شمارش

یکی از مفاهیم و مطالعات اساسی در ترکیبیات مفهوم شمارش است.

وقتی در مورد این مفهوم در درسی ترکیبیاتی صحبت میکنیم در وقع به مجموعه ای از تکنیک ها اشاره میکنیم که در موقعیت های مختلف می تواند جهت شمارش پدیده ای ترکیبیاتی مورد استفاده قرار گیرند.

این مجموعه از تکنیک ها به کمک تجربه به صورت سیستماتیک در آمده و هریک در حل رده خاصی از مسایل مورد استفاده قرار میگیرد.

اصل جمع: با مثالی این اصل را توضیح می دهیم.

فرض کنید میخواهیم همه کلمات سه حرفی را بشماریم.

میتوانیم کلمات سه حرفی که حرف اول انها صدا دار است را یک بار بشماریم و آن هایی که حرف اولشان بی صدا است را یکبار. درنهایت دو عدد را با هم جمع می نماییم.

اگر با وضعیتی رو به رو بودیم که کاری به m طرق و کار دیگری به n طریق قابل انجام بود ولی نه با هم، این اصل می تواند مد نظر قرار گیرد.

اصل ضرب: فرض کنید یک کار را بتوان به m طریق و کار دیگر را به n طریق انجام داد (بدون تاثیر پذیری از یکدیگر) در این صورت در کل به m*n طریق این کارها قابل انجام هستند.

مثال: فرض کنید از بین ۴ کتاب میخواهید یکی را انتخاب کنید و نیز از بین ۳ دفتر یکی را انتخاب کنید. در کل به $4 * 3 = 12$ طریق این انتخاب ها ممکن هستند.

جایگشت ها: فرض کنید n شی متمایز را میخواهیم در قفسه ای با r جایگاه $(r \leq n)$ بچینیم. که از سمت چپ به راست مشخص هستند.

به چند طریق این کار ممکن است؟

مثال:

$$\underline{10}\ \ \underline{9}\ \ \underline{8}\ \ \underline{7}\ \ \underline{6}\ \ \underline{5}\ \ \underline{4} \rightarrow \frac{10!}{3!}$$

تحلیل دیگر: میتوان اینطور تصور کرد که به جای r جایگاه n جایگاه داریم و n شی را در انی n جایگاه میخواهیم بچینیم که به !n قابل انجام است.

حالات اضافی شمرده شده است. حال فرض کنید n-r جایگاه اخر را پوشانده ایم. این منجر میشود که برخی حالاتی که متمایز بوده اند حالا یکسان در نظر گرفته شوند. میتان این را به کمک روابط هم ارزی و افراز ها مشاهده نمود.

داریم و n شی را در انی n جایگاه میخواهیم بچینیم که به !n قابل انجام است.

حالات اضافی شمرده شده است. حال فرض کنید n-r جایگاه اخر را پوشانده ایم. این منجر میشود که برخی حالاتی که متمایز بوده اند حالا یکسان در نظر گرفته شوند. میتوان این را به کمک روابط هم ارزی و افراز ها مشاهده نمود.

<u>10</u> <u>9</u> <u>8</u> <u>7</u> <u>6</u> <u>5</u> <u>4</u>

--3-- --2-- --1--

فرمول در حالت کلی

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

نکته: اگر مجاز به تکرار استفاده می بودیم، با کمک اصل ضرب فرمول n^r را بدست می آوریم.

کمی فرم مساله را تغییر می دهیم:

فرض کنید n شی داریم. n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم .... n_r تا از نوع r ام.

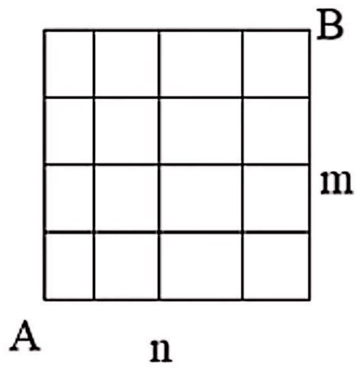
تعداد آرایش های ممکن برای این اشیاء چیست؟

پاسخ: به $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ توجه می کنیم و ابتدا تمام حالات چینش آن را در نظر میگیریم. با این کار حالات زیادی اضافی شمارش میشوند که میتوان آن ها را با اقدام زیر حذف نمود.

پاسخ مساله:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_r!}$$

مساله: فرض کنید مستطیلی به شکل زیر داریم. تعداد حالت هایی که مسیر از A به B رسید که همواره در جهت راست یا بالا حرکت کنیم چقدر است؟



حل: میخواهیم مسله را به فرم مناسبی مدل سازی کنیم.فرض کنید نام خانواده مسیرهای مجاز را C بگذاریم. هر مسیر متشکل از n حرکت به سمت راست و m حرکت به سمت بالا است و در کل m+n حرکت مسیر مارا می سازد.

پس میتوان هر مسیر را با دانباله ای به طول m+ n متشکل از m نماد r =right و n نماد متشکل از u = up متناظر گرفت. پس خانواده C در تناظر دو سویی با خانواده همه دنباله های به طول m+n متشکل از

m تا r و n تا u است. تعداد این دنباله ها با روش بیان شده قابل محاسبه می باشد :

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$