیر همیلتونی را در صورت وجود پیدا کنید.



- $G_1: \ Hamilton\ circuit: \ a, b, c, d, e, a$
- $G_2: \ Hamilton\ path, : a, b, c, d$

- گراف های G_2 و G_3 دور همیلتونی ندارند چه عاملی مانع از وجود دور همیلتونی در این گراف ها میشود؟

- **نکته:** اگر گراف G دارای دور همیلتونی باشد آنگاه به ازای هر رأس v خواهیم داشت: $\deg(v) \geq 2$

- **قضیه ۸** : اگر گراف G یک گراف ساده n رأسی و $n \geq 3$ باشد درصورتی که درجه هر رأس در این گراف حداقل $\frac{n}{2}$ باشد، این گراف دارای دور همیلتونی است.

- **قضیه ۹** : اگر گراف G یک گراف ساده n رأسی و $n \geq 3$ باشد درصورتی که برای هر دو رأس غیر مجاور v و u معادله $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ برقرار باشد، گراف G دارای دور همیلتونی است.

Tolpam Academy

فهرست مطالب

- قسمت شانزدهم

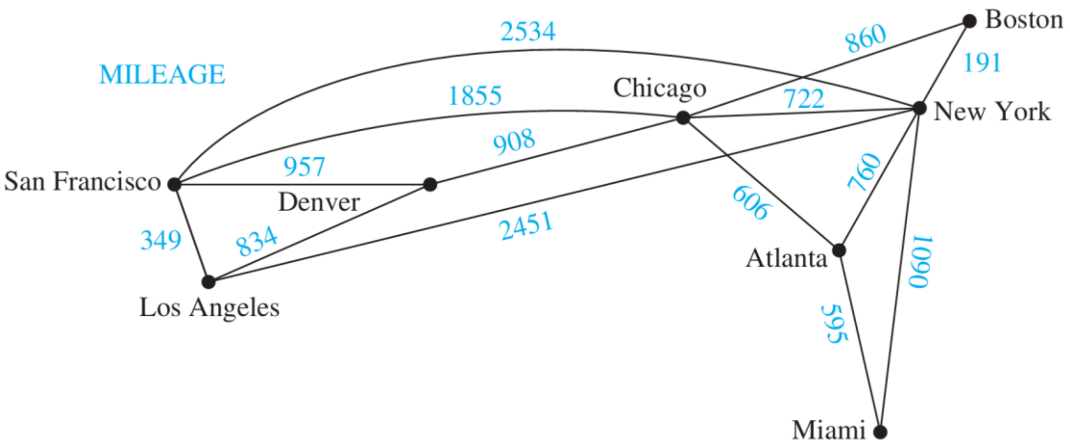
۱. **گراف‌های وزن‌دار(Weighted Graphs)**

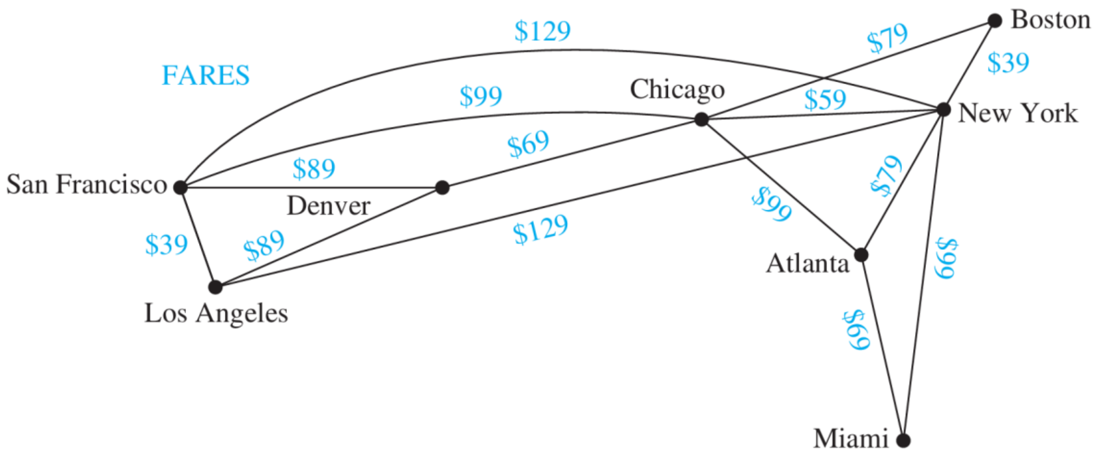
۲. **مسئله کوتاه ترین مسیر در گراف (A Shortest-Path Problem)**

- الگوریتم دایجسترا(Dijkstra's Algorithm)

گراف وزن‌دار: گرافی که به هر یال آن یک وزن(عددی) نسبت داده شود که **هزینه‌ء** جابجایی بین رأس‌ها را نشان میدهد، گراف وزن دار را با $G = (V,E,W)$ نشان میدهند.

مثال۳۷) گراف های زیر گراف وزن دار هستند.



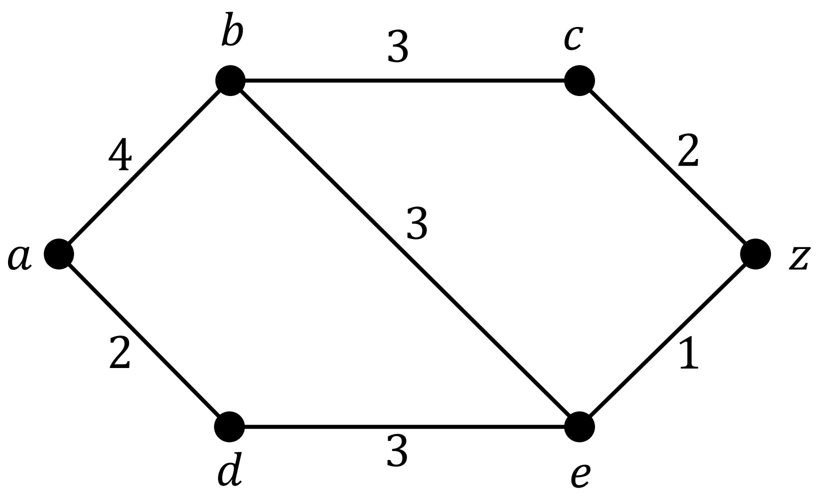


- **نکته:** وزن هر یال باید از جنس عدد باشد و نشانگر هزینه جابجایی بین دو رأس آن یال (مثل: زمان، مسافت،...) .

مسئله کوتاه ترین مسیر در گراف

مسئله پیدا کردن کوتاه ترین مسیر(در صورت وجود) بین دو رأس دلخواه در گراف وزن‌دار $G = (V,E,W)$ است. برای پیدا کردن کوتاه ترین مسیر بین دو رأس در یک گراف الگوریتم های زیادی وجود دارد اما اینجا ما به بررسی یک الگوریتم حریصانه به نام الگوریتم دایجسترا خواهیم پرداخت.

مثال۳۸) کوتاه ترین مسیر بین رأس a و z را بیابید.



$path1: a, b, c, z \rightarrow cost(a, z) = 4 + 3 + 2 = 9$

$path2: a, b, e, z \rightarrow cost(a, z) = 4 + 3 + 1 = 8$

$path3: a, d, e, z \rightarrow cost(a, z) = 2 + 3 + 1 = 6$

$path4: a, d, e, b, c, z \rightarrow cost(a, z) = 2 + 3 + 3 + 3 + 2 = 13$

shortest path: path3

مسئله کوتاه ترین مسیر در گراف

در مثال ۳۷ برای پیدا کردن کوتاه ترین مسیر بین دو رأس همه مسیرهای بین این دو رأس را می‌بایست پیدا میکردیم و در بین تمام مسیرها نهایتا کم وزن ترین مسیر به عنوان کوتاه ترین مسیر بین این دو رأس انتخاب میشد، اما آیا همیشه پیدا کردن کوتاه ترین مسیر به این آسانی است؟ خیر

در بسیاری از موارد و در دنیای واقعی ما با گراف هایی بسیار پیچیده مواجه هستیم که مدلسازی هایی از مسائل پیچیده دنیا هستند. و در خیلی از این مسائل نیاز به پیدا کردن کوتاه ترین مسیر در گراف خواهیم داشت، پس نیاز به یکسری الگوریتم داریم تا به وسیله ماشین(کامپیوتر) ها این کار را انجام دهیم، چرا که با پیچیده شدن گراف پیدا کردن تمامی مسیر ها توسط انسانها عملا ناممکن است، الگوریتم های زیادی برای پیدا کردن کوتاه ترین مسیر در گراف ها وجود دارد اما ما اینجا به برسی یک الگوریتم مهم به نام الگوریتم دایجسترا (یا تلفظ صحیح‌تر دیکسترا) خواهیم پرداخت.

الگوریتم دایجسترا (Dijkstra′s Algorithm)

الگوریتمی است که برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس در گراف به کار می‌رود. این گراف، ممکن است مدلسازی از شبکه جاده‌ها، شبکه های اجتماعی یا موارد دیگری باشد. الگوریتم دایجسترا در سال ۱۹۵۶، توسط دانشمند کامپیوتری با نام «ادسخر ویبه دیکسترا» مطرح و سه سال بعد در سال ۱۹۵۹، منتشر شد.

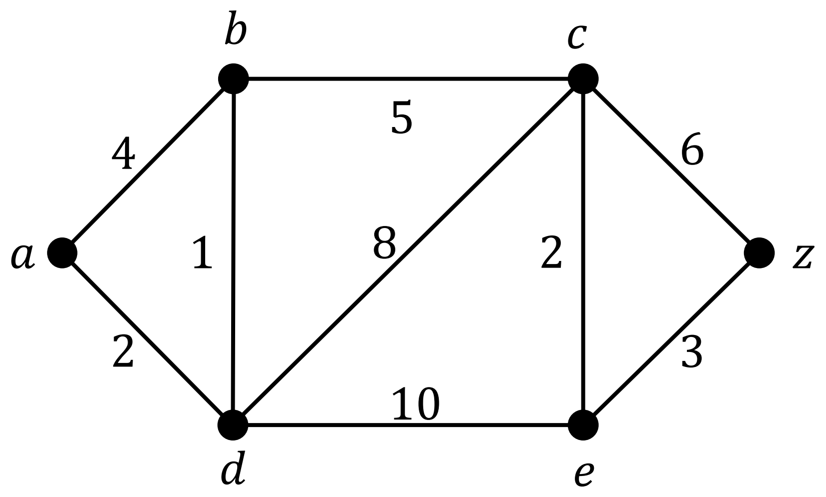
الگوریتم دایجسترا دارای انواع گوناگونی است. الگوریتم اصلی، کوتاه‌ترین مسیر بین دو گره را پیدا می‌کند؛ اما نوع متداول‌تر این الگوریتم، یک گره یکتا را به عنوان گره مبدا (آغازین) در نظر می‌گیرد و کوتاه‌ترین مسیر از مبدا به دیگر گره‌ها در گراف را با ساختن درخت کوتاه‌ترین مسیر پیدا می‌کند.

الگوریتم دایجسترا (Dijkstra′s Algorithm)

○ **الگوریتم:**

۱. رأس مبدا را انتخاب میکنیم و هزینه 0 را برای آن در نظر میگیریم و به بقیه رئوس هزینه بینهایت (∞) میدهیم.

مثال۳۹) کوتاه ترین مسیر بین رأس a و z را بیابید.

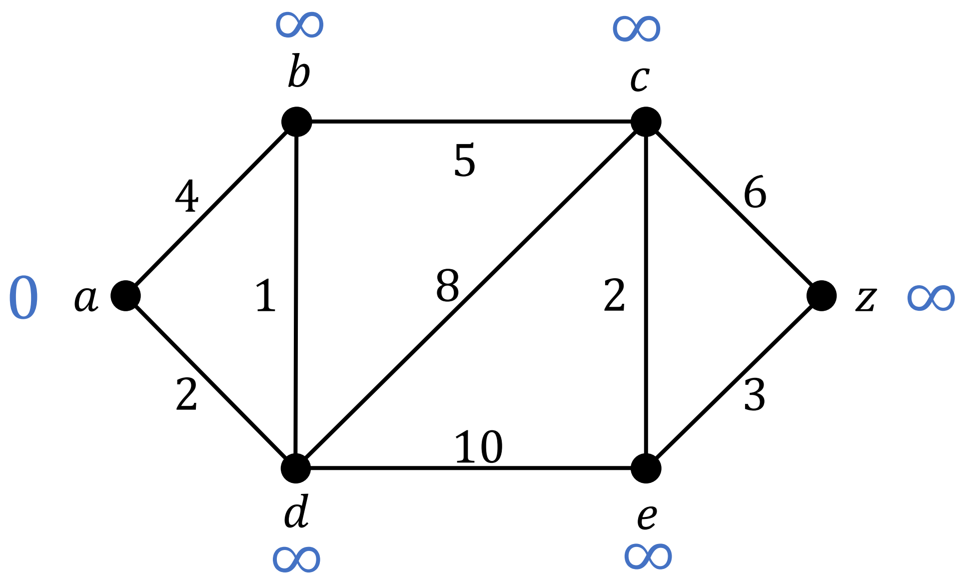


- الگوریتم دایجسترا را روی این مثال قدم به قدم پیاده میکنیم.

الگوریتم دایجسترا (Dijkstra's Algorithm)

○ **الگوریتم:**

۱. رأس مبدا را انتخاب میکنیم و هزینه 0 را برای آن در نظر میگیریم و به بقیه رئوس هزینه بینهایت (∞) میدهیم.



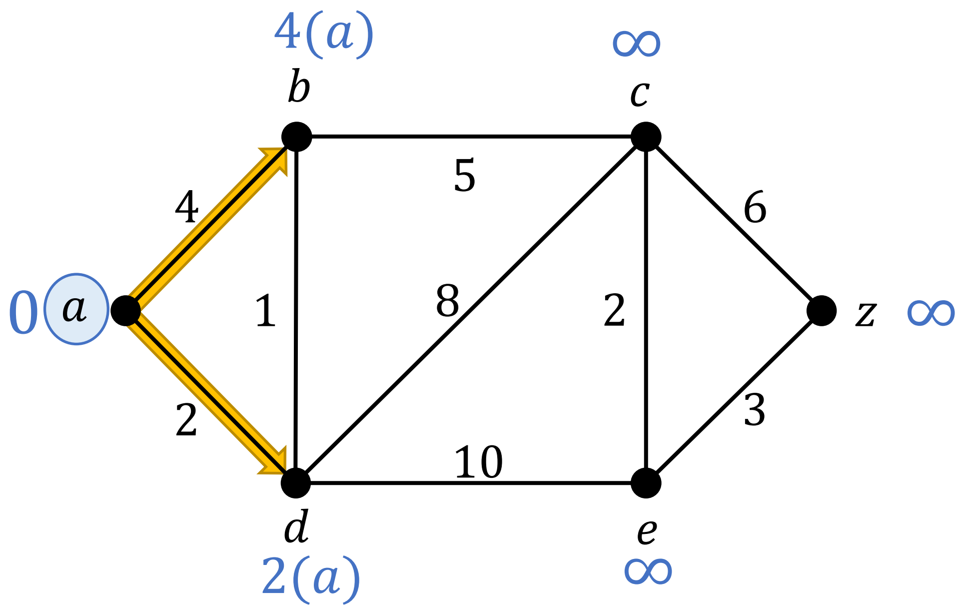
(a)

Tolpam Academy

الگوریتم دایجسترا (Dijkstra's Algorithm)

○ **الگوریتم:**

۲. رأس مبداء را انتخاب میکنیم و هزینه مسیر از رأس مبدا به تمام رئوس مجاورش را به عنوان هزینه آن رأس در نظر میگیرم.

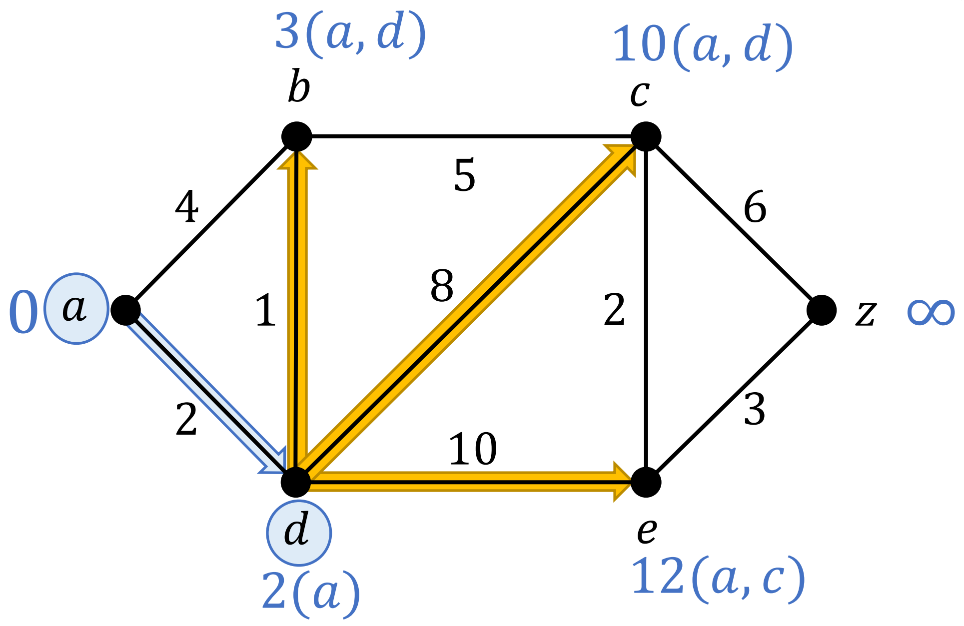


(b)

الگوریتم دایجسترا (Dijkstra's Algorithm)

○ **الگوریتم:**

۳. رأسی که کم ترین هزینه را دارد(بجز رأس مبداء) انتخاب میکنیم و برای همه گره های مجاورش هزینه ادامه مسیر به آن رأس را محاسبه مکنیم اگر هزینه محاسبه شده کم تر از هزینه رأس باشد جایگزین میشود در غیر اینصورت هزینه رأس تغییری نمیکند.

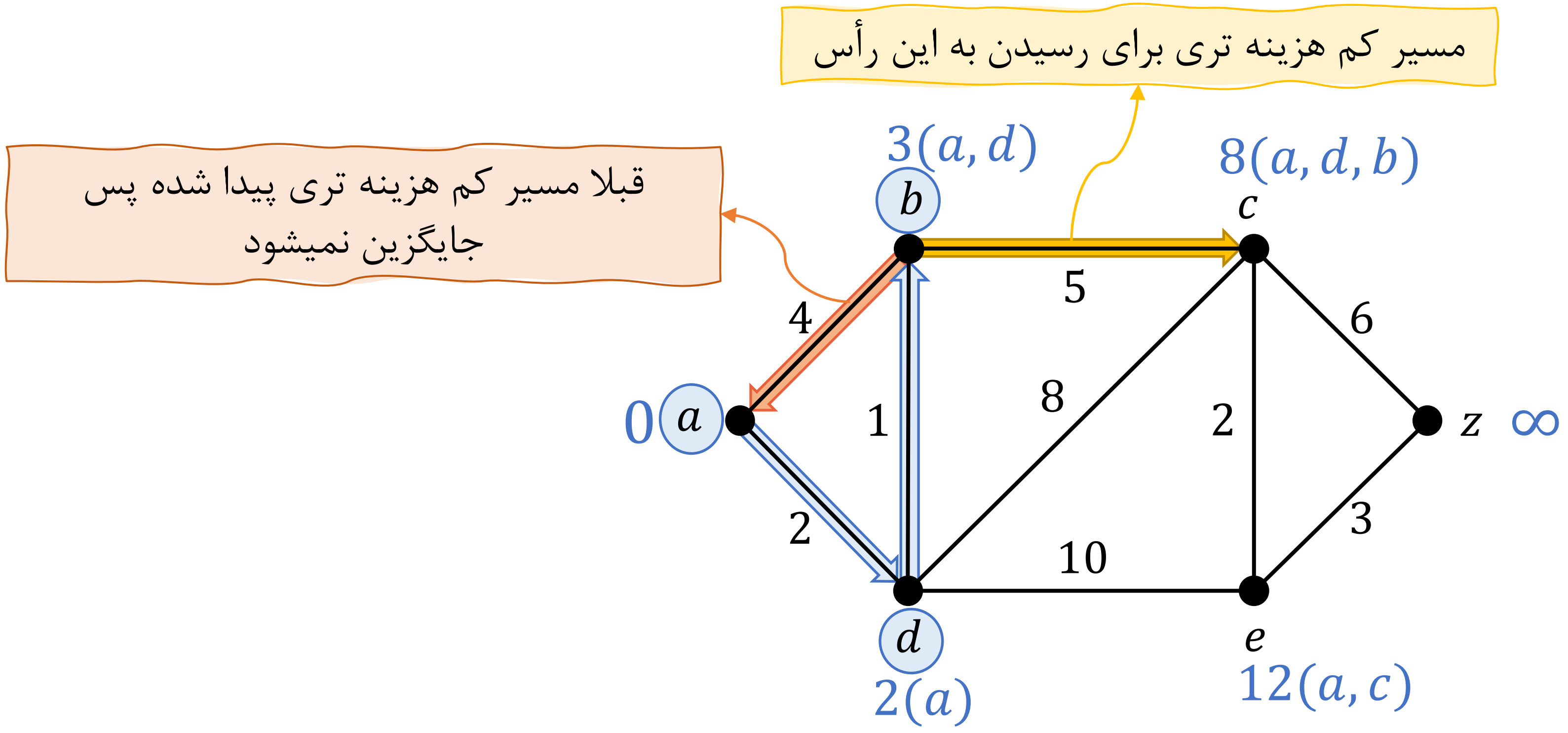


(c)

الگوریتم دایجسترا (Dijkstra's Algorithm)

○ الگوریتم:

۴. در بین رئوسی که تا به حال انتخات نشده اند، مرحله ۳ را آنقدر تکرار میکنیم تا همه رئوس انتخاب شوند.

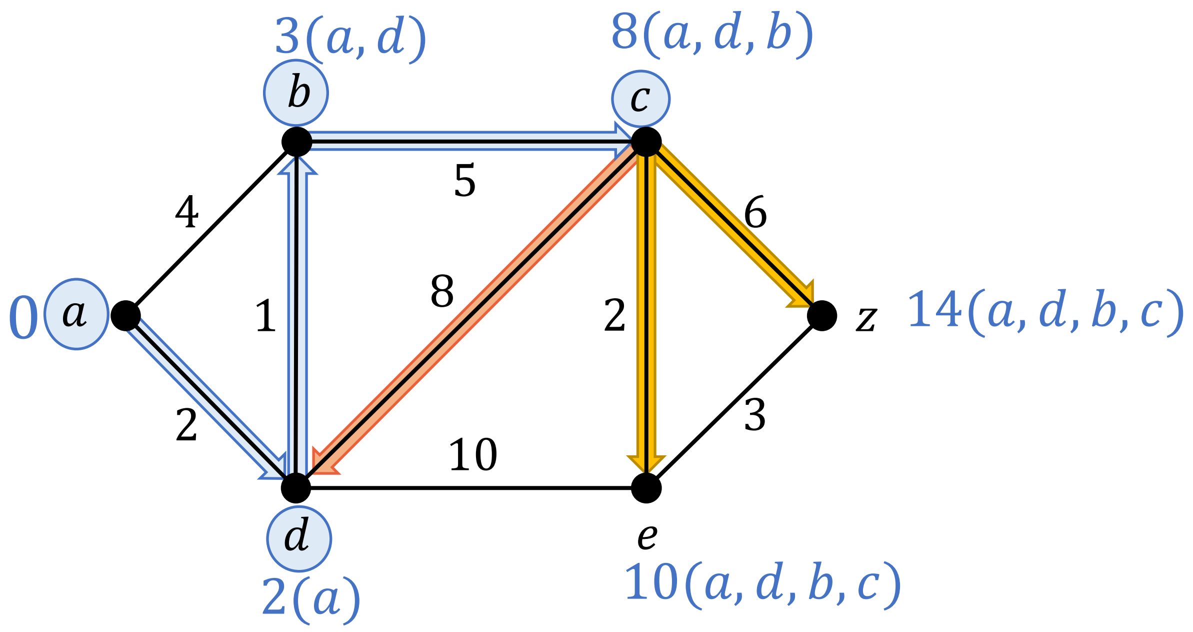


(d)

الگوریتم دایجسترا (Dijkstra's Algorithm)

○ الگوریتم:

۴. در بین رئوسی که تا به حال انتخات نشده اند، مرحله ۳ را آنقدر تکرار میکنیم تا همه رئوس انتخاب شوند.

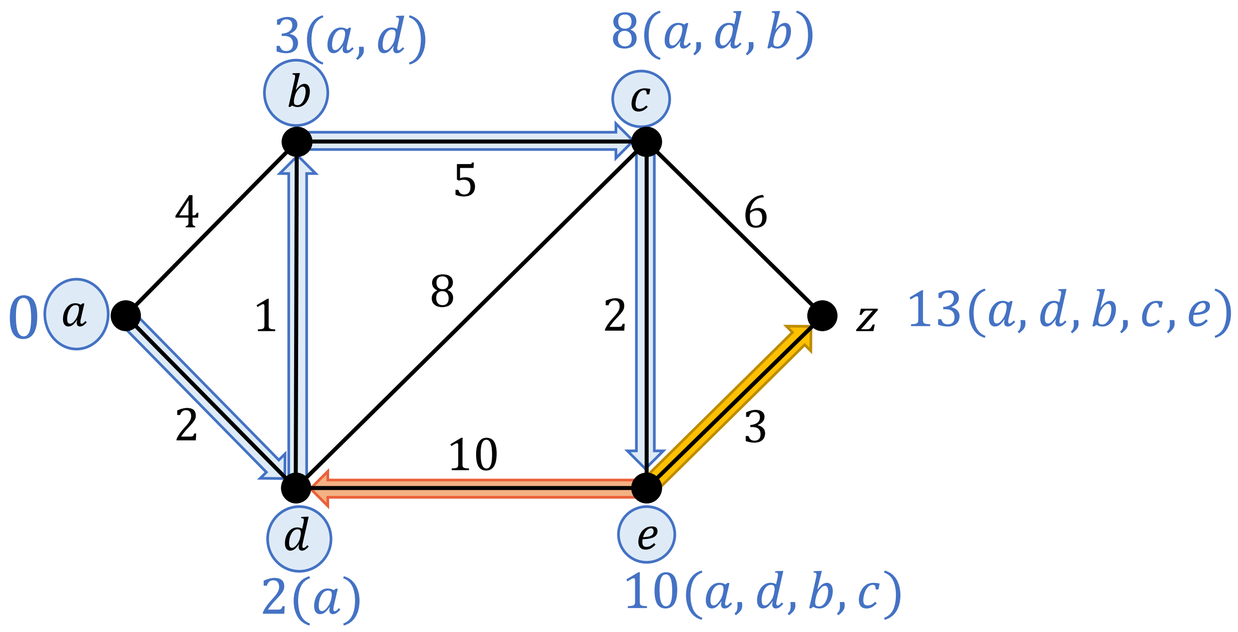


(e)

الگوریتم دایجسترا (Dijkstra's Algorithm)

○ الگوریتم:

۴. در بین رئوسی که تا به حال انتخات نشده اند، مرحله ۳ را آنقدر تکرار میکنیم تا همه رئوس انتخاب شوند.

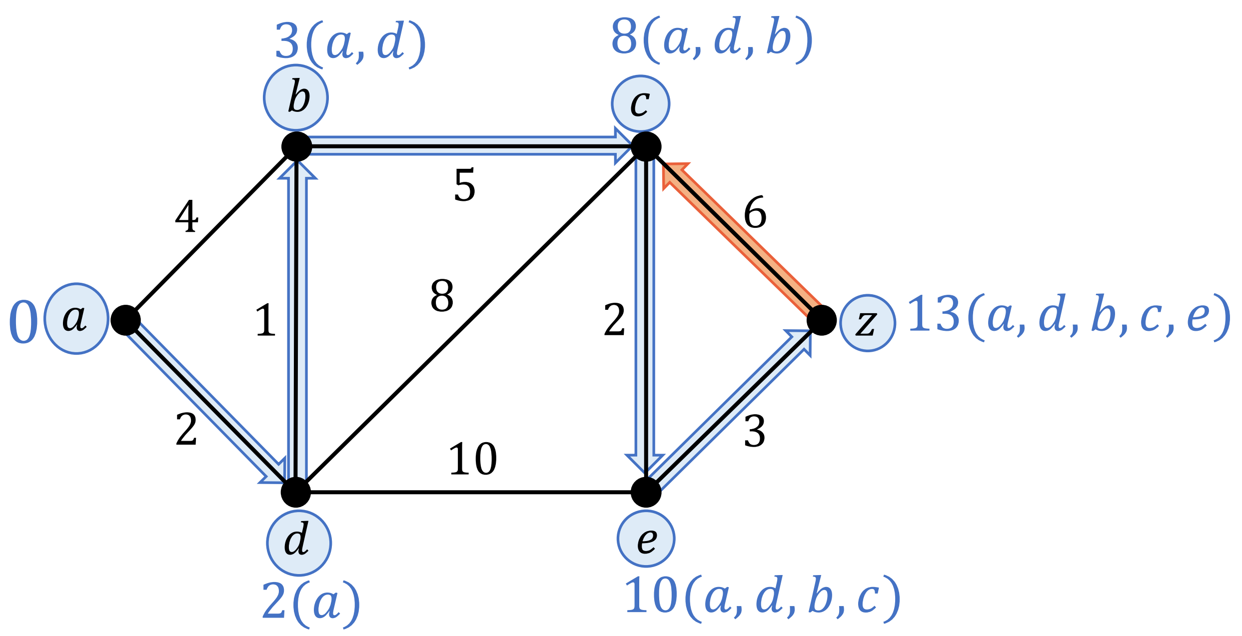


(f)

الگوریتم دایجسترا (Dijkstra's Algorithm)

○ الگوریتم:

۴. در بین رئوسی که تا به حال انتخات نشده اند، مرحله ۳ را آنقدر تکرار میکنیم تا همه رئوس انتخاب شوند.

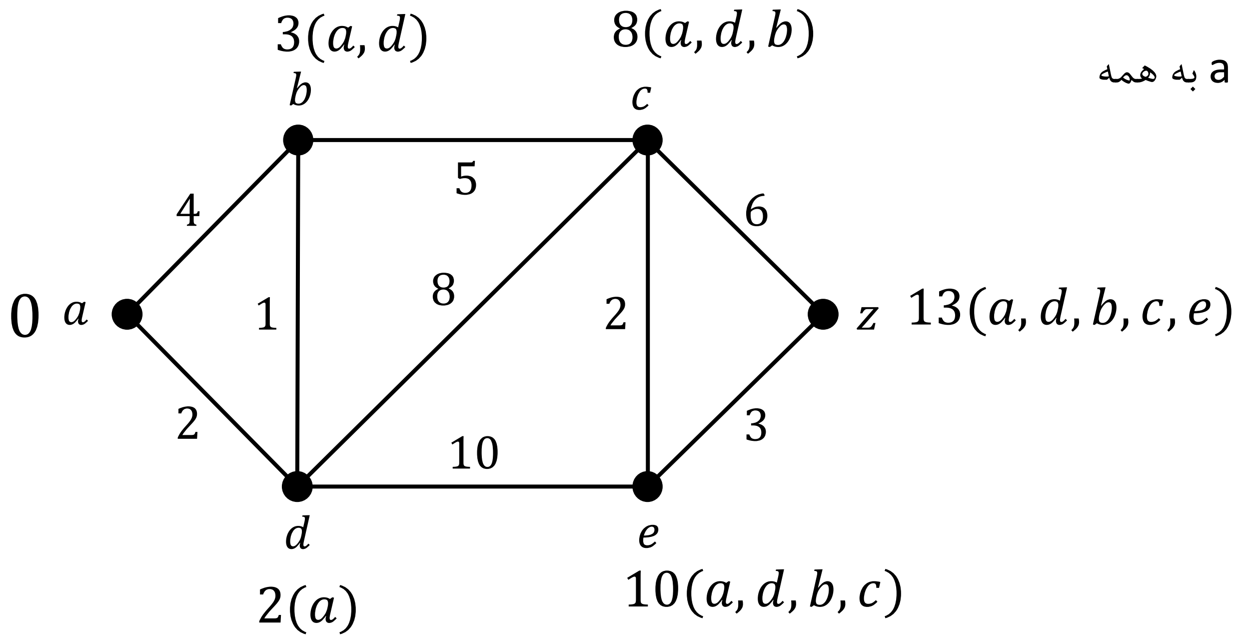


(g)

الگوریتم دایجسترا (Dijkstra's Algorithm)

مثال۳۹) کوتاه ترین مسیر بین رأس a و z را بیابید.

- **کوتاه ترین مسیر بین دو رأس a و z به طول ۱۳ است.**



در این الگوریتم همچنین کوتاه ترین مسیر ها از رأس مبداء a به همه رئوس داخل گراف را نیز پیدا کردیم.

هزینه کوتاه ترین مسیر	مسیر از a به
۳	b
۸	c
۲	d
۱۰	e
۱۳	z

شبه‌کد الگوریتم دیکسترا

procedure $Dijkstra(G, w, a, z)$

for $i :=\ 1$ **to** n

  $L(v_i) :=\ \infty$

$L(a) :=\ 0$

$S :=\ \emptyset$

while $z \notin\ S$

  $u :=$ a vertex not in S with L(u) minimal

  $S :=\ S\ \cup \{u\}$

  for all vertices v not in S

    if $L(u) +\ w(u, v) < L(v)$ **then** $L(v) \coloneqq L(u) + w(u, v)$

return $L(z)$

فهرست مطالب

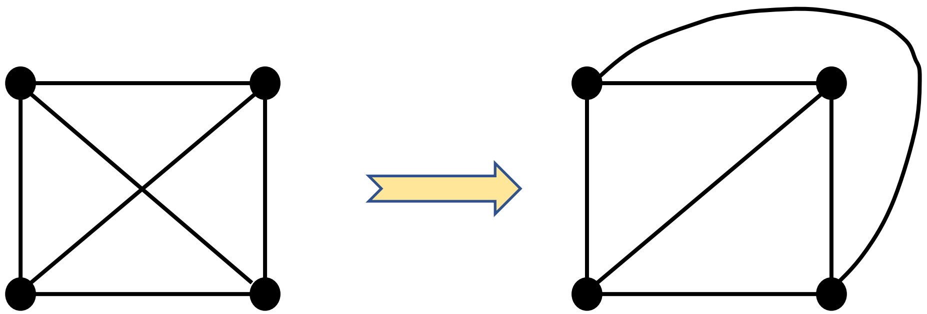
- **قسمت هفدهم**

۱. **گراف های مسطح** (Planar Graphs)

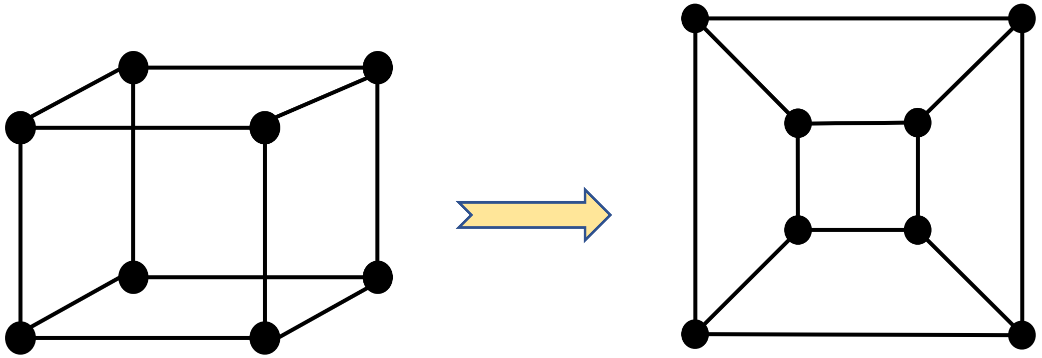
- **فرمول اویلر**(Euler’s Formula)

گراف مسطح : گراف G یک گراف مسطح است، اگر و تنها اگر بتوان این گراف را در صفحه به گونه ای رسم کرد که هیچ یال از آن یال دیگر را **قطع نکند**.(مگر در رئوس)

مثال۴۰) چند نمونه از گراف های مسطح در زیر ببینید.



$(a)K_4$

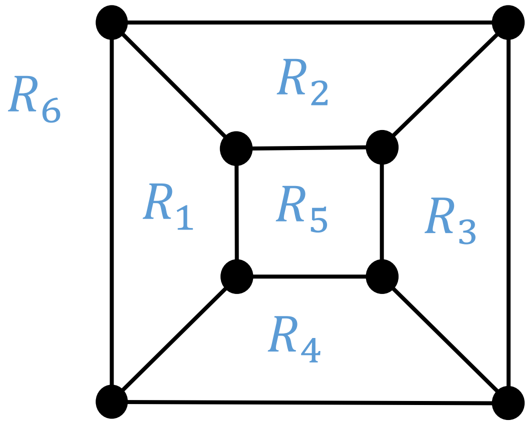


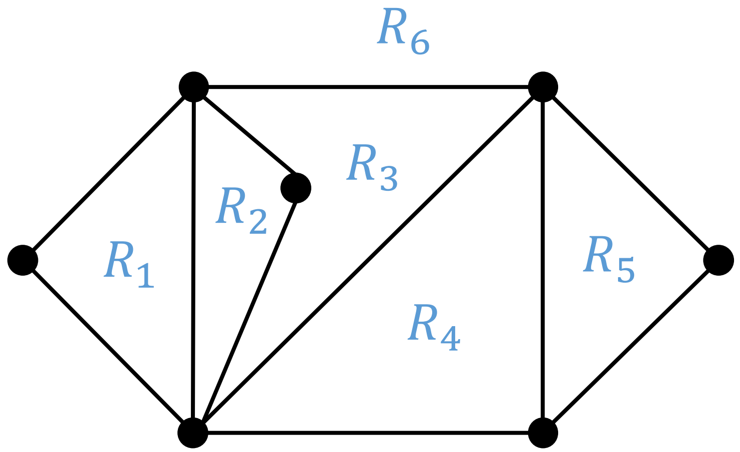
$(b)Q_3$

ناحیه(وجه): در یک ترسیم یک گراف مسطح نواحی محصور بین یال‌ها ناحیه یا وجه نامیده میشود.

نواحی را با R_i نمایش میدهند که i شماره ناحیه است.

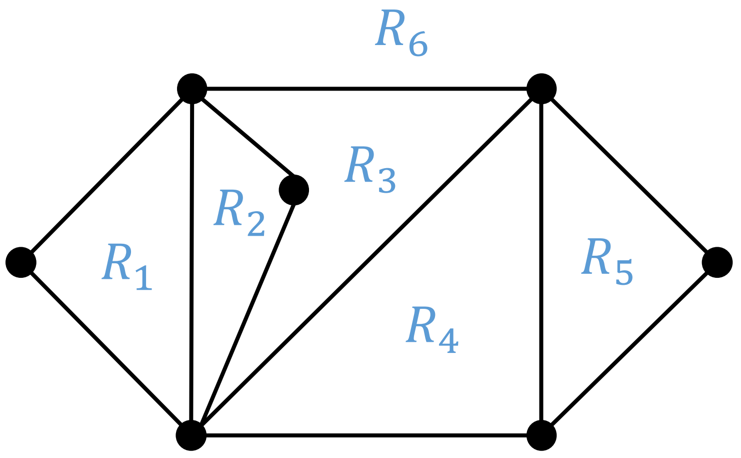
مثال(۴۱) نواحی داخلی و خارجی را در گراف های زیر مشخص کنید.





درجهء ناحیه: طول کوتاه ترین گشت بستهء دور تا دور هر ناحیه را درجه هر ناحیه گویند. درجه هر ناحیه را با $\deg(R_i)$ نمایش میدهند.

مثال۴۲) نواحی داخلی و خارجی را در گراف های زیر مشخص کنید.



$\deg(R_1) = 3$ $\quad$ $\deg(R_4) = 3$

$\deg(R_2) = 3$ $\quad$ $\deg(R_5) = 3$

$\deg(R_3) = 4$ $\quad$ $\deg(R_1) = 7$

$$\sum_{i=1}^{6} \deg(R_i) = 3 + 3 + 4 + 3 + 3 + 6 = 22$$

- **نکته:** در هر گراف مسطح رابطه زیر برقرار است:

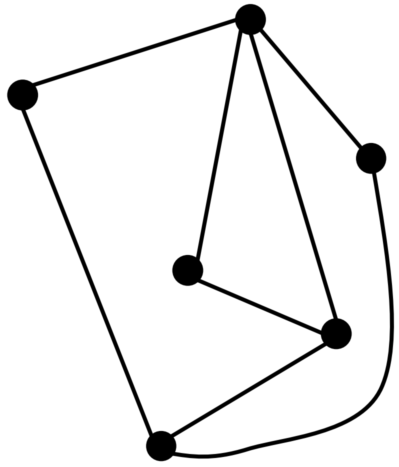
$$\sum_{i=1}^{|R|} \deg(R_i) = 2|E|$$

فرمول اویلر

- اگر گراف G یک گراف همبند و مسطح باشد، که e یال، v رأس و r ناحیه باشد در اینصورت فرمول زیر صادق خواهد بود:

$$r = e - v + 2$$

مثال۴۳) فرمول اویلر را برای گراف زیر بکار ببرید.



$$r = 4$$
$$v = 6$$
$$e = 8$$

$$r = e - v + 2$$

$$4 = 8 - 6 + 2$$

- **قضیه ۱۰** : اگر گراف $G = (V,E)$ یک گراف ساده همبند و مسطح باشد و حداقل دارای ۳ رأس باشد در اینصورت معادلهء زیر برقرار خواهد بود:

$$e \leq 3v - 6$$

- **اثبات:** باتوجه به اینکه گراف ساده است و حداقل ۳ رأس وجود دارد پس درجه هر رأس حداقل ۳ خواهد بود. به فرمول زیر خواهیم رسید:

$$2e = \sum_{i=1}^{r} \deg(R_i) \geq 3\mathrm{r} \;\rightarrow\; 2e \geq 3r$$

- حال با استفاده از فرمول اویلر خواهیم داشت:

$$r = e - v + 2$$

$$2e \geq 3r \;\rightarrow\; 2e \geq 3(e - v + 2) \;\rightarrow\; 2e \geq 3e - 3v + 6 \;\rightarrow\; e \leq 3v - 6$$

پایان فصل چهارم