جزوه مبانی ترکیبیات استاد مفیدی

جلسه چهارم – ۱۱مهر

مساله انتخاب با تکرار:

در این نوع مسایل تکرار مجاز است ولی ترتیب مهم نیست.

مثال: فرض کنید مجموعه X به صورت $X = \{1,2, \dots ,10\}$ باشد و می خواهیم ۴ عنصر از این مجموعه انتخاب کنیم. با درنظر گرفتن این نکته که اولا ترتیب انتخاب اهمیت ندارد ثانیا می توان از یک عنصر چند بار برداشت مثلا $\{1,1,1,10\}$ یکی از این گونه انتخاب هاست. به چند طریق این کار امکانپذیر است؟

ایده حل: حالات ممکن و مجاز را به فرم زیر توصیف می نماییم.

ادعا میکنیم هر جواب از این مساله متناظر با با یک جواب از معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 4$ است که مقادیر x_i ها صحیح و نامنفی است.

توجه نمایید که هر جواب از معادله بالا را بگیریم و به تعداد x_1 تا عنصر ۱، x_2 تا عنصر ۲ و ... x_{10} تا عنصر ۱۰ از مجموعه برداریم، آنچه حاصل می شود یک جواب برای مساله اصلی است. برعکس هرجواب مساله ی اصلی بوضوح یک پاسخ این معادله است.

میتوان تصور کرد که m گوی را در ردیفی قرار دادیم (ترتیب را وارد کردیم) و n-1 چوب را جهت قراردهی در بین این گوی ها در نظر میگیریم. هرچینش چنین گوی های و چوب هایی یک پاسخ برای معادبه به صورت زیر توصیف می کند.

تعداد گوی های بین چوب i ام و i+1 ام، x_{i+1} را مشخص مینماید.

x_1 قبل از چوب اول و x_n بعد از چوب آخر است. مثلا:

- | -| - -

||----

-||---

-||---

پس پاسخ نهایی انتخاب n-1 از m+n-1 می باشد.

شمارش با بازگشت

یکی از روش‌های مهم شمارش استفاده از روابط بازگشتی است. در این روش‌ها سعی می‌شود وضعیت شمارشی مرحله n را به گونه‌ای به وضعیت‌های شمارشی مراحل قبل موکول کنیم و برحسب آن‌ها محاسبه نماییم.

مثال: برج‌های هانوی

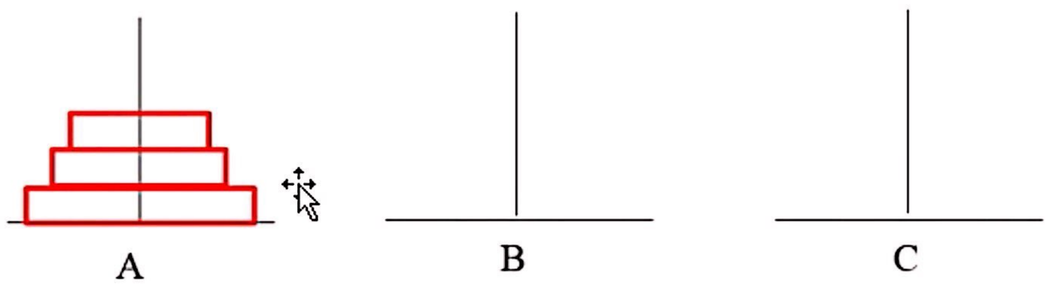
مساله این است که n تا دیسک با سایزهای از پایین به بالا کوچک شونده در یک ستون A داریم و می‌خواهیم همه را به ستون C منتقل کنیم. به طوریکه:

1) ترتیب چینش‌ها در وضعیت اول و آخر یکی باشد.

2) در هرگام یک دیسک را حرکت دهیم.

3) در هیچ لحظه‌ای، یک دیسک بزرگتر روی یک دیسک کوچک‌تر قرار نگیرد.

مساله یافتن مینیمم تعداد حرکات لازم است.


A
B
C

تحلیل مسئله: فرض کنید تعداد حرکات لازم در مرحله‌ی n ام، a_n باشد. می‌توان a_n را اینطور تحلیل کرد که ابتدا $n-1$ دیسک از شماره‌ی 2 تا n را با a_{n-1} مرحله از ستون A به ستون B منتقل می‌کنیم. سپس دیسک اول از ستون A را به ستون C منتقل می‌کنیم. در نهایت با اقدامی برعکس آنچه در گام اول انجام دادیم، در a_{n-1} مرحله، دیسک‌های ستون B را به روی دیسک بزرگ در ستون C منتقل می‌کنیم.

در نهایت $a_{n-1}+a_{n-1}+1=2a_{n-1}+1$ مرحله مورد نیاز است:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

و ضمنا بوضوح

$$(a_1 = 1)$$

در نهایت پاسخ زیر بدست می آید:

$$a_n = 2^n - 1$$

مثال دوم: تعداد دنباله‌هایی به طول n از درایه‌های 0 و 1 و 2 که تعداد 0 هایشان فرد باشد را حساب کنید.