10) limite de la somme des termes d'une suite géométrique

On considère la suite (U_n) définie sur N par $U_n=1 + x + x^2 +... + x^n$ où x est un nombre réel. Déterminer la limite de (U_n) selon les valeurs de x .

-Si $x\geq 1$: alors $U_n=\frac{1-x^n}{1-x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x^n = -\infty$ et $1 - x = -\infty$ (par somme)

On a une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$

$U_n = \frac{x^n(\frac{1}{x^n}-1)}{x(\frac{1}{x}-1)} = \frac{x\ (\frac{1}{x^n}-1)}{\frac{1}{x}-1}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ (\frac{1}{x^n} - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \times \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x^n} - 1)$

$= \infty \times -1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - 1 = 0 - 1 = -1$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$

Si $0 > x > 1$: Alors $U_n=\frac{1-x^n}{1-x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n=0$ (car $0 > x > 1$)

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x^n = 1$ (par somme)

On obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} Un = \frac{1}{1-x}$

Exemple: Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} +... + \frac{1}{3^n}$

D'après le cours: Si l'on nomme cette somme Un : $\lim\limits_{x \to +\infty} Un = \frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}$ or

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{3})^n = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-0}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

Et d'après ce qu'on a démontré, si $0 > x > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} Un = \frac{1}{1-x}$

et $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

Résumé : La limite de la somme des termes d'une suite géométrique dépend de sa raison q :

si $q \geq 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} =+ \infty$

si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} = \frac{1}{1-x}$