جزوه مبانی ترکیبیات استاد مفیدی

جلسه سوم – ۶مهر

میخواهیم سعی کنیم ارتباطی بین ضرایب چند جمله ای هایی از قبیل $(1+n)^n$ و انتخاب ها بیابیم. این رویکرد به ما کمک خواهد کرد که مطالعات شمارشی را با چند جمله‌ای ها و احتمالا عملیات مختلفی که در جبر چند جمله ای موجود است مطالعه نماییم.

قضیه دو جمله ای:

$$(x+y)^n = \sum \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

اثبات: در ضرب $\overbrace{(x+y)\dots(x+y)}^{\text{بار } n}$ برای محاسبه ضریب $x^r y^{n-r}$ باید تمام وضعیت های انتخاب r تا از x های این مولفه های ضریبی (و بقیه شان y) را در نظر گیریم که به $\binom{n}{r}$ حالت امکان پذیر است.

به طور خاص اگر x یا y را مساوی ۱ قرار دهیم بسط زیر درست می شود که ضرایب آن همان سط مربوط به n در مثلث خیام-پاسکال است:

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

توجیه ترکیبیاتی: سمت چپ تعداد همه زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی است. سمت راست نیز همین کمیت را با کمک اصل ضرب می شمارد (هر عضو رو می شود برداشت یا برنداشت)

توجیه جبری: کافیست در بسط $(1+x)^n$ قرار دهیم x=1.

گزاره:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

علت: کافی است در بسط $(x+1)^n$ به جای x مقدار 1- قرار بدهیم تا رابطه فوق شکل بگیرد.

گزاره:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

استدلال:

$$(1+x)^n(1+x)^n = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right]^2$$

در روش بسط باید خروجی هاشیشان یکسان باشد و ضرابط x^i های یکسانی تولید کنند. پس مثلا ضریب x^n در آن ها باید یکی باشد. ضریب x^n در بسط اول به وضوح $\binom{2n}{n}$ است چرا که ضریب x^n بسط $(1+x)^{2n}$ را داریم حساب می کنیم.

در روش بسط دوم نیز این ضریب به فرم $\binom{n}{n}\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{0}\binom{n}{n}$ است. با توجه به تساوری $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ عبارت بالا به فرم $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$ در می آید که همه مساوی $\binom{2n}{n}$ باشد.

گزاره:

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}$$

استدلال

از سمت راست شروع می کنیم:

$$\binom{m+n+1}{m+1} = \binom{m+n}{m+1} + \binom{m+n}{m}$$

$$\binom{m+n+1}{m+1} = \binom{m+n-1}{m+1} + \binom{m+n-1}{m} + \binom{m+n}{m}$$

.
.
.