Tolpam Academy

ریاضیات گسسته

(ساختمان گسسته)

Tolpam Academy

- **نویسندگان:**

پارسا زمانی

(دانشجوی کارشناسی مهندسی کامپیوتر دانشگاه کردستان)

فهرست مطالب

1 فصل اول: منطق و برهان‌ها 3

1.1 مقدمه ای بر منطق گزاره‌ای 5

1.2 ترکیبات منطق گزاره‌ای(اعمال منطقی) 8

1.3 هم‌ارزی در گزاره ها 14

1.4 منطق و عملیات بیتی 21

1.5 مدارهای منطقی 22

1.6 سورها 24

1.7 استدلال‌ها و قواعد آن 28

1.8 روش‌ها و استراتژی‌های اثبات 33

1.9 تمرینات فصل اول 38

2 فصل دوم: مجموعه‌ها 41

2.1 مفاهیم مقدماتی مجموعه‌ها 43

2.2 جبر مجموعه‌ها 48

3 فصل سوم: رابطه‌ها 53

Tolpam Academy

1 فصل اول: منطق و برهان‌ها

- مقدمه ای بر فصل اول

استدلال صحیح، پایه‌ی شکل‌گیری دانش ریاضی و زیربنای حل مسائل در علوم کامپیوتر است. هرجا که نیاز به تعریفی دقیق، نتیجه‌گیری معتبر یا اثبات درستی یک گزاره وجود داشته باشد، **منطق** نقش محوری خود را ایفا می‌کند. ازاین‌رو، منطق را می‌توان زبان مشترک ریاضیات و علوم کامپیوتر دانست؛ زبانی که امکان بیان دقیق مفاهیم، تحلیل استدلال‌ها و اثبات درستی آن‌ها را فراهم می‌سازد. در ریاضیات گسسته نیز تمام مباحث بعدی، از مجموعه‌ها و روابط گرفته تا توابع، گراف‌ها و الگوریتم‌ها، بر پایه‌ی اصول منطقی استوار هستند و بدون تسلط بر این اصول، درک عمیق ساختارهای گسسته امکان‌پذیر نخواهد بود.

در این فصل، ابتدا با مفهوم گزاره و عملگرهای منطقی آشنا می‌شوید و می‌آموزید که چگونه گزاره‌های مرکب از ترکیب گزاره‌های ساده شکل می‌گیرند. سپس با استفاده از جدول‌های ارزش، روش‌های تحلیل، ارزیابی و ساده‌سازی عبارات منطقی بررسی می‌شوند. در ادامه، مفهوم هم‌ارزی منطقی، قوانین استنتاج و شیوه‌های استدلال مورد مطالعه قرار می‌گیرند تا چارچوبی منسجم برای تحلیل گزاره‌ها فراهم شود. بخش مهم دیگری از این فصل به برهان ریاضی اختصاص دارد؛ ابزاری بنیادین که صحت گزاره‌های ریاضی را تضمین می‌کند و اساس شکل‌گیری دانش ریاضی بر آن استوار است. در این بخش، مهم‌ترین روش‌های برهان و کاربرد هر یک در حل مسائل بررسی خواهند شد.

مطالعه‌ی این فصل، بنیان لازم برای ورود به سایر مباحث ریاضیات گسسته را فراهم می‌کند. همان‌گونه که منطق پایه‌ی استدلال است، مجموعه‌ها زبان توصیف اشیا و رابطه‌ها ابزار بیان ارتباط میان آن‌ها هستند. انتظار می‌رود خواننده پس از پایان این فصل، توانایی تحلیل گزاره‌ها، تشخیص استدلال‌های معتبر، به‌کارگیری قوانین منطق و نگارش برهان‌های ریاضی را به‌دست آورده باشد؛ مهارت‌هایی که در سراسر این کتاب و بسیاری از شاخه‌های ریاضیات و علوم کامپیوتر مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

برگی از تاریخ(تاریخچه منطق و برهان‌ها)

Tolpam Academy

نیاز به استدلال صحیح و تشخیص درستی یا نادرستی یک ادعا، از نخستین روزهای شکل‌گیری اندیشه‌ی بشری وجود داشته است. بااین‌حال، تا پیش از یونان باستان، قواعد مشخص و منسجمی برای استدلال وجود نداشت. نخستین گام اساسی در این مسیر را **ارسطو** در قرن چهارم پیش از میلاد برداشت. او با صورت‌بندی منطق قیاسی، چارچوبی نظام‌مند برای استدلال ارائه کرد که نزدیک به دو هزار سال، بنیان منطق و شیوه‌ی استدلال در ریاضیات، فلسفه و بسیاری از علوم به‌شمار می‌رفت.

در قرن نوزدهم، هم‌زمان با گسترش ریاضیات نوین، نیاز به زبانی دقیق‌تر برای بیان استدلال‌ها بیش از پیش احساس شد. در این دوره، **جورج بول** با معرفی منطق بولی، مفاهیم منطقی را در قالب ساختاری جبری بیان کرد و زمینه‌ی شکل‌گیری منطق گزاره‌ای مدرن را فراهم ساخت. اندکی بعد، **آگوستوس دِ مورگان** قوانین مهمی درباره‌ی نقیض گزاره‌ها ارائه کرد که امروزه با نام قوانین دِ مورگان شناخته می‌شوند و از پرکاربردترین قوانین منطق به‌شمار می‌روند. در

ادامه، **گوتلوب فرگه** با بنیان‌گذاری منطق محمول‌ها، توانایی منطق را در بیان دقیق گزاره‌های ریاضی به‌طور چشمگیری گسترش داد و نقشی اساسی در شکل‌گیری منطق ریاضی نوین ایفا کرد.

در قرن بیستم، منطق از مرزهای ریاضیات فراتر رفت و به یکی از پایه‌های علوم کامپیوتر تبدیل شد. طراحی مدارهای دیجیتال، زبان‌های برنامه‌نویسی، الگوریتم‌ها، نظریه‌ی محاسبات، هوش مصنوعی و روش‌های اثبات درستی برنامه‌ها، همگی بر مفاهیم و اصول منطقی استوار هستند. امروزه، منطق و روش‌های برهان نه‌تنها ابزار اصلی استدلال در ریاضیات، بلکه زیربنای بسیاری از فناوری‌های نوین و سامانه‌های محاسباتی به‌شمار می‌روند و نقشی اساسی در تحلیل، طراحی و توسعه‌ی سیستم‌های هوشمند ایفا می‌کنند.

Tolpam Academy

در قرن بیستم، منطق به‌طور جدی وارد علوم کامپیوتر شد. منطق گزاره‌ای و منطق محمول‌ها(گزاره‌نماها)، اساس طراحی مدارهای دیجیتال، زبان‌های برنامه‌نویسی، الگوریتم‌ها و اثبات درستی آن‌ها را تشکیل دادند. امروزه منطق و روش‌های برهان نه‌تنها ابزار اصلی ریاضیدانان، بلکه بخش جدایی‌ناپذیر از علوم مرتبط با ماشین‌ها و کامپیوترها هستند.

1.1 مقدمه ای بر منطق گزاره‌ای

گزاره‌ها[1]

تعریف گزاره : یک جمله خبری است که، دارای ارزش **درست** یا **نادرست** است. ارزش یک گزاره درست را با T و ارزش یک گزاره نادرست را با F نمایش میدهند.

نکته: گزاره ها را اغلب با حروف کوچک انگلیسی « $p , q, r , \dots$ » نمایش میدهیم.

مثال) همهء جملات زیر یک گزاره هستند.

- جمله " امروز دوشنبه است." یک گزاره است.
- معادلهء $1 + 3 = 4$ هم یک گزاره است.
- جمله " تهران مرکز ایران است." یک گزاره است.

ارزش هر گزاره با توجه به **صحت** آن تعیین میشود.

جدول ارزش گزاره ها[2]

به منظور نمایش حالت‌های ارزش یک گزاره، از ابزاری به نام **جدول ارزش** استفاده می‌کنیم. هر گزاره دقیقاً یکی از دو ارزش **درست** یا **نادرست** را می‌پذیرد. تمامی حالت‌هایی که یک گزاره می‌تواند از نظر درست یا نادرست بودن داشته باشد، در جدول ارزش نمایش داده می‌شود. هر سطر از این جدول نشان‌دهندهء یک وضعیت ممکن از ارزش گزاره است .

p
T
F

p
F
T

مثال) جدول ارزش یک گزاره به نام p :

- همان گونه که گفته شد هر گزاره در 2 حالت میتواند درست یا نادرست باشد.

نکته: ترتیب قرارگیری مقادیر درست و نادرست در سطرهای جدول ارزش گزاره‌ها تأثیری بر محتوای منطقی آن‌ها ندارد و می‌تواند به‌صورت دلخواه انتخاب شود.

نکته: البته جدول ارزش با مقادیر دیگری مانند بیت های 0 و 1 هم میتوان مقدار دهی کرد زیرا در علوم کامپیوتر بیت 1 دارای ارزش درست و بیت 0 دارای ارزش نادرست است. به طور کلی با هر نمادی که بتوان ارزش درستی یا نادرستی یک گزاره را مشخص کرد میتوان جدول ارزش گزاره ها را پر کرد.

[1] Propositions
[2] Truth Table

Tolpam Academy

p
1
0

بیت[1]: کامپیوتر اطلاعات را با استفاده از بیت ها ارائه میدهد که شامل دو مقدار صفر(0) و یک (1) میباشد.

Tolpam Academy

[1] bit

مثال) جدول ارزش دو گزاره (p و q):

- دو گزاره در اگر باهم ترکیب شوند ارزش درستی هردو همزمان مورد برسی قرار خواهد گرفت در تشکیل جدول درستی دو گزاره 4 حالت به شکل رو به رو خواهد داشت.

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

$p \quad q$

$T \quad T$

$F \quad F$

$2 * 2 = 4$

نکته: جدول ارزش n گزاره , 2^n حالت دارد.

توضیحات: نکته بالا طبق اصل ضرب تعداد کل حالات ممکن بدست آمده است. تعداد حالات ممکن برای هر گزاره 2 است. و طبق اصل ضرب کل حالات برابر با ضرب همه حالت های ممکن است.

$$2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$$

مثال) جدول ارزش سه گزاره ($p,\ q,\ r$) تعداد کل حالات ممکن را بدست آورید.

- برای 3 گزاره $2^3 = 8$ حالت سطر در جدول ارزش خواهیم داشت به شکل زیر:

p	q	r
F	F	F
F	F	T
F	T	F
F	T	T
T	F	F
T	F	T
T	T	F
T	T	T

توضیحات: برای تکمیل ستون گزاره‌های پایه در جدول ارزش، در ستون گزارهٔ اول، نیمی از سطرها مقدار درست(T) و نیمی دیگر مقدار نادرست(F) را به خود اختصاص می‌دهند.

در ستون گزارهٔ دوم، مقادیر درست و نادرست به‌صورت یکی‌درمیان و در بلوک‌هایی با اندازه نصفِ حالات ستون قبلی قرار می‌گیرند. این الگو برای گزاره‌های بعدی نیز به همین ترتیب ادامه می‌یابد، به‌گونه‌ای که در آخرین ستون، مقدار گزاره در هر سطر تغییر می‌کند.

شایان ذکر است که آغاز چینش مقادیر با T یا F تأثیری در کامل‌بودن جدول ارزش ندارد. هدف از تشکیل جدول ارزش، نمایش تمامی حالت‌های ممکن ارزش صدق گزاره‌ها به‌صورت هم‌زمان است.

Tolpain Academy

گزاره نما[1]

تعریف گزاره‌نما: هر گزاره ای که یک یا چند **متغیر** داشته باشد یک گزاره نما است.

مثال) جملات زیر گزاره‌نما هستند.

- " x عددی اول است " یک گزاره نما است.

- $x + 2y = 10$

[1] Predicate

مثال) کدام یک از جملات زیر گزاره اند؟ ارزش آن را تعیین کنید.

1) عبور نکن.

2) ساعت چند است؟

3) $x + 3 = 5$

4) $2 + 3 = 5$

5) ماه از پنیر سبز ساخته شده است.

6) $2^n \geq 100$

7) مریم یک MP3 دارد.

8) این لپ تاپ 100GB فضا دارد.

حل)

1. این جمله **دستوری** است و گزاره نیست.
2. این جمله **سوالی** است و گزاره نیست.
3. این جمله یک **گزاره‌نما** است و تا زمانی که مقدار x مشخص نشود، گزاره محسوب نمی‌شود.
4. این جمله یک **گزاره** است و ارزش آن درست است.
5. این جمله یک **گزاره** است و ارزش آن نادرست است.
6. این جمله یک **گزاره‌نما** است و با تعیین مقدار n، به گزاره تبدیل می‌شود.
7. این جمله یک **گزاره** است، اما ارزش صدق آن مشخص نیست (وابسته به واقعیت خارجی).
8. این جمله یک **گزاره** است، اما ارزش آن بدون اطلاعات اضافی قابل تعیین نیست.

1.2 ترکیبات منطق گزاره‌ای(اعمال منطقی)

Tolpan Academy

در منطق گزاره‌ای، علاوه بر گزاره‌های ساده، می‌توان با استفاده از اعمال منطقی گزاره‌های مرکب ایجاد کرد. اعمال منطقی این امکان را فراهم می‌کنند که چند گزارهء پایه با یکدیگر ترکیب شده و گزاره‌ای جدید با ارزش صدق مشخص تشکیل دهند. ارزش صدق گزارهء مرکب، به ارزش صدق گزاره‌های تشکیل‌دهنده و نوع عمل منطقی به‌کاررفته بستگی دارد.

در این بخش، مهم‌ترین اعمال منطقی معرفی شده و نحوه‌ی تعیین ارزش صدق آن‌ها با استفاده از جدول ارزش بررسی می‌شود. اعمال منطقی نقش اساسی در مدل‌سازی استدلال‌های منطقی، طراحی مدارهای دیجیتال و مباحث پایه‌ای علوم کامپیوتر دارند.

نقیض[1]

اگر p یک گزاره باشد, نقیض آن را به شکل $\overline{p}$ یا $\neg p$ یا $\sim p$ نشان میدهند و آن را میخوانند (چنین نیست که p).

نکته: ارزش نقیض یک گزاره **خلاف** ارزش خود گزاره است.

- جدول ارزش یک گزاره با نقیض آن به شکل زیر خواهد بود:
- **نکته:** به نماد « $\neg$ » عملگر نقیض[2] گویند.

p	$\neg p$
T	F
F	T

نکته: نقیض یک گزاره آن جمله را **منفی** میکند.

مثال) نقیض

" PC محمد سیستم عامل Linux است."

به زبان ساده بیان کنید.

حل: **چنین نیست** که PC محمد سیستم عامل Linux است. یا PC محمد سیستم عامل Linux **نیست.**

- **به طور کلی کافیست که جمله یا همان گزاره را منفی کنید.**

ترکیب فصلی[3]

اگر p و q دو گزاره باشند, گزارهء مرکب « p یا q » را به صورت ($p \vee q$) نمایش میدهند و آن را ترکیب فصلی دو گزاره میگویند. ارزش $p \vee q$ فقط زمانی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند.

نکته: در حقیقت در ترکیب فصلی درستی حداقل یکی از طرفین ترکیب به معنای درستی کل این گزاره مرکب خواهد بود.

Tolpam Academy

نکته: در بسیاری از زبان‌های برنامه‌نویسی، عملگر disjunction(V) در منطق، با عملگر or پیاده‌سازی می‌شود.

مثال) شبه کد زیر نشان دهنده نحوه استفاده از عملگر ترکیب فصلی در زبان‌های برنامه نویسی است.

```
condition1 OR condition2
```

[1] negation
[2] negation operator
[3] disjunction

ترکیب عطفی[1]

اگر p و q دو گزاره باشند, گزارهء مرکب «p و q» را به صورت ($p \wedge q$) نمایش میدهند و آن را ترکیب عطفی دو گزاره میگویند. ارزش $p \wedge q$ فقط زمانی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند.

نکته: در حقیقت در ترکیب عطفی نادرستی حداقل یکی از طرفین ترکیب به معنای نادرستی کل این گزاره خواهد بود.

نکته: در بسیاری از زبان‌های برنامه‌نویسی، عملگر Conjunction (∧) در منطق، با عملگر and پیاده‌سازی می‌شود.

مثال) شبه کد زیر نشان دهنده نحوه استفاده از عملگر ترکیب عطفی در زبان‌های برنامه نویسی است.

```
condition1 AND condition2
```

- جداول ارزش ترکیب فصلی و ترکیب عطفی

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال) ارزش هریک از گزاره زیر را معلوم کنید.در صورتی که $q: false$ و $p: true$

I. $A = (p \wedge q) \vee (\neg q)$

II. $B = (p) \wedge (\neg p)$

حل)

I. $A = \text{true}$

II. $B = \text{false}$

$A = (p \wedge q) \vee (\neg q)$ $\quad$ $B = (p) \wedge (\neg p)$

$A = (T \wedge F) \vee (\neg F)$ $\quad$ $B = (T) \wedge (\neg T)$

$A = (F) \vee (T)$ $\quad$ $B = (T) \wedge (F)$

$A = \text{True}$ $\quad$ $B = \text{False}$

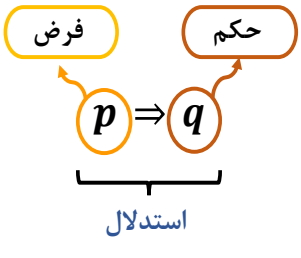
در منطق گزاره‌ها، سه عمل اصلی **نقیض**، **عطف** و **فصل** در ترکیب گزاره ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگرچه ترکیبات پرکاربرد دیگری نیز وجود دارد اما سایر ترکیب‌های منطقی نیز بر پایه‌ی این سه عمل تعریف می‌شوند که در این بخش به تعدادی از آن‌ها اشاره خواهد شد.

[1] Conjunction

ترکیب شرطی[1]

اگر p و q دو گزاره باشند, به گزارهء مرکب $p \to q$ ترکیب شرطی دو گزاره مـی گویند و به صورت « اگر p آنگاه q » آن را میخوانند. ارزش $p \to q$ زمانی نادرست است که طرف چپ ترکیب « p » درست و طرف راست « q » نادرست باشد.

در واقع ترکیب شرطی همان استدلال است که در بخش برهان به طور مفصل به آن خواهیم پرداخت استدلال دو بخش دارد فرض و حکم در استدلال از درستی فرض به درستی حکم میرسیم در در ترکیب شرطی طرف چپ فرض و طرف راست حکم است.



نکته: اگر فرض(سمت چپ ترکیب شرطی) نادرست باشد ترکیب شرطی **همواره** درست است.

دلیل این امر آن است که درصورتی که فرض نادرست باشد در نهایت حتی اگر حکم هم نادرست باشد شما نتیجه ای درستی گرفته اید. و اگر حکم درست باشد هم که در نهایت بازهم نتیجه درست است.

- جدول ارزش ترکیب شرطی به شکل زیر خواهد بود:

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Tolpam Academy

نکته: همانطور که گفته شد همه ترکیب های منطقی از سه ترکیب اصلی نقیض، عطف و فصل ساخته میشوند ترکیب شرطی هم از این قاعده مستثنی نیست در واقع ترکیب شرطی « $p \to q$ » معادل گزاره منطقی « $\neg p \wedge q$ » است البته در آینده در همین فصل به اثبات این موضوع خواهیم پرداخت.

مثال) شبه کد زیر نشان دهنده نحوه استفاده از ترکیب شرطی در زبانهای برنامه نویسی است. فرض کنید میخواهیم گزارهء شرطی زیر را در یک زبان برنامه نویسی پیاده سازی کنیم.

- " اگر x بزرگ تر از 10 باش آنگاه x یک عدد دو رقمی است "

```
1  if x > 10:
2  print ("x: یک عدد دو رقمی است")
```

[1] Conditional Statements

ترکیب دو شرطی[1]

اگر p و q دو گزاره باشند, به گزارهء مرکب: $(p \to q) \wedge (q \to p)$ ترکیب دوشرطی دو گزاره می گویند و به صورت «$p \leftrightarrow q$» نمایش میدهند و آن را میخوانیم "p اگر و فقط اگر q". ارزش $p \leftrightarrow q$ فقط زمانی درست است که ارزش p و q یکسان باشد.

- جدول ارزش ترکیب دو شرطی:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

مثال) برای هرکدام از ترکیب های منطقی عطف، فصل، شرطی و دوشرطی یک گزاره بسازید.

ترکیب عطف	امروز آفتابی است و روز سه شنبه است.
ترکیب فصل	امروز افتابی است یا روز سه شنبه است.
ترکیب شرطی	اگر امروز سه شنبه باشد آنگاه هوا آفتابی است.
ترکیب دوشرطی	امروز سه شنبه است اگر و فقط اگر هوا افتابی باشد.

اولویت اعمال عملگرها: همانند عملگر های محاسباتی مانند $+ , - , \times , \div , \ldots$ که نسبت به هم دارای اولویت هستند. عملگرهای منطقی هم نسبت به هم دیگر دارای اولویت هستند. غیر از این از پرانتز گذاری هم میتوانم برای ایجاد اولویت استفاده کنیم اما به طور کلی اولویت عملگرهای منطقی طبق جدول زیر است:

عملگر	اولویت
$\neg$	۱
$\wedge$	۲
$\vee$	۳
$\to$	۴
$\leftrightarrow$	۵

مثال) در گزارهء $\neg p \to p \wedge r \leftrightarrow \neg q \vee r$ اولویت را با پرانتز گذاری مشخص کنید.

حل)

- باتوجه اولویت عملگرها نتیجه نهایی اعمال عملگرها به صورت زیر خواهد بود.

$$((\neg p) \to (p \wedge r)) \leftrightarrow ((\neg q) \vee r)$$

[1] Biconditional

ترکیب انحصاری[1] (یای غیر شمول)

اگر p و q دو گزاره باشند، **یای غیر شمول** p و q به صورت « $p \oplus q$ » نشان داده میشود و آن را میخوانیم " p یا q (ولی نه هر دو) ".

- جدول ارزش ها:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

نکته: این ترکیب زمانی درست است که **فقط یکی** از گزاره ها درست باشد.

نکته: ترکیب انحصاری با نام xor هم شناخته میشود که مخفف همان Exclusive Or است. و در اکثر زبانهای برنامه نویسی از این کلید واژه استفاده میشود.

تفاوت ترکیبات یا

تا به اینجا متوجه شدیم که به طور کلی دو ترکیب برای « یا » وجود دارد، یکی ترکیب انحصاری و دیگری ترکیب فصلی که به آن پرداخته شد. همانطور که قبلا گفته شد، هر عملی(ترکیبی) در گزاره ها با استفاده از سه ترکیب اصلی **نقیض**، **عطف** و **فصل** ساخته میشود. ترکیب یای انحصاری نیز از این قاعده مستثنی نیست در بخش های بعدی این فصل زمانی که با هم‌ارزی در گزاره ها آشنا شدید به این موضوع خواهیم پرداخت که چگونه همه ترکیبات فرعی از ترکیبات اصلی ساخته میشوند.

برای متوجه شدن بهتر تفاوت ترکیب انحصاری و فصلی به مثال زیر توجه کنید.

مثال) به دو گزاره زیر توجه کنید.

- الف: " پیش غذا سوپ **یا** سالاد است. "
- ب: " همه ی آن ها ورزش کار **یا** هنرمند هستند."

در جمله (گزاره) الف عموما منظور این است که برای پیش غذا یکی از گزینه های سوپ یا سالاد انتخاب شود، یعنی هردو گزینه را نمیتوانید انتخاب کنید پس:

- الف: " پیش غذا سوپ **یا** سالاد است. " ← **ترکیب انحصاری (یای غیر شمولی)**

در جمله ب منظور این است که هر کسی میتواند ورزشکار، هنرمند باشد یا هردو پس پس میتواند کسی وجود داشته باشد، که هم ورزشکار و هم هنرمند باشد پس:

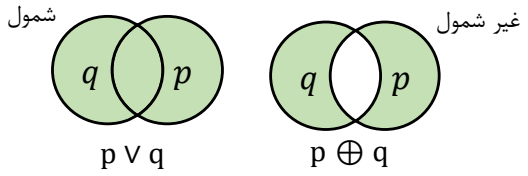
- ب: " همه ی آن ها ورزش کار **یا** هنرمند هستند." ← **ترکیب فصلی (یای شمولی)**

در نهایت در جدول زیر به عنوان جمع بندی تفاوت ترکیبات یا را مشاهده میکنید:

	نماد	شرط درستی
غیر شمولی	$\oplus$	یکی از گزاره ها درست است
شمولی	$\vee$	حداقل یکی از گزاره ها درست است

[1] Exclusive Or

در زیر به وسیله یک نمودار ون تفاوت بین دو ترکیب یا را نشان داده ایم:



در نمودار بالا نواحی هاشور خورده نشان دهنده حالت هایی است که این ترکیبات درست هستند.

1.3 هم‌ارزی در گزاره ها

در منطق گزاره‌ای، گاهی دو گزاره با وجود تفاوت در شکل ظاهری، در تمامی حالت‌های ممکن ارزش صدق یکسانی دارند. در چنین حالتی گفته می‌شود که این دو گزاره هم‌ارز هستند. هم‌ارزی گزاره‌ها نقش مهمی در ساده‌سازی عبارات منطقی، تحلیل استدلال‌ها و اثبات درستی گزاره‌ها دارد. در این بخش، مفهوم هم‌ارزی گزاره‌ها معرفی شده و روش تشخیص آن با استفاده از **جدول ارزش** بررسی می‌شود.

هم‌ارزی منطقی[1]

اگر دو گزاره p و q در همه ی حالت های ممکن ارزش برابری داشته باشند آن دو گزاره هم ارز منطقی هم هستند آن ها را به این صورت « $p \equiv q$ » نمایش میدهیم.

نکته: گزاره های p و q را هم ارز منطقی نامیم اگر $p \leftrightarrow q$ یک راستگو[2] باشد.

p	q
T	T
F	F

$\rightarrow$ $\boldsymbol{p \equiv q}$

- یک گزاره را راستگو گویند، اگر ارزش آن همواره درست باشد.

پیشتر گفتیم که همه ترکیبات پرکاربرد با استفاده از سه ترکیب اصلی ساخته میشوند در این بخش به این موضوع خواهیم پرداخت و اثبات میکنیم که همه ترکیبات فرعی پرکاربرد یک معادل هم‌ارز دارند که از ترکیب سه عملگر اصلی ساخته میشوند.

مثال) اثبات کنید که گزارهء $p \wedge \neg p \equiv F$ و گزارهء $p \vee \neg p \equiv T$ باشد.

- برای اثبات هم ارزی باید هر دو طرف معادلهء هم‌ارزی در تمامی حالات در جدول ارزششان ارزش صدق یکسانی داشته باشند.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

به طور مثال در این بخش گزاره $p \vee \neg p \equiv T$ در همه حالات ارزش درست دارد.

[1] Logical Equivalence
[2] Tautology

مثال) نشان دهید که $\neg(p \vee q)$ و $\neg p \wedge \neg q$ به طور منطقی هم‌ارز اند.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

- با توجه به اینکه هر دو گزاره در تمامی حالات ارزش یکسانی دارند این دو گزاره هم‌ارز منطقی هستند.
- اثبات هم ارزی این دو گزاره قانون بسیار مهمی را در منطق گزاره ها اثبات میکند به نام قانون دمورگان نتیجه این مثال را به عنوان یک قانون می‌پذیریم.

مثال) نشان دهید که $p \vee (q \wedge r)$ و $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ به طور منطقی هم ارز اند.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

- نتیجه این مثال یک قانون بسیار مهم در منطق گزاره ها را به نام قانون پخش پذیری اثبات میکند.

مثال) اثبات کنید که ترکیب شرطی $p \to q$ هم‌ارز منطقی گزارهء مرکب $\neg p \vee q$ است.

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	T	F	T

Tolpam Academy

- اینجا اثبات کردیم که ترکیب شرطی در حقیقت با ترکیبات اصلی نقیض و فصل ساخته میشود، ولی به این دلیل که یک گزاره مرکب بسیار پرکاربرد است ترجیح میدهیم که از یک نماد بخصوص برای آن استفاده کنیم. دیگر ترکیبات فرعی پرکاربرد هم به این شکل با همین عملگرهای اصلی ساخته میشوند تنها باید یک گزاره هم‌ارز با سه ترکیب اصلی برای آن ها پیدا کنید.

مثال) اثبات کنید که ترکیب انحصاری $p \oplus q$ هم‌ارز منطقی گزارهء مرکب $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ است.

p	q	$p \oplus q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
F	F	F	T	T	T	T	F
F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T	T	F

گزاره های مرکب

ترکیبی از گزاره های ساده تر با استفاده از ترکیبات (عطفی , فصلی , شرطی , دو شرطی و ...) به صورت پیچیده‌تر است.

مثال) چند گزاره مرکب :

i. $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$

ii. $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$

iii. $(p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$

همان طور که در مثال قبل دیدید بعضی از گزاره های مرکب و پیچیده به واسطه تعداد گزاره‌های زیاد و ترکیبات پیچیده‌ای که دارند نمیتوان از جدول ارزش ها برای آن ها استفاده کرد زیرا کار بسیار مشکلی خواهد بود. به این دلیل ما این گزاره های مرکب پیچیده را با بهره‌گیری از قوانین هم ارزی میتوانیم ساده‌سازی کنیم. و جدول ارزش را برای گزاره ساده شده تشکیل دهیم که ارزش آن معادل همان گزاره پیچیده است.

نکته: برای **ساده‌سازی** گزاره های مرکب میتوانیم از **قوانین هم ارزی** استفاده کنیم.

قوانین هم‌ارزی[1]

یکی دیگر از راه‌های اثبات هم‌ارزی، استفاده از **قوانین هم‌ارزی** است. این قوانین، همانند جدول ارزش، ابزارهایی برای اثبات هم‌ارزی دو گزاره به شمار می‌آیند. همان‌طور که در مثال‌های قبل مشاهده کردیم، برای اثبات هم‌ارزی دو گزاره می‌توان جدول ارزش آن‌ها را رسم کرد؛ اما قوانین هم‌ارزی خود گزاره‌هایی هستند که هم‌ارزی آن‌ها از پیش اثبات شده است. ازاین‌رو می‌توان از این قوانین به‌عنوان ابزار کمکی استفاده کرد، به‌ویژه در مواردی که رسم جدول ارزش دشوار است یا گزاره‌ها ساختار پیچیده‌ای دارند، که در این حالت فرآیند اثبات بسیار ساده‌تر خواهد شد.

در مثال‌های پیشین، چند نمونه از این قوانین، از جمله **قانون دمورگان** و **قانون پخش‌پذیری** را اثبات کردیم. در ادامه، قصد داریم به‌صورت جدی‌تر و مفصل‌تر به بررسی این قوانین بپردازیم و نحوه استفاده از آن‌ها را برای اثبات هم‌ارزی‌های منطقی، همچنین ساده‌سازی و تحلیل گزاره‌ها و قواعد منطقی پیچیده، فرا بگیریم.

فهرست قوانین هم ارزی

در ادامه، جدولی از مهم‌ترین قوانین هم‌ارزی منطقی را معرفی می‌کنیم. در تمام این روابط، فرض می‌شود که p ، q و r گزاره‌های منطقی هستند.

[1] Logical Equivalences

هم ارزی های منطقی	
نام	هم ارزی
قوانین همانی	$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$
قوانین تسلط	$p \vee T \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$
قوانین خودنمایی	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
نقیض مضاعف	$\neg(\neg p) \equiv p$
قوانین تعویض پذیری	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
قوانین شرکت پذیری	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
قوانین پخش پذیری	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
قوانین دمورگان	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
قوانین جذب	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
قوانین نقیض	$p \vee \neg p \equiv T$ $p \wedge \neg p \equiv F$

همهء این قوانین را با استفاده از جدول ارزش میتوانید اثبات کنید، همانند قوانین دمورگان و پخش‌پذیری که در مثال‌های قبلی به آنها پراختیم.

قوانین هم‌ارزی شرطی و دو شرطی

ادامه قوانین هم‌ارزی برای گزاره های شرطی و دو شرطی به شکل زیر خواهد بود:

هم ارزی های منطقی شرطی و دو شرطی
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$ $p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$ $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Tolpam Academy

مثال) گزارهء $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ را ساده کنید.

- ابتدا قانون پخش پذیری(توزیع پذیری) را را اعمال میکنیم چون گزاره مانند طرف راست این قانون است:

$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p \wedge (q \vee \neg q)$

- حال طبق قانون نقیض برای داخل پرانتز داریم:

$p \wedge (q \vee \neg q) \equiv p \wedge T \equiv p$

- درنهایت گزارهء بالا معادل زیر است:

$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p$

مثال) هم‌ارزی $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$ را بدون استفاده از جدول با قوانین هم‌ارزی اثبات کنید.

- ابتدا یکی از طرفین معادلهء هم ارزی را انتخاب کرده و سعی میکنیم با اعمال قوانین هم‌ارزی آن را به شکل طرف دیگر معادله دربیاوریم.
- با استفاده از قوانین شرطی طرف چپ معادله را تغییر میدهیم:

$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q)$

- حال با اعمال نقیض در عبارت داخل پرانتز(قانون دمورگان) ادامه میدهیم.

$\neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$

حال معادله هم‌ارزی زیر اثبات شد.

$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

مثال) جدول درستی گزاره های زیر را رسم کنید.

1) $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$

2) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$

حل) چون گزاره ها کمی پیچیده هستند برسی میکنیم که ببینیم آیا میشود ابتدا گزاره ها را به وسیله قوانین هم‌ارزی ساده سازی کنیم و برای گزاره ساده تر جدول درستی رسم کنیم.

:1

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$
$\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q]$
$\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$
$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F$
$\equiv \neg p \wedge \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Tolpam Academy

:2

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$$
$$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$$
$$\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$$
$$\equiv T \vee T$$
$$\equiv T$$

- گزارهء دوم یک گزاره همواره درست است نیاز به رسم جدول ارزش نیست.

مثال) نشان دهید که: $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

حل)

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$
$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$
$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$$
$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$
$$\equiv (p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

عکس[1] , عکس نقیض[2] و معکوس[3]

در این بخش به بررسی مفهوم عکس، عکس نقیض و معکوس جملات شرطی می‌پردازیم. این مفاهیم، پایه‌ای در منطق ریاضی و ریاضیات گسسته هستند و نقش مهمی در استدلال و اثبات‌ها دارند. با درک صحیح این سه مفهوم، می‌توان روابط بین جملات شرطی را بهتر تحلیل کرد، صحت استدلال‌ها را ارزیابی نمود و از خطاهای منطقی جلوگیری کرد. در ادامه، هر یک از این حالت‌ها را با تعریف رسمی و مثال‌های کاربردی بررسی خواهیم کرد تا فهم عمیق و شهودی نسبت به آن‌ها حاصل شود.

عکس: گزارهء $q \rightarrow p$ عکس گزارهء $p \rightarrow q$ نامیده میشود.

عکس نقیض: گزارهء $\neg q \rightarrow \neg p$ عکس نقیض $p \rightarrow q$ نامیده میشود.

معکوس: گزارهء $\neg p \rightarrow \neg q$ معکوس گزارهء $p \rightarrow q$ نامیده میشود.

- **قضیه**: ارزش **عکس نقیض** یک گزاره **برابر** ارزش همان گزاره است.
- **قضیه**: ارزش **معکوس** یک گزاره **برابر** ارزش **عکس** آن گزاره است.

[1] Converse
[2] Contrapositive
[3] Inverse

- اثبات قضایای عکس نقیض و معکوس :

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to \neg q$	$\neg q \to \neg p$
T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

مثال) عکس , عکس نقیض , معکوس گزارهء شرطی "هر وقت باران ببارد , تیم ملی برنده میشود." را به زبان ساده بیان کنید.

p: باران می‌بارد. ، q: تیم ملی برنده می‌شود.

- عکس($q \to p$): "هر وقت تیم ملی برنده شود , باران میبارد."
- عکس نقیض($\neg q \to \neg p$): "هر وقت تیم ملی برنده نشود , باران نمیبارد."
- معکوس ($\neg p \to \neg q$): "هر وقت باران نبارد , تیم ملی برنده نمیشود."

مثال: تحلیل جملات شرطی و مشتقات آن

- فرض کنید جمله شرطی زیر داده شده است:

« اگر یک عدد n زوج باشد، آنگاه n^2 عددی زوج است. »

- حال به بررسی مشتقات منطقی این جمله می‌پردازیم:

1. **معکوس:**

- معکوس جمله شرطی، فرض و نتیجه را هر دو نقیض می‌کند:

« اگر n عددی **فرد** باشد، آنگاه n^2 عددی **فرد نیست**. »

نکته: **معکوس همیشه هم‌ارز منطقی با جمله اصلی نیست**؛ در این مثال، معکوس درست نیست، چون مربع عدد فرد همواره فرد است.

2. **عکس** :

- عکس جمله شرطی، فرض و نتیجه را جابه‌جا می‌کند:

« اگر n^2 عددی زوج باشد، آنگاه n عددی زوج است. »

- این جمله هم درست است و با اصل قضیه درست، هم‌ارز نیست، ولی در این **مورد خاص**، صحت آن برقرار است.

Tolpam Academy

3. **عکس نقیض :**

عکس نقیض جمله شرطی، هم فرض و نتیجه را نقیض می‌کند و هم جابه‌جا می‌کند:

« اگر n^2 عددی **فرد** باشد، آنگاه n عددی **فرد** است. »

نکته مهم: عکس نقیض همیشه با جمله اصلی **هم‌ارز منطقی** است. در این مثال، این جمله دقیقاً همان حقیقتی را بیان می‌کند که جمله اصلی بیان کرده است، اما از زاویه‌ای متفاوت.

1.4 منطق و عملیات بیتی[1]

معنای واژه‌ی بیت از عبارت رقم دودویی (Binary Digit) گرفته شده است، زیرا صفر و یک ارقامی هستند که در نمایش دودویی اعداد به کار می‌روند. آمارشناس مشهور جان توکی (John Tukey) این اصطلاح را در سال ۱۹۴۶ معرفی کرد.

بیت

کامپیوترها اطلاعات را با استفاده از بیت‌ها نمایش می‌دهند بیت نمادی است که دو مقدار صفر(0) و یک (1) میتواند داشته باشد.

از یک بیت می‌توان برای نمایش یک ارزش منطقی استفاده کرد، زیرا تنها دو ارزش منطقی وجود دارد، یعنی درست $(True)$ و نادرست $(False)$. همان‌گونه که معمول است، برای نمایش مقدار درست از بیت 1 و برای نمایش مقدار نادرست از بیت 0 استفاده می‌کنیم. یعنی 1 نمایانگر درست (T) و 0 نمایانگر نادرست (F) است.

Truth value	*Bit*
T	1
F	0

Tolpam Academy

عملیات بیتی در کامپیوترها متناظر با عملگرهای منطقی هستند. با جایگزین کردن مقدار درست با عدد یک و مقدار نادرست با عدد صفر در جدول‌های درستی عملگرهای $\wedge$ ، $\vee$ و $\oplus$، جدول نشان‌داده‌شده برای عملیات بیتی متناظر به دست می‌آیند.

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

نکته: در اعمال منطقی روی رشته هایی از بیت ها ارزش بیت ها نظیر به نظیر باید در نظر گرفته شود.

[1] Logic and Bit Operations

مثال) عمل زیر را روی دو رشته بیت داده شده انجام دهید.

$$0001 \ \vee \ 1010 \equiv 1011$$

مثال) هریک از عبارات زیر را حساب کنید.

1) $11000 \wedge (01011 \vee 11011) \equiv 11000 \wedge (11011) \equiv 11000$

2) $(01111 \wedge 10101) \vee 01000 \equiv$ حل با دانشجو

3) $(01010 \oplus 11011) \oplus 01000 \equiv (10001) \oplus 01000 \equiv 11001$

4) $(11011 \vee 01010) \wedge (10001 \vee 11011) \equiv$ حل با دانشجو

1.5 مدارهای منطقی[1]

منطق گزاره‌ای کاربردهای مهمی در طراحی سخت‌افزار کامپیوتر دارد. این کاربرد بر این ایده استوار است که می‌توان مقادیر درست و نادرست گزاره‌ها را به‌صورت سیگنال‌های دودویی تفسیر کرد و با استفاده از عملگرهای منطقی، پردازش‌های محاسباتی را انجام داد. مدارهای منطقی نمونه‌ای از این کاربرد هستند و نقش اساسی در سیستم‌های دیجیتال ایفا می‌کنند.

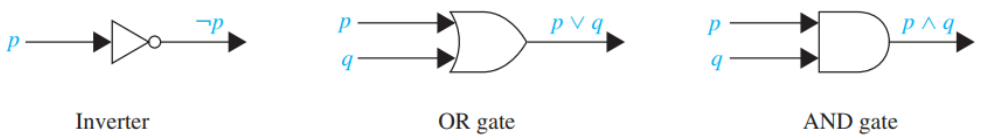
یک مدار منطقی (یا مدار دیجیتال) سیگنال‌های ورودی را دریافت می‌کند که هر سیگنال یک بیت و برابر با ۰ یا ۱ هستند، و بر اساس آن‌ها سیگنال یا سیگنال‌های خروجی تولید می‌کند. در این بخش، تمرکز ما بر مدارهای منطقی با یک خروجی خواهد بود، اگرچه در حالت کلی مدارهای دیجیتال می‌توانند چندین خروجی داشته باشند. هدف این بخش، ارائهٔ یک معرفی کوتاه از مدارهای منطقی و نشان دادن ارتباط آن‌ها با منطق گزاره‌ای است.

آشنایی با این مبحث، پلی میان منطق نظری و سیستم‌های دیجیتال ایجاد می‌کند و درک مفاهیمی مانند طراحی سخت‌افزار، معماری کامپیوتر و مدارهای دیجیتال را ساده‌تر می‌سازد. در این بخش، مفاهیم پایه‌ای مدارهای منطقی و ارتباط آن‌ها با منطق گزاره‌ای معرفی می‌شود.

Tolpam Academy

گیت‌های منطقی پایه[2]

مدارهای دیجیتال پیچیده را می‌توان با استفاده از سه مدار پایه که گیت‌های منطقی نامیده می‌شوند ساخت. این گیت‌ها شامل گیت NOT، گیت OR و گیت AND هستند.



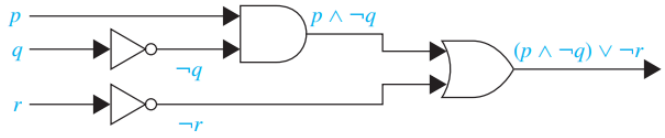
[1] Logic Circuits
[2] Basic logic gates

گیت NOT یک بیت ورودی p را دریافت کرده و خروجی آن نقیض ورودی، یعنی $\neg p$، است. گیت OR دو سیگنال ورودی p و q را می‌گیرد و خروجی آن $p \vee q$ می‌باشد. در نهایت، گیت AND نیز دو ورودی p و q را دریافت کرده و خروجی آن $p \wedge q$ است.

با ترکیب این سه گیت پایه می‌توان مدارهای منطقی پیچیده‌تری ساخت. نمونه‌ای از چنین ترکیبی، مداری است که از اتصال چند گیت برای انجام یک عمل منطقی پیچیده‌تر استفاده می‌کند.

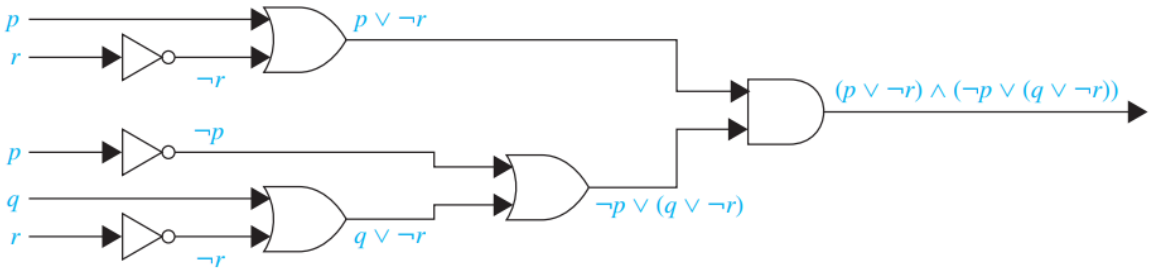
برای تعیین خروجی یک مدار منطقی که از گیت‌های پایه ساخته شده است، کافی است مقدار سیگنال‌ها را از ورودی‌ها به سمت خروجی دنبال کنیم و خروجی هر گیت را بر اساس ورودی‌های آن محاسبه نماییم.

مثال) در مدار زیر خروجی منطقی به شکل زیر خواهد بود.



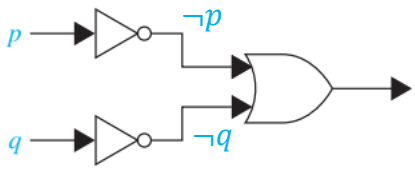
مثال) یک مدار بسازید که خروجی زیر را با ورودی های r و q و p به ما بدهد.

- $(p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee (q \vee \neg r))$



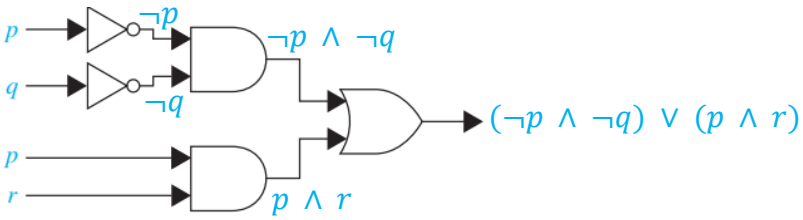
مثال) خروجی هریک از مدار های زیر چیست؟

1)



خروجی: $\neg p \vee \neg q$

2)



خروجی: $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r)$

1.6 سورها[1]

در بخش‌های قبل با گزاره‌نما آشنا شدیم و گفتیم که گزاره‌نما با دریافت مقادیر مختلف برای متغیرها به گزاره تبدیل میشود، در ادامه با توجه به اینها به تعریف محول‌ها و سورها خواهیم پرداخت. ما یک گزاره‌نما را با حروف بزرگ P, Q, R نمایش میدهیم.

مثال) عبارات زیر مثال‌های از گزاره‌نما هستند.

- $P(x): x > 0$
- $Q(x)$: x عددی زوج است
- $R(x, y): x < y$

عالم سخن(دامنه)

مقادیری که متغیرهای یک گزاره نما میتوانند داشته باشند، عالم سخن گزاره‌نما گفته می‌شود.

نکته: عالم سخن همانند دامنه توابع ریاضیاتی است، که مشخص کننده‌ی مقادیر مجاز ورودی تابع هستند.

مثال) به مثال‌های زیر از عالم سخن توجه کنید.

- x یک عدد اول است. : عالم سخن اعداد طبیعی است.
- x 4 لیتر ظرفیت دارد: عالم سخن همه ظروف حمل یا نگهداری مایعات است.
- x جذر یک عدد طبیعی است: عالم سخن اعداد حقیقی است.

مجموعه جواب

زیر مجموعه‌ای است از عالم سخن که مقادیر آن گزاره‌نما را تبدیل به یک گزاره با ارزش درست میکنند.

مثال) مجموعه جواب مثال قبل را مشخص میکنیم.

- x یک عدد اول است. : مجموعه جواب ها $2,3,5,7, \ldots$
- x 4 لیتر ظرفیت دارد: مجموعه جواب ظروف 4 لیتری است.
- x جذر یک عدد طبیعی است: مجموعه جواب $1, \sqrt[2]{2}, \sqrt[2]{3}, \ldots$

مثال) فرض کنید که $P(x)$, حکم " $x \leq 4$ " باشد در این صورت ارزش گزاره های رو به رو چیست؟

1) $P(0) \rightarrow 0 \leq 4 \rightarrow True$

2) $P(4) \rightarrow 4 \leq 4 \rightarrow True$

3) $P(6) \rightarrow 6 \nleq 4 \rightarrow False$

- با جایگذاری مقادیر مختلف از عالم سخن گزاره هایی ساخته میشود که ارزش درست یا نادرست دارند.

نکته: مقادیری از عالم سخن که یک گزاره با ارزش درست میسازند عضوی از مجموعه جواب هستند.

[1] Quantifiers

سور عمومی[1]

به نماد $\forall$ که به معنای « به ازای هر» یا « به ازای جمیع مقادیر» است و پیش از بعضی گزاره نماها قرار می گیرد سور عمومی می گویند.($\forall$ از کلمهء All گرفته شده است.)

نماد ریاضی	معادل معنایی
$\forall x; P(x)$	همهء مقادیر x , ویژگی P را دارد.

مثال) معادل معنایی دو سور عمومی زیر چیست؟

1. $\forall x \in \mathbb{Z}: 2x + 1 \in O$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\,;\ x^2 \geq 0$

1. خوانده میشود به ازای همهء مقادیر صحیح x, $2x + 1$ عددی فرد است.
2. خوانده میشود به ازای همهء مقادیر x , x^2 بزرگ تر مساوی صفر است.

نکته: سور عمومی زمانی درست است که مثال نقض نداشته باشد، به عبارت دیگر عالم سخن (دامنه) متغیر گزاره نما با مجموعه جواب یکی باشد. یعنی $S = D$.

سور وجودی[2]

به نماد $\exists$ که به معنای « وجود دارد » یا « به ازای بعضی از مقادیر » است و پیش از بعضی گزاره نماها قرار میگیرید، سور وجودی میگویند.($\exists$ از کلمهء Exist گرفته شده است.)

نماد ریاضی	معادل معنایی
$\exists x; P(x)$	وجود دارد x که ویژگی P را دارد.

Tolpam Academy

مثال) معادل معنایی دو سور وجودی زیر چیست؟

1. $\exists x \in E: x = 3k (k \in \mathbb{Z})$
2. $\exists x \in \mathbb{R}; 4x^2 + 1 = 4x$

1. که خوانده میشود بعضی از عددهای زوج مضرب 3 هستند.
2. که خوانده میشود عددی حقیقی مانند x وجود دارد که در رابطهء $4x^2 + 1 = 4x$ صدق میکند.

نکته: سور وجودی زمانی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد , یا به عبارت دیگر دست کم به یک عضو از عالم سخن (دامنهء) متغیر آن رابطه برقرار باشد.($S \neq \phi$)

[1] Universal Quantifier
[2] Existential Quantifier

نقیض سورها به این ترتیب است که با اعمال نقیض روی سور عمومی این عبارت به سور وجودی تبدیل میشود و بلعکس:

$\neg(\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \neg p(x)$

$\neg(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \neg(x)$

مثال) نقیض گزارهء "همه هنرمندهای بزرگ ایرانی متولد رشت اند" میشود:

- "بعضی از هنرمند های بزرگ ایرانی متولد رشت نیستند".

مثال) نقیض گزارهء $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + x + 1 > 0$ میشود:

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + x + 1 > 0) \equiv \forall x \neg(\in \mathbb{R}: x^2 + x + 1 > 0)$$
$$\equiv \forall x \in \mathbb{R}: x^2 + x + 1 \leq 0$$

مثال) نقیض گزارهء $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: x > y$ میشود:

$$\sim(\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: x > y) \equiv \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}: x \leq y$$

مثال) نقیض احکام $\forall x(x^2 > x)$ و $\exists x(x^2 = 2)$ چیست؟

$$\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x) \rightarrow \neg\forall x(x^2 > x) \equiv \exists x \neg(x^2 > x) \equiv \exists x(x^2 \leq x)$$
$$\neg\exists x\, Q(x) \equiv \forall x\, \neg Q(x) \rightarrow \neg\exists x(x^2 \neq 2) \equiv \forall x \neg(x^2 \neq 2) \equiv \forall x(x^2 \neq 2)$$

مثال) نقیض هریک از گزاره های زیر را طوری بیان دارید که نماد نقیض قبل از گزاره نما قرار گیرد.

a. $\forall x\, \exists y\, \forall z\, T(x,y,z)$
b. $\forall x\, \exists y\, P(x,y) \vee \forall x\, \exists y\, Q(x,y)$
c. $\forall x\, \exists y\, (P(x,y) \wedge \exists z\, R(x,y,z))$
d. $\forall x\, \exists y\, (P(x,y) \rightarrow Q(x,y))$
e. $\exists x\, \exists y\, P(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, Q(x,y)$
f. $\exists x\, \exists y\, (Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$
g. $\forall y\, \exists x\, \exists z (T(x,y,z) \vee Q(x,y))$

	نقیض
a	$\exists x\, \forall y\, \exists z\, \neg T(x,y,z)$
b	$\exists x\, \forall y\, \neg P(x,y) \wedge \exists x\, \forall y\, \neg Q(x,y)$
c	$\exists x\, \forall y\, (\neg P(x,y) \vee \forall z\, \neg R(x,y,z))$
d	$\exists x\, \forall y\, (P(x,y) \wedge \neg Q(x,y))$
e	$\forall x\, \forall y\, \neg P(x,y) \vee \exists x\, \exists y\, \neg Q(x,y)$
f	$\forall x\, \forall y\, ((\neg Q(x,y) \vee \neg Q(y,x)) \wedge (Q(x,y) \vee Q(y,x)))$
g	$\exists y\, \forall x\, \forall z\, (\neg T(x,y,z) \wedge \neg Q(x,y))$

Tolpam

ارزش درستی گزاره های سوری

اگر بتوان همهء عناصر موجود در عالم سخن(دامنهء) سور را به این $x1\ ,\ x2\ ,\ \dots\ ,\ xn$ شکل لیست کرد, میتوان گفت که سور ها مجموعه ای از ترکیبات به شکل روبه رو هستند.

$$1.\ \ \exists x\, P(x)\ \equiv\ P\,(x1) \vee P\,(x2) \vee\ \cdots\ \vee P\,(xn)$$

همانطور که قبلا گفته شد ارزش سور وجودی زمانی درست است که بتوان حداقل یک جواب پیدا کرد که گزاره‌نما را به یک گزاره با ارزش درست تبدیل کند پس میتوان به این شکل مانند معادلهء بالا آن را بیان کرد که رابطه « یا » بین همهء عناصر عالم سخن برقرار خواهد بود.

$$2.\ \ \forall x\, P(x)\ \equiv\ P\,(x1) \wedge P\,(x2) \wedge\ \cdots\ \wedge P\,(xn)$$

برای سور عمومی هم به این شکل برقرار است که باید همهء عناصر عالم سخن باید در آن صدق کند پس رابطه « و » بین همهء عناصر عالم سخن خواهد بود.

مثال) گزاره های سوری $\forall x\, p(x)$ و $\exists x\, p(x)$ در صورتی که $p(x) = x^2 \geq x$ باشد و عالم سخن سورها شامل $x = 1,2,4,\frac{1}{2}$ باشد به صورت ترکیبات عطفی و فصلی بنویسید و ارزش آن را تعیین کنید.

$$\forall x\, p(x)\colon (1 \geq 1) \wedge (4 \geq 2) \wedge (16 \geq 4) \wedge \left(\frac{1}{4} \ngeq \frac{1}{2}\right) \rightarrow \text{False}$$

$$\exists x\, p(x)\colon (1 \geq 1) \vee (4 \geq 2) \vee (16 \geq 4) \vee \left(\frac{1}{4} \ngeq \frac{1}{2}\right) \rightarrow \text{True}$$

تقدم سورها

سور های $\forall$ و $\exists$ بر **تمام** عملگر های منطقی حساب گزاره **تقدم** دارند. به عنوان مثال $\forall x\, P(x)\ \vee\ Q(x)$ ترکیب فصلی بین $\forall x\, P(x)$ و $Q(x)$ است , یعنی $(\forall x\, P(x))\ \vee\ Q(x)$ و اگر به این $\forall x(P(x)\ \vee\ Q(x))$ شکل بیان شود **اشتباه** است.

- در نهایت هم ارزی های که در احکام سوری وجود دارد به شکل زیر است:

Tolpam Academy

$$1.\ \ \forall x(P(x)\ \wedge\ Q(x))\ \equiv\ \forall x\, P\,(x)\ \wedge\ \forall x\, Q(x)$$

$$2.\ \neg\forall x\, P(x)\ \equiv\ \exists x\, \neg P\,(x)$$

$$3.\ \neg\exists x\, Q(x)\ \equiv\ \forall x\, \neg Q(x)$$

مثال) نشان دهید که $\neg\forall x(P\,(x)\ \rightarrow\ Q(x))$ و $\exists x(P\,(x)\ \wedge\ \neg Q(x))$ هم ارز منطقی هم هستند.

- از قوانین هم ارزی برای اثبات استفاده می‌کنیم چون کشیدن جدول برای بینهایت گزاره امکان پذیر نیست.

$$\neg\forall x(P\,(x)\ \rightarrow\ Q(x))\ \equiv\ \exists x(\neg(P\,(x)\ \rightarrow\ Q(x)))$$

$$\equiv\ \exists x(\neg(\ \neg P(x)\ \vee\ Q(x)))\ \equiv\ \exists x\,(P\,(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\neg\forall x(P\,(x)\ \rightarrow\ Q(x))\ \equiv\ \exists x\,(P\,(x)\ \wedge\ \neg Q(x)\,)$$

1.7 استدلال‌ها و قواعد آن

یکی از اهداف اصلی منطق، بررسی و تحلیل درستی استدلال‌ها است. در بسیاری از مسائل ریاضی، علوم کامپیوتر و حتی استدلال‌های روزمره، با مجموعه‌ای از گزاره‌ها روبه‌رو هستیم که از آن‌ها نتیجه‌ای خاص به دست می‌آید. پرسش اساسی این است که آیا این نتیجه به‌طور منطقی از فرض‌های داده‌شده پیروی می‌کند یا خیر. مبحث استدلال و قواعد آن پاسخی صوری و دقیق به این پرسش ارائه می‌دهد.

استدلال

استدلال در منطق گزاره ای , رشته ای است از گزاره ها($p_1 \ , \ p_2 \ , \ \dots , \ p_n \ , q$). همهء گزاره ها جز گزارهء آخر ($p_1 \ , \ p_2 \ , \ \dots , \ p_n$)استدلال مفروضات و گزارهء نهایی(q) نتیجه (حکم) نام دارد.یک استدلال معتبر است اگر صحت تمام مفروضات آن راست بودن نتیجه را ایجاب نماید.

اگر $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ \dots \ \wedge p_n) \rightarrow q$ یک راستگو[1] باشد , استدلال $(p_1 \ , \ p_2 \ , \ \dots , \ p_n \ \therefore q)$ معتبر است. یک استدلال را به شکل زیر نمایش میدهیم:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

در حقیقت یک استدلال همان ترکیب شرطی $(p \rightarrow q)$ است که درآن p یک گزارهء مرکب است به شکل $p_1 \wedge p_2 \wedge \ \dots \ \wedge p_n$.

نکـــته: اگر یک استدلال درست **نباشد** باشد در این صورت یک **سفسطه** است.

- نماد $(\therefore)$ به معنای " **بنابراین** " یا " **نتیجه میشود** " است و همان مفهوم نماد ترکیب شرطی $(\rightarrow)$ را دارد.

مثال) آیا استدلال رو به رو معتبر است؟

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- استدلال رو به رو همان ترکیب شرطی است که در آن فرض یک گزاره مرکب است

از ترکیب عطفی بین همهء فرض های استدلال: $\Longrightarrow \ [(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

- حال برای اثبات معتبر بودن این استدلال باید جدول ارزش گزاره مرکب استدلال را تکشیل دهیم:

p	q	$p \rightarrow q$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

اســـتدلال بالا یک راستگو(tautology) است، یعنی در همه حالات ارزش آن درست است پس یک **استدلال معتبر است.**

[1] Tautology

مثال) آیا استدلال رو به رو معتبر است؟

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg p \\ \hline \therefore \neg q \end{array} \qquad \Longrightarrow \quad [(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1

- چون در یک حالت استدلال بالا درست نیست پس یک استدلال درست نیست و **سفسطه** است.

مثال) آیا استدلال رو به رو معتبر است؟

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array} \qquad \Longrightarrow \quad [(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

- این استدلال یک tautology و معتبر است.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

قواعد استنتاج برای منطق گزاره ای

Tolpam Academy

با استفاده از جدول درستی همیشه می توان معتبر بودن یک استدلال را نشان داد اما این می تواند روش ملال آوری باشد به فرض مثال فرض کنید که استدلال شامل 10 متغیر گزاره ای است در این صورت برای رسم جدول ارزش این استدلال به $2^{10} = 1024$ سطر برای جدول نیاز است و اگر تعداد گزاره ها افزایش یابد این رقم به صورت نمایی افزایش میابد و رسم جدول ممکن نیست ولی به جای رسم جدول می توانیم از قوانین استنتاج بهره ببریم.

استفاده از قواعد استنتاج مشابه آن چیزی است که در هم ارزی گزاره‌ها برای ساده سازی گزاره های مرکب استفاده میکردیم در اینجا هم عملا به این مسئله خواهیم پرداخت که استدلال ها را تاحد امکان ساده سازی کنیم و کم تر به رسم جدول ارزش مراجعه کنیم. در ادامه به یادگیری قواعد استنتاج خواهیم پرداخت.

- جدول قواعد استنتاج		
نام	راستگو	قاعده
جمع	$p \to (p \vee q)$	p $\therefore p \vee q$
ساده سازی	$(p \wedge q) \to p$	$p \wedge q$ $\therefore p$
ترکیب عطفی	$((p) \wedge (q)) \to (p \wedge q)$	p q $\therefore p \wedge q$
محلول	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \to (q \vee r)$	$p \vee q$ $\neg p \vee r$ $\therefore q \vee r$

- جدول قواعد استنتاج		
نام	راستگو	قاعده
وضعیت تایید	$(p \wedge (p \to q)) \to q$	p $p \to q$ $\therefore q$
وضعیت نفی	$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$	$\neg q$ $p \to q$ $\therefore \neg p$
قیاس فرضی	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$
قیاس فصلی	$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$	$p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$

راستگو بودن همه قواعد بالا را میتوانید به وسیله جدول ارزش ها اثبات کنید ما در مثال های قبل برخی از این قواعد را اثبات کردیم.

مثال) نشان دهید که مفروضات " امروز بعد از ظهر آفتابی نیست و هوا از دیروز سردتر است " و "ما فقط وقتی به شنا می رویم که هوا آفتاب باشد " و "هرگاه به شنا نرویم , آنگاه پارو زنی می رویم" و "هر گاه به پارو زنی رویم , آنگاه غروب در منزل هستیم" به نتیجه "غروب در منزل هستیم " منجر خواهد شد.

- فرض کنید که p: " امروز بعد از ظهر آفتابی است" و q: " هوا از دیروز سردتر است "

و r: "به شنا می رویم" و s:"ما به پارو زنی می رویم" و t: " غروب در منزل هستیم" باشد.

- در این صورت استدلال به این صورت است:

$$\begin{array}{c} \neg p \wedge q \\ r \to p \\ \neg r \to s \\ s \to t \\ \hline \therefore t \end{array}$$

$$[(\neg p \wedge q) \wedge (r \to p) \wedge (\neg r \to s) \wedge (s \to t)] \to t$$

- اگر میخواستیم که برای استدلال بالا جدول درستی رسم کنیم نیاز به رسم 32 سطر بود.
- زمانی که یکی یا چند فرض را ساده میکنیم عبارات ساده شده فرض جدید استدلال هستند.

Tolpam Academy

مرحله		دلیل
1.	$\neg p \wedge q$	فرض
2.	$\neg p$	ساده سازی با استفاده از (1)
3.	$r \to p$	فرض
4.	$\neg r$	وضعیت نفی با استفاده از (3) و (2)
5.	$\neg r \to s$	فرض
6.	s	وضعیت تایید با استفاده از (5) و (4)
7.	$s \to t$	فرض
8.	t	وضعیت تایید از (6) و (7)

مثال) با استفاده از قواعد استنتاج نشان دهید که مفروضات " رضا سخت کار میکند " و " هرگاه رضا سخت کار کند آنگاه او پسر خسته کننده ای است" و هر گاه رضا پسر خسته کننده ای باشد آنگاه شغل مورد نظر را بدست نخواهد آورد " نتیجه : " رضا شغل مورد نظر را بدست نمی آورد " را ایجاب میکند.

- فرض میکنیم که: p : " رضا سخت کار میکند " و q : " رضا پسر خسته کننده ای است " و

r : " رضا شغل مورد نظر را بدست می آورد" باشد. در این صورت استدلال به شکل زیر است:

$$[\,(p) \wedge (p \to q) \wedge (q \to \neg r)\,] \dashv \neg r$$

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ q \to \neg r \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

مرحله		دلیل
.1	p	فرض
.2	$p \to q$	فرض
.3	q	وضعیت تایید از (1) و (2)
.4	$q \to \neg r$	فرض
.5	$\neg r$	وضعیت تایید از (3) و (4)

مثال) ثابت کنید که استدلال رو به رو معتبر است.

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ t \\ p \to r \\ t \to s \\ \hline \therefore s \vee j \end{array}$$

مرحله		دلیل
.1	$p \wedge q$	فرض
.2	p	ساده سازی (1)
.3	$p \to r$	فرض
.4	r	وضعیت تایید از (3) و (2)
.5	t	فرض
.6	$t \wedge r$	ترکیب عطفی از (5) و (4)
.7	t	ساده سازی (6)
.8	$t \to s$	فرض
.9	s	وضعیت تایید از (7) و (8)
.10	$s \vee j$	جمع از (9)

Tolpam Academy

مثال) آیا استدلال رو به رو معتبر است یا خیر؟

$$\begin{array}{l} \neg w \\ \neg v \vee r \\ v \\ r \to w \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$$

مرحله		دلیل
.1	$\neg w$	فرض
.2	$r \to w$	فرض
.3	$\neg r$	وضعیت نفی (1) و (2)
.4	v	فرض
.5	v	ساده سازی (3) و (4)
.6	$v \vee q$	جمع از (5)
.7	$\neg v \vee r$	فرض
.8	$q \vee r$	محلول از (6) و (7)

قواعد استنتاج برای سور ها

این قواعد در استدلال های ریاضی اغلب بدون ذکر صریح به طور گسترده به کار خواهند رفت. به این دلیل که قواعد بسیار بدیهی هستند.

- جدول قواعد استنتاج برای سورها	
نام	قاعده
لحظه سازی عمومی	$\dfrac{\forall x\, P(x)}{\therefore P(c)}$
تعمیم عمومی	$\dfrac{P(c) \text{ به ازای یک } c \text{ دلخواه}}{\therefore \forall x\, P(x)}$
لحظه سازی وجودی	$\dfrac{\exists x\, P(x)}{\therefore P(c) \text{ به ازای عنصری مانند } c}$
تعمیم وجودی	$\dfrac{P(c) \text{ به ازای عنصری مانند } c}{\therefore \exists x\, P(x)}$

مثال) نشان دهید که مفروضات " هرکس در این کلاس ریاضیات گسسته است درسی در مهندسی کامپیوتر گرفته است " و " مریم شاگرد این کلاس است " نتیجه "مریم درسی در مهندسی کامپیوتر گرفته است" را ایجاب می کند.

- فرض کنید $D(x)$ عبارت " x در این کلاس ریاضیات گسسته است " و $C(x)$: " x درسی در مهندسی کامپیوتر گرفته است." باشد در اینصورت:

$$\dfrac{\forall(D(x) \to C(x))}{\therefore C(v)}$$

	مرحله	دلیل
1	$\forall x(D(x) \to C(x))$	فرض
2	D(مریم) $\to C$ (مریم)	لحظه سازی عمومی از (1)
3	D(مریم) $\to C$ (مریم)	فرض
4	C (مریم)	وضعیت تایید از(2) و (3)

مثال) با استفاده از قواعد استنتاج ثابت کنید که اگر $\forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge S(x))$ و $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ درست باشد ، گزارهء سوری $\forall x(R(x) \wedge S(x))$ نیز درست است .

- در اینصورت استنتاج به شکل زیر خواهد بود:
- در ادامه این استنتاج را اثبات میکنیم.

$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge S(x)) \\ \forall x(P(x) \wedge R(x)) \\ \hline \therefore \forall x(R(x) \wedge S(x)) \end{array}$$

Tolpam Academy

مرحله		دلیل
1.	$\forall x(P(x) \wedge R(x))$	فرض
2.	$P(a) \wedge R(a)$	نمونه سازی عمومی از (1)
3.	$P(a)$	ساده سازی از (2)
4.	$\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x))$	فرض
5.	$P(a) \rightarrow (Q(a) \wedge S(a))$	نمونه سازی عمومی از (4)
6.	$Q(a) \wedge S(\mathrm{a})$	وضعیت تایید از (3) و (5)
7.	$S(\mathrm{a})$	ساده سازی از (6)
8.	$R(a)$	ساده سازی از (2)
9.	$R(a) \wedge S(a)$	ترکیب عطفی از (7) و (8)
10.	$\forall x(R(x) \wedge S(x))$	تعمیم نمونه سازی عمومی

1.8 روش‌ها و استراتژی‌های اثبات

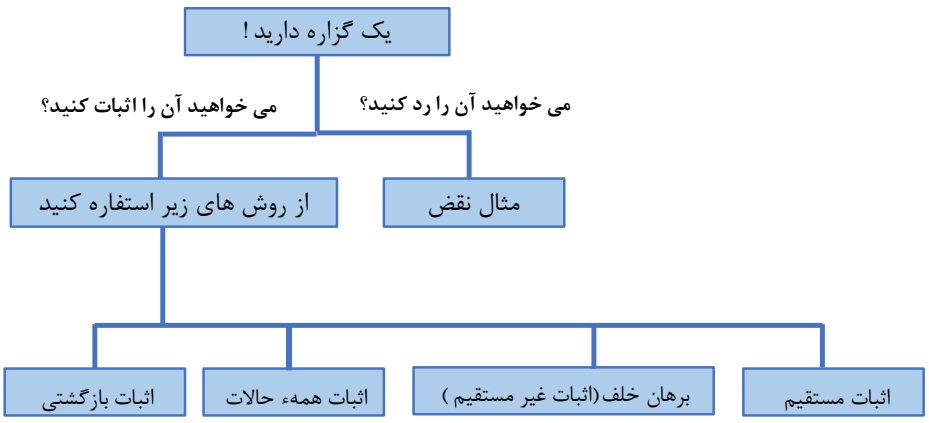
در بخش قبل به اثبات با استنتاج پرداخته شد که یک روش معمول و پرکاربرد برای اثبات قضایا به شمارمی‌رود. در این بخش اما به روش های معمول دیگری خواهیم پرداخت که بسیار در دنیای ریاضیات پرکاربرد هستند و اکثر قضایای معروف با استفاده از این روش ها اثبات شده اند.

در ریاضیات، اثبات یک قضیه بیش از آنکه صرفاً به نتیجهء نهایی اهمیت دهد، بر چگونگی رسیدن به آن نتیجه تمرکز دارد. اثبات‌ها زبان و ساختار استدلال ریاضی‌اند: آن‌ها نشان می‌دهند که چگونه می‌توان از مفروضات و حقایق پذیرفته‌شده، نتیجه‌ای را به‌طور دقیق و قابل اتکا به دست آورد. درک روش‌های مختلف اثبات، دانشجویان را قادر می‌سازد تا نه تنها قضایا را اثبات کنند، بلکه تصمیم بگیرند کدام روش برای کدام نوع مسئله مناسب‌تر است.

روش‌های اثباتی که در این فصل بررسی می‌شوند شامل اثبات مستقیم، برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)، اثبات در همهء حالات، اثبات بازگشتی (هم‌ارزی) و مثال نقض هستند. هر یک از این روش‌ها، بسته به نوع قضیه و ساختار آن، ابزارهای متفاوت و در عین حال قدرتمندی برای نشان دادن درستی یا نادرستی ادعاها ارائه می‌دهند. آشنایی با این استراتژی‌ها پایه‌ای برای نوشتن اثبات‌های روشن، منطقی و متقاعدکننده در ریاضیات و علوم کامپیوتر است.

Tolpan Academy

- **نقشه راه استفاده از روش های اثبات:**



اثبات مستقیم

در اثبات مستقیم سعی میکنیم که با استفاده از دانش ریاضی که پیش از این داریم به صورت مستقیم از فرض به حکم برسیم.در اثبات مستقیم، فرض می‌کنیم که مقدمات قضیه درست هستند و با استفاده از تعریف‌ها، قوانین منطقی و نتایج شناخته‌شده، گام‌به‌گام به نتیجهء مورد نظر می‌رسیم. این روش معمولاً زمانی به کار می‌رود که ساختار قضیه به‌صورت یک گزارهء شرطی باشد و بتوان مسیر روشنی از فرض به نتیجه ترسیم کرد. اثبات مستقیم ساده‌ترین و طبیعی‌ترین شکل اثبات است و اغلب نخستین روشی است که برای اثبات یک قضیه امتحان می‌شود.

مثال) اثبات کنید که مربع هر عدد فرد عددی فرد است.

- یک عدد فرد را به شکل زیر در نظر خواهیم گرفت که k یک عدد صحیح مثبت است:

$$n = 2k + 1$$

- در اینصورت مربع یک عدد فرد به شکل زیر خواهد بود:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q + 1$$

- مقدار داخل پرانتز($2k^2 + 2k$) اینجا چون در نهایت یک عدد متغییر است به صورت کلی یک متغیر واحد مثال q نظر گرفتیم(شما میتوانید از این کار صرف نظر کنید.) در نهایت حاصل جواب در قالب عدد فرد

مثال) اگر n یک عدد صحیح فرد باشد، آنگاه عدد $n^3 - n$ بر 4 بخش‌پذیر است؟

- فرض میکنیم که n یک عدد صحیح فرد باشد:

$$n = 2k + 1$$

$$n^3 - n = (2k+1)^3 - (2k+1)$$

$$n^3 - n = (8k^3 + 12k^2 + 6k + 1) - (2k+1) = 8k^3 + 12k^2 + 4k$$

$$n^3 - n = 4(2k^3 + 3k^2 + k) = 4q$$

Tolpam Academy

برهان خلف (اثبات غیر مستقیم،عکس نقیض)

پایه و اساس این شیوه بر این استوار است که یک گزارهء شرطی با **عکس نقیض** خود **هم ارز** است. یعنی فرض میکنیم که حکم نادرست باشد و از این نادرستی حکم به نادرستی فرض اولیه میرسیم در بعضی قضایا اثبات عکس نقیض آن از اثبات خود قضیه راحت تر است بنابر این از این روش استفاده میکنیم.

این روش یکی از قدرتمند ترین روش ها در اثبات قضایا است و در مسائلی بیشتر به کار میرود که اثبات مستقیم مسئله کاری بسیار سخت باشد و نتیجه گیری بر اساس فرض خلف آسان تر است.

مثال) اثبات کنید هرگاه n یک عدد صحیح باشد و $3n+2$ یک عدد فرد باشد آنگاه n فرد است.

- اگر بخواهید از روش مستقیم این قضیه را اثبات کنیم باید $3n+2=2k+1$ که قابل حل نیست. پس از روش غیر مستقیم این قضیه را اثبات میکنیم.
- فرض میکنیم که حکم نادرست است یعنی n یک عدد زوج است:

$$n=2k$$

$$3n+2=3(2k)+2$$

$$6k+2=2(3k+1)=2q$$

- به این نتیجه رسیدیم که اگر n زوج باشد در اینصورت $3n+2$ یک عدد زوج خواهد بود که این یعنی نادرستی فرض مسئله پس این قضیه کاملا درست است چون فرض خلف آن درست است.

اثبات همهء حالات

گاهی برای اثبات یک مسئله باید آن را در چند حالت در نظر بگیریم فرض کنید که میخواهیم که:

$p \to q$ را اثبات کنیم و باید برای n،p حالت p_1 ، p_2 ، ... ، p_n در نظر بگیریم یعنی:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ \dots \ \wedge p_n \Longrightarrow q \equiv (p_1 \Longrightarrow q) \wedge (p_2 \Longrightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \Longrightarrow q)$$

این هم ارزی دقیقا در روش اثبات همهء حالات استفاده میشود.

در این روش با در نظر گرفتن همهء حالات ممکن در یک مسئله و برسی همه حالات در صورتی که در تمامی حالات به درستی حکم نهایی برسیم قضیه اثبات میشود.

به طور کلی این روش اثبات برای مسائلی کاردبرد دارد که مفروضات (فرض ها)، حالت های مختلفی میتوانند داشته باشند در این روش از اثبات مسئله را در همه حالات برسی میکنیم و تنها اگر در همه حالات مسئله حکم برقرار بود می‌توان گفت که گزاره حکم در این مسئله صادق است.

مثال) ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح n حاصل n^2-3n+7 عددی فرد است.

- برای اثبات این مسئله باید ببینیم که n چند حالت میتواند داشته باشد که دو حالت است یا زوج باشد یا فرد پس:

1. $n=2k \Longrightarrow (2k)^2-3(2k)+7=4k^2-6k+7$

   $=2(2k^2-3k+3)+1=2q+1$: نتیجه یک عدد فرد است

2. $n=2k+1 \Longrightarrow (2k+1)^2-3(2k+1)+7$

   $=4k^2+4k+1-6\mathrm{k}-3+7=4k^2-2k+5$

   $=2(2k^2-k+2)+1=2q+1$: نتیجه یک عدد فرد است

- پس در همهء حالت ها حاصل عبارت بالا یک عدد فرد است و مسئله اثبات شد.

Tolpan Academy

مثال) ثابت کنید که حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی همواره بر 3 بخش پذیر است.

- باید ثابت کنیم که ضرب سه عدد متوالی تقسیم بر 3 برابر یک عدد صحیح است.

$$n(n+1)(n+2) = 3q$$

- اثبات با در نظر گرفتن همهء حالات: در تقسیم هر عدد طبیعی بر 3 دقیقا یکی از سه حالت زیر رخ خواهد داد.
- حالت اول: باقی ماند عدد طبیعی در تقسیم بر 3 برابر صفر شود، که یعنی n بر 3 بخش پذیر است.

1. $n = 3k \quad \rightarrow n(n+1)(n+2) = 3k(3k+1)(3k+2)$

- حالت دوم: باقی ماند عدد طبیعی در تقسیم بر 3 برابر 1 شود، که یعنی n برابر است با.

2. $n = 3k+1 \quad \rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3)$
$= 3(k+1)(3k+1)(3k+2)$

- حالت سوم: باقی ماند عدد طبیعی در تقسیم بر 3 برابر 2 شود، که یعنی n برابر است با.

3. $n = 3k+2 \quad \rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4)$
$= 3(k+1)(3k+2)(3k+4)$

- در تمامی حالاتی که یک عدد طبیعی در تقسیم بر سه میتواند داشته باشد در نهایت اثبات شد که ضرب توالی 3 از اعداد طبیعی بر عدد 3 بخش پذیر است.

اثبات بازگشتی(هم ارزی)

در این روش باید سعی کنید که با تشکیل رشته ای از گزاره های هم ارز به یک گزاره همواره درست برسید. این روش بر اساس هم ارزی زیر است:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

این روش بیشتر وقت ها برای اثبات نامساوی ها استفاده میکنیم.

نکته: در این روش باید با استفاده از هم‌ارزی عبارت ها به یک گزاره همواره درست برسیم به مثال زیر توجه کنید.

مثال) اگر x و y دو عدد صحیح باشد آنگاه ثابت کنید که میانگین حسابی آن ها از میانگین هندسی آن ها بزرگ تر مساوی است.

- روش اول: در این روش به عبارت $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ رسیدیم که یک عبارت همواره درست است.

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \iff x+y \geq 2\sqrt{xy} \iff x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \iff (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$$

- روش دوم: در این روش هم یه یک عبارت همواره درست میرسیم.

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \iff \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \iff x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\iff (x-y)^2 \geq 0$$

- در هر دو روش بالا برای اثبات گزاره از روش هم‌ارزی استفاده شد که به دو شیوه با استفاده از دو عبارت هم ارز این اثبات به انجام رسید.

Tolpam Academy

مثال) a و b دو عدد حقیقی و مثبت هستند ثابت کنید که : $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leftrightarrow \quad \frac{a^3+b^3}{b^2a^2}\geq\frac{a+b}{ab} \leftrightarrow \quad a^3+b^3\geq(a+b)(ab)$$

$$\leftrightarrow \quad (a+b)(a^2-ab+b^2)\geq(a+b)(ab) \leftrightarrow \quad (a^2-ab+b^2)\geq(ab)$$

$$\leftrightarrow \quad a^2-2ab+b^2\geq 0 \quad \leftrightarrow \quad (a-b)^2\geq 0$$

- عبارت $(a-b)^2\geq 0$ یک عبارت همواره درست است زیرا مربع هر عدد حقیقی قطعا عدد مثبت یا صفر است.

مثال نقض

مثالی است که نشان میدهد یک گزاره یا نتیجه گیری کلی **اشتباه** است و آن گزاره را رد میکند.

نکته: فقط زمانی که بخواهیم نادرستی یک گزاره را اثبات کنیم از روش مثال نقض استفاده میکنیم، مثال نقط برای اثبات درستی یک گزاره به کار نمی‌رود.

مثال) مثال نقضی برای گزارهء " به ازای هر عدد صحیح n عبارت n^2+2 همواره بر 3 بخش پذیر است." بیابید.

- اگر بتوان یک عدد صحیح پیدا کرد که در گزاره بالا صدق نکند به طور کلی شما این گزاره را رد میکنید و اثبات میکنید که ارزش این گزاره نادرست است.

- $n=1\Longrightarrow 3$
- $n=2\Longrightarrow 6$
- $n=3\Longrightarrow 11$:مثال نقض

Tolpam Academy

مثال) درستی یا نادرستی گزارهء " اگر p عددی اول باشد آنگاه عددی فرد است " را اثبات کنید.

$p=2$: مثال نقض $\Longrightarrow$ پس گزارهء بالا درست نیست.

مثال) نادرستی برای گزاره " برای هر y و x رابطهء $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ برقرار است" را اثبات کنید.

$$\begin{cases}x=4\\y=9\end{cases} \Longrightarrow \sqrt{4+9}=\sqrt{4}+\sqrt{9} \Longrightarrow \sqrt{13}\neq 5$$

مثال نقض : $x=4\ ,\ y=9$

1.9 تمرینات فصل اول

***تمرین ۱.** مشخص کنید کدام‌یک از جملات زیر «گزاره» هستند. اگر گزاره‌اند، ارزش درستی آن‌ها را تعیین کنید.

الف) امروز باران می‌بارد یا فردا هوا آفتابی است.

ب) لطفاً در کلاس صحبت نکنید.

ج) عدد x اول است.

د) $2^3 + 1 = 9$

هـ) هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از 1 یا اول است یا مرکب.

***تمرین ۲.** برای هر یک از جملات زیر، اگر گزاره‌نما هستند، عالم سخن را طوری مشخص کنید که به گزاره راستگو تبدیل شوند.

الف) $n^2 \geq n$

ب) $x + y = 10$

ج) nعددی زوج است.

تمرین ۳. جدول ارزش گزاره‌های زیر را رسم کنید و مشخص کنید آیا همواره درست، همواره نادرست یا وابسته به مقدار هستند:

الف) $(p \wedge q) \rightarrow p$

ب) $p \wedge \neg p$

ج) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

د) $(p \vee q) \wedge \neg p$

تمرین ۴. فرض کنید $p = \text{True}$ و $q = \text{False}$ ارزش گزاره‌های زیر را محاسبه کنید:

الف: $(p \wedge \neg q) \vee q$

ب: $\neg(p \rightarrow q)$

ج: $(p \leftrightarrow q) \vee p$

تمرین ۵. با استفاده از قوانین هم‌ارزی (و نه جدول ارزش)، گزاره‌های زیر را ساده کنید:

الف: $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

ب: $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$

ج: $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$

Tolpan Academy

تمرین ۶. نشان دهید گزاره‌های زیر از نظر منطقی هم‌ارز هستند. (راهنما: فقط از قوانین هم‌ارزی استفاده کنید)

الف: $\neg(p \to q)$

ب: $p \wedge \neg q$

تمرین ۷. برای هر گزاره شرطی زیر، **عکس، معکوس و عکس نقیض** را بنویسید و مشخص کنید کدام‌یک با گزاره اصلی هم‌ارز است.

الف) اگر عددی بر 4 بخش‌پذیر باشد، آنگاه زوج است.

ب) اگر برنامه کامپایل شود، آنگاه خطای نحوی ندارد.

تمرین ۸. با استفاده از قوانین هم‌ارزی منطقی، گزارهٔ زیر را ساده کنید:

$$\neg(p \wedge (p \vee q))$$

❋**تمرین ۹.** گزاره‌های زیر مفروض هستند:

- p : امروز باران می‌بارد.
- q : من چتر می‌برم.
- r : خیس می‌شوم.

الف) گزاره زیر را به زبان فارسی بیان کنید:

$$(p \to q) \wedge (\neg q \to r)$$

ب) جدول درستی کامل آن را رسم کنید.

ج) آیا این گزاره یک راستگو است؟ چرا؟

Tolpam Academy

❋**تمرین ۱۰.** نقیض گزارهٔ زیر را بنویسید و آن را تا حد ممکن ساده کنید (بدون استفاده از→):

$$(p \vee q) \to (r \vee \neg p)$$

❋**تمرین ۱۱.** آیا استدلال زیر معتبر است؟

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \wedge q \\ \hline \therefore r \end{array}$$

تمرین 12 . گزاره‌ای شامل سه متغیر طراحی کنید که دقیقاً در چهار حالت از هشت حالت ممکن مقدار درست بگیرد. جدول درستی آن را رسم کنید و نشان دهید گزارهء شما نه راستگو است و نه تناقض.

تمرین13. نشان دهید گزارهء زیر یک تاتولوژی[1] است، تنها با استفاده از قوانین هم‌ارزی (بدون جدول درستی):

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$$

تمرین 14 . گزاره‌ای مرکب شامل دقیقاً سه متغیر بیابید که:

- در هیچ حالتی که دقیقاً یک متغیر درست است، مقدار درست نگیرد؛
- در همهء حالت‌هایی که حداقل دو متغیر درست‌اند، مقدار درست بگیرد.

فرم منطقی آن را بنویسید و اثبات کنید شرایط مسئله برقرار است.

Tolpam Academy

[1] به گزاره ای که در همه حالات ارزش درست داشته باشد گویند (گزارهء راستگو)

2 فصل دوم: مجموعه‌ها

- مقدمه ای بر فصل دوم

پس از آشنایی با مبانی منطق، اکنون نوبت به مطالعه‌ی مجموعه‌ها می‌رسد؛ مفهومی که شالوده‌ی بسیاری از ساختارهای ریاضی و زبان مشترک بیان مفاهیم در ریاضیات گسسته به‌شمار می‌رود. مجموعه‌ها چارچوبی دقیق برای گردآوری، سازمان‌دهی و تحلیل اشیا فراهم می‌کنند و به کمک آن‌ها می‌توان بسیاری از مفاهیم و ساختارهای پیچیده را به شکلی ساده، منسجم و قابل بررسی توصیف کرد. از روابط و توابع گرفته تا گراف‌ها، زبان‌های صوری، پایگاه‌های داده و بسیاری از مباحث علوم کامپیوتر، همگی بر پایه‌ی مفهوم مجموعه بنا شده‌اند. ازاین‌رو، شناخت دقیق مجموعه‌ها نه‌تنها مقدمه‌ای برای مطالعه‌ی مباحث بعدی این کتاب، بلکه گامی اساسی در درک ساختارهای گسسته و شیوه‌ی استدلال در ریاضیات محسوب می‌شود.

در این فصل، ابتدا با مفهوم مجموعه و روش‌های مختلف نمایش آن آشنا می‌شوید. سپس مفاهیم بنیادی مانند عضویت، زیرمجموعه، برابری مجموعه‌ها و مجموعه‌ی تهی بررسی می‌شوند و نقش هر یک در توصیف و تحلیل ساختارهای ریاضی تبیین می‌گردد. در ادامه، عملیات اصلی روی مجموعه‌ها، شامل اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم، همراه با خواص و قوانین آن‌ها معرفی می‌شوند. این عملیات، ابزارهای اصلی برای بیان و تحلیل ارتباط میان مجموعه‌ها هستند و در مدل‌سازی بسیاری از مسائل ریاضیات گسسته کاربرد دارند. همچنین خانواده‌های مهمی از مجموعه‌ها و ویژگی‌های آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند و ارتباط عمیق میان منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها آشکار می‌شود؛ به‌گونه‌ای که بسیاری از قوانین منطقی در قالب روابط و عملیات مجموعه‌ای بازتاب می‌یابند.

مطالعه‌ی این فصل، زیربنای مفاهیم فصل‌های آینده، به‌ویژه روابط، توابع، گراف‌ها و سایر ساختارهای گسسته را فراهم می‌کند. انتظار می‌رود خواننده پس از پایان این فصل، توانایی تعریف، نمایش و تحلیل مجموعه‌ها، انجام عملیات مختلف روی آن‌ها، استدلال بر پایه‌ی قوانین مجموعه‌ای و به‌کارگیری این مفاهیم در حل مسائل ریاضیات گسسته و علوم کامپیوتر را به‌دست آورده باشد.

Tolpam Academy

برگی از تاریخ (تاریخچه نظریهء مجموعه‌ها)

نیاز به توصیف دقیق اشیا و بیان روابط میان آن‌ها، از دیرباز در ریاضیات احساس می‌شد؛ بااین‌حال، تا اواخر قرن نوزدهم چارچوبی منسجم برای این منظور وجود نداشت. شکل‌گیری نظریه‌ی مجموعه‌ها پاسخی به این نیاز بود و نقطه‌ی عطفی در تاریخ ریاضیات به‌شمار می‌آید. این نظریه، برای نخستین بار زبان و بنیانی مشترک در اختیار ریاضیدانان قرار داد تا بتوانند مفاهیم مختلف را با دقت و انسجام بیشتری تعریف و تحلیل کنند.

نقش تعیین‌کننده در این تحول را **گئورگ کانتور** ایفا کرد. او با مطالعه‌ی مجموعه‌های نامتناهی و بررسی امکان مقایسه‌ی اندازه‌ی آن‌ها، نگرشی نو به مفهوم بی‌نهایت ارائه داد و بنیان نظریه‌ی مدرن مجموعه‌ها را بنا نهاد. معرفی مفاهیمی مانند کاردینالیتی، شمارش‌پذیری و تناظر یک‌به‌یک، افق‌های تازه‌ای را در ریاضیات گشود و زمینه‌ی شکل‌گیری بسیاری از پژوهش‌های بعدی را فراهم ساخت.

رشد سریع نظریه‌ی مجموعه‌ها، در کنار موفقیت‌های فراوان، با ظهور پارادوکس‌هایی مانند پارادوکس راسل همراه بود. این چالش‌ها نشان دادند که برای جلوگیری از تناقض، نظریه‌ی مجموعه‌ها باید بر پایه‌ی اصولی دقیق و سازگار استوار شود. در نتیجه، دستگاه‌های اصل موضوعی، از جمله دستگاه زرملو–فرانکل، توسعه یافتند و بنیانی منطقی و استوار برای نظریه‌ی مجموعه‌ها فراهم کردند.

در قرن بیستم، نظریه‌ی مجموعه‌ها به زبان مشترک ریاضیات تبدیل شد و نقشی بنیادین در شکل‌گیری بسیاری از شاخه‌های علوم کامپیوتر ایفا کرد. از ساختمان داده‌ها، پایگاه‌های داده و زبان‌های صوری گرفته تا نظریه‌ی محاسبات، طراحی الگوریتم‌ها، گراف‌ها و حتی بسیاری از مباحث هوش مصنوعی، همگی به‌گونه‌ای بر مفاهیم مجموعه‌ای استوار هستند. امروزه، نظریه‌ی مجموعه‌ها تنها یکی از شاخه‌های ریاضیات نیست؛ بلکه بنیانی برای توصیف، سازمان‌دهی و تحلیل ساختارهای گسسته است و جایگاهی محوری در ریاضیات و علوم کامپیوتر دارد.

Tolpam Academy

2.1 مفاهیم مقدماتی مجموعه‌ها

مجموعه‌ها[1]

تعریف مجموعه: مجموعه دسته ای از اعداد ، اشیاء و حروف **متمایز** است که **ترتیب** قرارگیری آنها مهم نیست اعضای مجموعه را داخل علامت {} قرار میدهیم و معمولاً مجموعه را با حروف بزرگ مثل « ... و C و B و A » نشان میدهیم.

مثال) هرکدام از مثال های زیر یک مجمموعه هستند.

1. $V = \{a, e, i, o, u\}$
2. $O = \{1,3,5,7,9\}$
3. $S = \{a, 2, \text{تهران}, \text{انسان}\}$
4. $M = \{1,2,3, \ldots, 99\}$
5. $O^+ = \{x \in R \mid x = \frac{p}{q} \text{ و } (p, q) > 0\}$

مجموعه ساز[2]

تعریف مجموعه‌ساز: راه دیگری برای تعریف مجموعه با ذکر خاصیت های اعضای مجموعه، در ریاضیات علاوه بر روش لیست کردن اعضا[3]، می‌توان یک مجموعه را با بیان یک خاصیت مشترک بین اعضا تعریف کرد.به این روش، تعریف مجموعه‌ساز گفته می‌شود.

اگر P(x) یک گزاره درباره‌ی x باشد، آنگاه مجموعهء

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

به این معناست که A مجموعه‌ای است شامل تمام عناصری مانند x که گزارهء P(x) را ارضا می‌کنند.

Tolpam Academy

نکـــته: علامت "|" که به شکل ":" نیز مینویسیم یعنی «**به طوری که**».

مثال) مجموعه اعداد حقیقی مثبت:

$$O^+ = \{x \in R \mid x = \frac{p}{q} \text{ و } (p, q) > 0\}$$

نکته: معمولا زمانی که نوشتن همه اعضای یک مجموعه ممکن نباشد از این شیوه استفاده می شود.

در مثال فوق، به دلیل عدم امکان فهرست‌کردن تمام اعضای مجموعه، آن را با استفاده از بیان یک خاصیت مشخص‌کننده تعریف کردیم. این شیوهء تعریف، نمایش مجموعه به روش مجموعه‌ساز نام دارد.

[1] Sets
[2] Set-Builder
[3] Roster Form

اندازهء مجموعه[1]

تعریف اندازهء مجموعه: اگر A یک مجموعهء متناهی باشد، تعداد اعضای آن را اندازهء مجموعه یا کاردینالیتی آن می‌نامیم و با نماد $|A|$ نمایش می‌دهیم.

به عبارت دیگر: اگر مجموعهء A دارای n عضو متمایز باشد، آنگاه اندازهء آن برابر است با $|A| = n$

مثال) اندازه مجموعه های زیر را بدست آورید.

1. $V = \{a, e, i, o, u\} \rightarrow |V| = 5$
2. $M = \{1,2,3, \ \dots, 99\} \rightarrow |M| = 99$
3. $O^+ = \{x \in R \mid \frac{p}{q} \text{ و } (p,q) > 0\} \rightarrow |O^+| = +\infty$

نکته: در مجموعه‌های نامتناهی، اندازهء مجموعه بی‌نهایت است؛ اما همهء بی‌نهایت‌ها هم‌کاردینال نیستند. برای مقایسهء اندازهء چنین مجموعه‌هایی، وجود یا عدم وجود یک تناظر یک‌به‌یک میان آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

نکته: اعضای تکراری به عنوان یک عضو در نظر گرفته میشوند . یعنی در حقیقت تکرارهای یک عضو از مجموعه حذف میشود. (زیرا در تعریف مجموعه همه اعضا باید متمایز باشند.)

مثال) مجموعه S را درنظر بگیرید اندازه این مجموعه را بدست آورید.

$S = \{1,1,2,8,1,3\}$

- اعضای تکراری حذف میشوند.

$S = \{2,8,1,3\}$

$|S| = 4$

Tolpam Academy

مجموعه تهی[2]

تعریف مجموعه تهی: یک مجموعه‌ای خاص است، که **هیچ عضوی** ندارد. و آن را با نماد های $\emptyset$ یا $\{\}$ نشان میدهیم.

نکته: مجموعه های $\{\emptyset\}$ و $\{\{\}\}$ و $\{\emptyset, \{\}, \{\emptyset\}\}$ و ... هیچکدام مجموعهء تهی نیستند . زیرا تهی خود میتواند یک عضو برای مجموعه باشد.

نکته: اندازهء مجموعهء تهی، صفر است.

[1] Cardinality
[2] Empty Set

مثال) اندازهء هر یک از مجموعه های زیر را بیابید.

1) $A = \{\,\}$

2) $B = \emptyset$

3) $C = \left\{\{\,\}, \{\emptyset\}, \{\{\,\}\}, \{\emptyset, \{\,\}\}, \emptyset\right\}$

4) $D = \{-1, a, -2, \emptyset, \frac{-8}{4}, A, a\}$

حل)

1. $|A| = 0$
2. $|B| = 0$

- مجموعه‌های A و B هردو به این دلیل که هیچ عضوی ندارند مجموعهء تهی هستند و اندازه ای برابر صفر دارند.

3. $C = \left\{\{\,\}, \{\emptyset\}, \{\{\,\}\}, \{\emptyset, \{\,\}\}, \emptyset\right\} \rightarrow C = \{\{\emptyset\}, \emptyset\} \rightarrow |C| = 2$
4. $D = \{-1, a, -2, \emptyset, \frac{-8}{4}, A, a\} \rightarrow D = \{-1, -2, \emptyset, A, a\} \rightarrow |D| = 5$

مجموعه های مهم در ریاضیات

در ریاضیات اعداد به مجموعه‌هایی دسته بندی می‌شوند و به عنوان ابزاری هستند که از آنها برای حل مسائل، اندازه‌گیری و ... استفاده میشود؛ اکثر این مجموعه‌های مهم و معروف در زیر آورده شده است، به این نکته توجه داشته باشید که در دسته بندی مجموعه های اعداد توسط ریاضیدان‌ها میتواند اختلاف سلایقی باشد به همین جهت در بعضی منابع این دسته بندی مجموعه‌های اعداد میتواند متفاوت باشد.

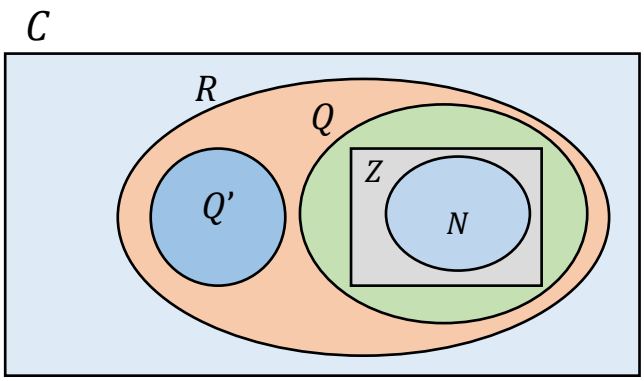
- مجموعه های مهم

1. $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
2. $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
3. $Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
4. $Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in Z, q \in Z, q \neq 0 \right\}$
5. R , مجموعهء اعداد حقیقی
6. $C = \{x + yi \mid x, y \in R \wedge i^2 = -1\}$

توجه: در برخی منابع ممکن است که $N = \{1,2,3, \dots\}$ و $Z^+ = \{0,1,2,3, \dots\}$ تعریف شوند.

Tolpam Academy

- نمودار ون مجموعه‌های مهم:



تساوی مجموعه‌ها

تعریف تساوی مجموعه ها: دو مجموعه مانند A و B را مساوی اند هرگاه عناصر یکسانی داشته باشند یعنی اگر رابطهء $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ برقرار باشد آنگاه دو مجموعه مساوی اند و مینویسیم $A = B$.

مثال) هر 3 مجموعه زیر با هم برابر هستند.

1. $A = \{1,3,5\}$
2. $B = \{3,5,1\}$
3. $C = \{3,3,3,3,1,1,1,5\}$

$$A = B = C$$

توجه: ترتیب و تکرار در مجموعه ها اهمیتی ندارد .

زیرمجموعه

تعریف زیرمجموعه: اگر A و B دو مجموعه باشند طوری که هر عضو A در B نیز باشد گوییم A زیرمجموعهٔ B است و مینویسیم $A \subseteq B$ و اگر A زیرمجموعهٔ B نباشد مینویسیم $A \nsubseteq B$.

ملاحظه کنید که اگر که $A \subseteq B$ است اگر و فقط اگر که $\forall x(x \in A \to x \in B)$ راست باشد .

مثال) ثابت کنید که به ازای هر مجموعهء S دلخواه $\emptyset \subseteq S$ و $S \subseteq S$ است.

$$\emptyset \subseteq S \;\to\; \forall x(x \in \emptyset \to x \in S) \xrightarrow{x \notin \emptyset} x \in \emptyset \to x \in S \equiv F \to T \equiv T$$

$$S \subseteq S \;\to\; \forall x(x \in S \to x \in S) \;\to\; x \in S \to x \in S \equiv \neg(x \in S) \vee (x \in S) \equiv T$$

نکته: به ازای هر مجموعهء S دلخواه تهی زیرمجموعهء همه مجموعه هاست « $\emptyset \subseteq S$ » و هر مجموعه‌ای زیر مجموعه خودش هم هست « $S \subseteq S$ » .

نکته: اگر $A \subseteq B$ و همچنین $B \subseteq A$ باشد آنگاه میتوان گفت که $A = B$ است.

زیر مجموعه توانی[1]

تعریف زیر مجموعهء توانی (محض) : مجموعهٔ تمام زیرمجموعه های A را مجموعهٔ توانی A گوییم و با $P(A)$ نشان میدهیم $P(A)$ دارای 2^n عضو است.

مثال) زیرمجموعهء توانی $A = \{1,2,3\}$ بدست آورید.

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

مثال) اگر $A = \{5, \{1\}, 1\}$ باشد، بررسی کنید کدامیک از رابطه‌های زیر درست وکدام نادرست است؟

الف) $\{1\} \in A$ ب) $\{1\} \subseteq A$ پ) $\emptyset \in A$ ت) $\{\emptyset\} \subseteq A$

ث) $\{\{1\}\} \subseteq A$ ج) $\{1, \emptyset\} \in A$

حل) الف) درست است؛ چون $\{1\}$ یکی از اعضای A است.

ب) درست است؛ چون 1 عضو A است یعنی وقتی داخل آکولاد می آید، زیرمجموعهٔ A می شود.

پ) درست است؛ همان طور که می‌دانید یکی از عضوهای هر مجموعه‌ای، مجموعهٔ تهی است.

ت) درست است؛ دقیقاً مثل قسمت (ب)، زیرا $\emptyset$ عضو A است.

ث) درست است؛ دقت کنید مجموعهٔ $\{\{1\}\}$ یک عضو دارد که آن عضو $\{1\}$ است که همین عضو در A هم وجود دارد.

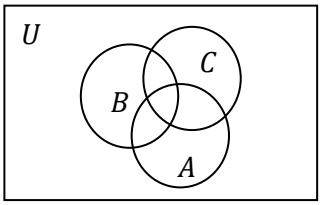
ج) نادرست؛ در A عضوی به صورت $\{1, \emptyset\}$ وجود ندارد.

مجموعهء مرجع

تعریف مجموعهء مرجع: مجموعهٔ مرجع (جهانی) مجموعه ای است که همهٔ مجموعه های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن هستند. مجموعهٔ مرجع را یا U یا M یا S نشان میدهیم.

مثال) مجموعه های A , B , C مفروض اند.

- اگر بخواهیم که نمودار ون مجموعه مراجع را نشان دهیم باید به شکلی باشد که همهء مجموعه های مفروض را پوشش دهد.



$$A, B, C \subseteq U$$

[1] powerset

2.2 جبر مجموعه‌ها

در بخش قبل فهمیدیم که مجموعه ها دسته‌هایی از اشیاء هستند؛ در این بخش به این موضوع می‌پردازیم که چه اعمالی میتوان روی مجموعه‌ها انجام داد. این عملیات‌ها به منظور ترکیب کردن حذف کردن و به طور کلی انجام تغییراتی روی مجموعه هاست تا از آن ها برای پیشبرد اهداف و حل مسائل مختلف استفاده کرد.

ضرب دکارتی دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند. حاصل ضرب دکارتی آن ها را که به این صورت $A \times B$ نشان داده می شود، مجموعه ای از تمام زوج مرتب[1] های به شکل (a,b) است که در آن ها $b \in B$ و $a \in A$ است:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

مثال) حاصل ضرب دکارتی $A = \{1,2\}$ و $B = \{a,b,c\}$ چیست؟

$$A \times B = \{1,2\} \times \{a,b,c\} = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

$$B \times A = \{a,b,c\} \times \{1,2\} = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

نکـته: اگر B و A دو مجموعه باشند آنگاه ضرب دکارتی $B \times A$ و $A \times B$ برابر نیستند مگر آنکه هر دو مجموعهء $A = B$ باشند.(یعنی در ضرب دکارتی خاصیت جابجایی وجود ندارد.)

ضرب دکارتی سه مجموعه

اگر A و B و C سه مجموعه باشند. حاصل یک از حالات ضرب دکارتی آن ها را که به این صورت $A \times B \times C$ نشان داده می شود، مجموعه ای از تمام زوج مرتب های به شکل (a,b,c) است که در آن ها $c \in C$ و $b \in B$ و $a \in A$ است:

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) | a \in A \ \wedge \ b \in B \wedge \ c \in C\}$$

مثال) حاصل ضرب‌های دکارتی زیر را بدست آورید $A = \{1,2\}$ و $B = \{b,c\}$ و $C = \{\#\}$ چیست؟

الف) $A \times C \times B$

ب) $A \times (B \times C)$

الف) $A \times C \times B = \{(1,\#,b),(1,\#,c),(2,\#,b),(2,\#,c)\}$

- شاید فکر کنید که حاصل $A \times (B \times C)$ یک سه‌تایی مرتب است اما اینطور نیست در حقیقت چون حاصل $B \times C$ داخل پرانتز است ابتدا این ضرب دوتایی انجام میشود و حاصل آن در زیر آمده است سپس A در آن ضرب خواهد شد.

ب) $A \times (B \times C) = A \times \{(b,\#),(c,\#)\} = \{(1,(b,\#)),(2,(c,\#))\}$

[1] Ordered Pair

رمول کلی ضرب دکارتی

اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعه باشند. حاصل یکی از حالات ضرب دکارتی آن ها را که به صورت n تایی مرتب است:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}$$

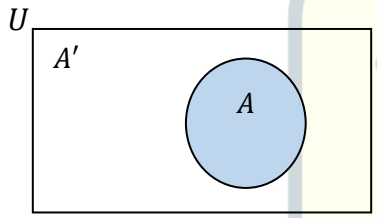
این یک فرمول کلی برای ضرب دکارتی n مجموعه که ارائه شد؛ در فصل بعد خواهید دید که ما به کمک عملیات ضرب روی مجموعه‌ها روابطی را میسازیم که در حقیقت این روابط بسیاری از مفاهیم کلی و بزرگ در دنیای واقعی را تشکیل میدهد.

مجموعهء متمم[1]

تعریف مجموعهء متمم: اگر A یک مجموعه باشد متمم آن شامل همهء عناصر مجموعهء مرجع بجز خود A میباشد و آن را با « A' یا $\bar{A}$ » نشان میدهیم.

$$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

- نمودار ون متمم:



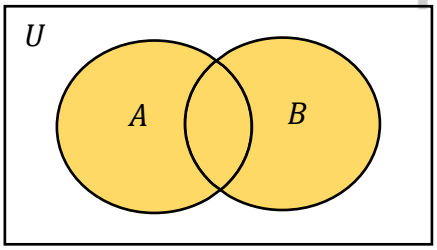
اجتماع[2] دو مجموعه

تعریف اجتماع: اجتماع دو مجموعهء B و A را به صورت $A \cup B$ نشان میدهیم و شامل همهء عناصری است که یا در A باشند یا در B یا در هر دو مجموعه باشند:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- نمودار ون اجتماع دو مجموعه: ناحیهء هاشور خورده نشان دهنده مجموعهء حاصل اجتماع است.

Tolpan Academy



- عمل اجتماع روی دو مجموعه حاصلش مجموعه‌ای است که همهء عناصر هر دو مجموعه را داراست.

[1]

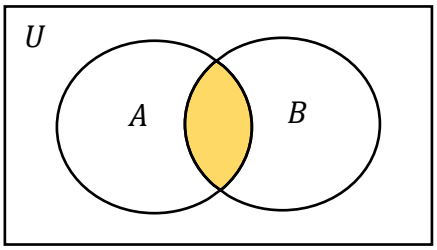
[2] union

اشتراک[1]

تعریف اشتراک: اشتراک دو مجموعهء B و A را به صورت $A \cap B$ نشان میدهیم و شامل همهء عناصری است که در A و B مشترک است:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- نمودار ون اشتراک دو مجموعه: ناحیهء هاشور خورده نشان دهنده مجموعهء حاصل اشتراک است.

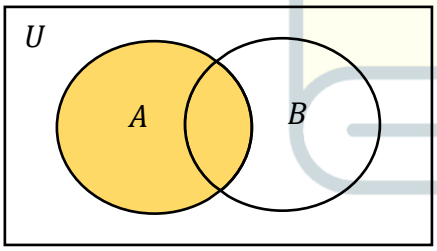


تفاضل[2]

تعریف تفاضل: تفاضل دو مجموعهء B و A را به صورت $A - B$ نشان میدهیم و شامل همهء عناصری است که در A هست ولی در B نیست:

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge x \notin B\}$$

- نمودار ون اشتراک دو مجموعه: ناحیهء هاشور خورده نشان دهنده مجموعهء حاصل تفاضل است.



نکته: عمل تفاضل معادل هم ارزی زیر است:

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

مثال) مجموعهء $A = \{0,1,2,3\}$ و $B = \{4,5,6,7,8,9\}$ دو مجموعهء از هم جدا هستند اشتراک و اجتماع و تفاضل آن ها را بیابید.

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$A - B = \{0,1,2,3\}$$

$$B - A = \{4,5,6,7,8,9\}$$

[1] intersection
[2] difference

نکته: در تفاضل دو مجموعه $A - B$ و $B - A$ با هم برابر نیستند. مگر آنکه $A = B$ باشند.

تعریف مجموعهء جدا از هم: دو مجموعه را از هم جدا می نامیم اگر اشتراکشان مجموعهء تهی باشد.

مثال) مجموعهء $A = \{a, 1, b, 7\}$ و $B = \{aa, ab, a, 7,8,9\}$ مفروض اند. اشتراک و اجتماع و تفاضل آن ها را بیابید.

حل)

$A \cap B = \{a, 7\}$

$A \cup B = \{a, 1, b, 7, aa, ab, 8,9\}$

$A - B = \{1, b\}$

$B - A = \{aa, ab, 8,9\}$

قوانین مجموعه ها

قوانین در مجموعه‌ها هم همانند قواعد در منطق است. ما به وسیله آن سعی میکنیم که حاصل عملیات های مختلف پیچیده‌ای که وجود دارد را ساده سازی کرده و جواب نهایی را بیابیم قوانین در مجموعه‌ها به شرح زیر است:

قوانین مجموعه ها	
نام	قوانین
قوانین همانی	$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$
قوانین تسلط	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
قوانین خودنمایی	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
نقیض متمم گیری	$\overline{(\bar{A})} = A$
قوانین تعویض پذیری	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
قوانین شرکت پذیری	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
قوانین پخش پذیری	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
قوانین دمورگان	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
قوانین جذب	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
قوانین متمم	$A \cup \bar{A} = U$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Tolpam Academy

اثبات این قوانین کار بسیار ساده‌ای است و به روش‌های زیادی میتوان این کار را انجام داد. با توجه به اینکه ما در فصل قبل با منطق آشنا شدیم و در این فصل فهمیدیم که همهء عملیات های جبر مجموعه به وسیله منطق تعریف میشوند میتوان از منطق برای اثبات این قوانین استفاده کرد.

مثال) قانون اول دمورگان را اثبات کنید.

- راهنمایی: از تعاریف عملیات‌های جبر مجموعه استفاده کنید.

$$\begin{aligned}\overline{A \cap B} &= \{x \mid x \notin A \cap B\}\\ &= \{x \mid \neg(x \in A \cap B)\}\\ &= \{x \mid \neg(x \in A \ \wedge \ x \in B)\}\\ &= \{x \mid x \notin A \ \vee \ x \notin B\}\\ &= \{x \mid x \in \bar{A} \ \vee x \in \bar{B}\}\\ &= \{x \mid x \in \ \bar{A} \cup \bar{B}\}\\ &= \bar{A} \cup \bar{B}\end{aligned}$$

مثال) خاصیت (قانون) پخش پذیری را در مجموعه ها اثبات کنید.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

شما میتوانید همگی قوانین مجموعه‌ها را به روش بالا به اثبات برسانید پس دیگر به بحث اثبات این قوانین نمی‌پردازیم و بیشتر تمرکز بر این داریم که با استفاد از همین قوانین مسائل پیچیده تر را حل کنیم.

Iolpam Academy

مثال) فرض کنید که C و B و A مجموعه باشند نشان دهید که : $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$

$\overline{\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})} = \bar{\boldsymbol{A}} \cap (\overline{\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}})$	دمورگان	1
$= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$	دمورگان	2
$= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$	شرکت پذیری	3
$= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$	شرکت پذیری	4

- دقت کنید که در حل این سوال در همان قدم دوم یعنی دومین باری که قانون دمورگان را اعمال کردیم اثبات کامل شده بود اما و میتوانستیم ادامه ندهیم اما به این دلیل که جواب نهایی کاملا شبیه صورت سوال باشد دو بار از قانون شرکت پذیری استفاد شد تا این نکته که در عملیات های اجتماع و اشتراک خاصیت جابجایی وجود دارد اشاره شود.

3 فصل سوم: رابطه‌ها

- مقدمه‌ای بر فصل سوم

پس از آشنایی با مجموعه‌ها به‌عنوان بنیادی‌ترین ساختار در ریاضیات گسسته، گام طبیعی بعدی بررسی ارتباط میان اعضای این مجموعه‌هاست. مفهوم **رابطه** چارچوبی دقیق برای توصیف، تحلیل و مدل‌سازی این ارتباط‌ها فراهم می‌کند و یکی از مهم‌ترین ابزارهای ریاضیات و علوم کامپیوتر به‌شمار می‌رود. بسیاری از ساختارهای شناخته‌شده، از جمله توابع، گراف‌ها، روابط ترتیب، روابط هم‌ارزی، پایگاه‌های داده، زبان‌های صوری و نظریه‌ی محاسبات، بر پایه‌ی مفهوم رابطه شکل می‌گیرند. ازاین‌رو، شناخت رابطه‌ها تنها مطالعه‌ی یک مفهوم مستقل نیست، بلکه گامی اساسی در درک نحوه‌ی سازمان‌دهی و تعامل میان اشیا و داده‌ها در ساختارهای گسسته محسوب می‌شود.

در این فصل، ابتدا مفهوم رابطه و روش‌های مختلف نمایش آن معرفی می‌شود. سپس ویژگی‌های بنیادی رابطه‌ها، مانند بازتابی بودن، تقارن، پادتقارنی و تعدی، بررسی شده و نقش هر یک در تحلیل ساختارهای ریاضی تبیین می‌شود. در ادامه، مفهوم بستار رابطه‌ها و روش‌های محاسبه‌ی بستارهای مختلف مورد مطالعه قرار می‌گیرد و نمایش رابطه‌ها با استفاده از ماتریس‌ها و گراف‌های جهت‌دار معرفی می‌شود. بخش مهم دیگری از این فصل به روابط هم‌ارزی و روابط ترتیب اختصاص دارد؛ ساختارهایی که ابزار مناسبی برای دسته‌بندی، مقایسه و سازمان‌دهی عناصر فراهم می‌کنند و در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات و علوم کامپیوتر کاربرد دارند. بدین‌ترتیب، خواننده با مهم‌ترین مفاهیم و ابزارهای لازم برای تحلیل روابط و ساختارهای مبتنی بر آن‌ها آشنا خواهد شد.

مطالعه‌ی این فصل، پیوندی منطقی میان مباحث منطق، مجموعه‌ها و فصل‌های بعدی کتاب برقرار می‌کند. همان‌گونه که مجموعه‌ها چارچوب تعریف اشیا را فراهم می‌کنند، رابطه‌ها نیز نحوه‌ی تعامل میان آن‌ها را مشخص می‌سازند و زمینه‌ی شکل‌گیری مفاهیمی همچون توابع، گراف‌ها و بسیاری از ساختارهای گسسته را فراهم می‌آورند. انتظار می‌رود خواننده پس از پایان این فصل، توانایی تعریف، نمایش و تحلیل انواع رابطه‌ها، بررسی خواص آن‌ها، تشخیص روابط ویژه و به‌کارگیری این مفاهیم در مدل‌سازی و حل مسائل ریاضیات گسسته و علوم کامپیوتر را به‌دست آورده باشد.

Tolpam Academy

برگی از تاریخ(تاریخچه نظریهء روابط)

اندیشه‌ی مطالعه‌ی ارتباط میان اشیا و پدیده‌ها، از دیرباز در ریاضیات و منطق مورد توجه بوده است. ریاضیدانان و منطق‌دانان همواره تلاش می‌کردند قواعدی برای توصیف وابستگی‌ها، مقایسه‌ها و ارتباط میان مفاهیم مختلف ارائه دهند؛ اما تا پیش از شکل‌گیری نظریه‌ی مجموعه‌ها، چارچوبی دقیق و عمومی برای بیان این ارتباط‌ها وجود نداشت. پیشرفت‌های منطق ریاضی در آثار اندیشمندانی همچون **آگوستوس دِ مورگان** و **گوتلوب فرگه**، زمینه را برای شکل‌گیری تعریف نوین رابطه فراهم کرد و نگاه ریاضیدانان را به شیوه‌ی توصیف ارتباط میان اشیا دگرگون ساخت.

با گسترش نظریه‌ی مجموعه‌ها در اواخر قرن نوزدهم، مفهوم رابطه به‌صورت رسمی به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از ضرب دکارتی دو یا چند مجموعه تعریف شد. این تعریف ساده اما قدرتمند، امکان مطالعه‌ی دقیق انواع مختلف رابطه‌ها را

فراهم ساخت و پایه‌ای برای معرفی مفاهیمی مانند روابط هم‌ارزی، روابط ترتیب و توابع شد. از آن پس، رابطه‌ها به یکی از ابزارهای اصلی در تحلیل ساختارهای ریاضی و بیان وابستگی میان عناصر تبدیل شدند.

در قرن بیستم، اهمیت نظریه‌ی روابط فراتر از مرزهای ریاضیات گسترش یافت و در علوم کامپیوتر جایگاهی بنیادین پیدا کرد. مفاهیمی مانند پایگاه‌های داده، گراف‌ها، زبان‌های صوری، نظریه‌ی محاسبات، طراحی الگوریتم‌ها و مدل‌سازی سامانه‌های اطلاعاتی، همگی بر پایه‌ی روابط و خواص آن‌ها شکل گرفته‌اند. امروزه، نظریه‌ی روابط پلی میان منطق، نظریه‌ی مجموعه‌ها و بسیاری از شاخه‌های ریاضیات و علوم کامپیوتر به‌شمار می‌رود و نقشی اساسی در تحلیل و سازمان‌دهی ساختارهای گسسته ایفا می‌کند.

Tolpam Academy