جزوه مبانی ترکیبیات استاد مفیدی

جلسه دوم – ۴مهر

مسئله: فرض کنید n شئ را دور دایره ای میخواهیم بچینیم. چند حالت متمایز وجود دارد؟ (دو وضعیت که با چرخش دایره به هم قالب تبدیل باشند، یکسان هستند.)

پاسخ: در مقایسه با مساله جایگشت معمولی باید این را در نظر گرفت که که هر وضعیت دایره ای n بار در وضعیت جایگشتی محاسبه می شود، پس پاسخ مسئله $\frac{n!}{n}$ است.

مسئله: فرض کنید n حرف فارسی و n حرف انگلیسی داریم و میخواهیم آن را حول دایره ای به گونه ای بچینیم که حروف یکی در میان انگلیسی باشند. به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

پاسخ: میتوان مساله را اینطوب تحیلی نمود. میتوان هر پاسخ مسئله را به این صورت چرخاند به طوریکه حرف A (فرض کنیم همیشه استفاده شده) در بلاترین نقطه قرار گیرد.

حال وضعیت های قرارگیری n-1 حرف انگلیسی باقی مانده و n حرف فارسی باقی مانده دقیقا مانند دو جایگشت مستقل از هم می شوند.

که میتوان به طور همزمان اجرا شوند. پس تعداد حالات $(n-1)!\,n!$ می شود.

انتخاب:

فرض کنید n شی داریم و میخواهیم m تا از آنها را انتخاب کنیم. به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

تحلیل:

مساله را به فرم جایگشت نیز میتوان تبدیل کرد.

میتوان اینطور تصور کرد که n شی را میچینیم و آنهایی که قرار است انتخاب شوند را ۱ و انهایی که انتخاب نمیشوند را برچسب ۰ رویشان قرار می دهیم.

پس حالا مساله تبدیل به شمارش دنباله هایی به طولn میشود که m تایشان ۱ و n-m تایشان ۰ است.هرگونه جابجایی در جایگاه های ۱ یا در داخل جایگاه های ۰ حالتی را اضافه نمی کند. تعداد انی جابجای های غیر موثر $m!\,(n-m)!$ است. پس در کل $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ پاسخ داریم.

این را با $\binom{n}{m}$ نشان می دهیم.

به بیان تحلیلی دیگر برای محاسبه $\binom{n}{r}$ می پردازیم:

درواقع شی جالب توجه دیگری را میشماریم و از ان به عنوان کاتالیزوری برای شمارش شی اصلی استفاده می کنیم.

فرض کنیم n نفر موجودند و می خواهیم r نفر را از بین آنها انتخاب نماییم. حال مسئله را اینطوری تغییر می دهیم و چیز بیشتری را می شماریم. درواقع تعداد حالاتی که میتوان r نفر را انتخاب و یکیشان را سرگروه کرد. به دو طریق این کمیت را می شماریم.

طریق اول: به $\binom{n}{r}$ حالت میتوان گروهی r تایی انتخاب کرد و به r حالت میتوان یکی از اعضای گروه را سرگروه نمود. پس کلا به $\binom{n}{r}.r$ حالت می توان این اقدام را انجام داد.

طریقه دوم: این بار ابتدا سرگروه را انتخاب می کنیم و سپس برایش تیمی از r-1 عنصر میسازیم. انتخاب سرگروه به n حالت امکان پذیر است. n-1 نفر باقی مانده اند که می توانند در انتخاب r-1 نفر مابقی تیم بین سرگروه موثر باشند. این انتخاب به $\binom{n-1}{r-1}$ طریق امکان پذیر است پس در کل $n.\binom{n-1}{r-1}$ حالت می توان یک تیم و یک سرگروه انتخاب کرد.

رابطه مقابل از مساوی قرار دادن نتایج دو شمارش مختلق برای مجموعه ای یکسان بدست می آید.

$$\mathrm{r}\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1} \to \binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$$

حال میتوان تحلیل بالا را دوباره تکرار کرد و اینبار برای $\binom{n-1}{r-1}$ به جای $\binom{n}{r}$ و رابطه را سمت حل پیش برد.

مثلا بعد از 3 بار تکرار به وضعیت زیر می رسیم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r} \cdot \frac{n-1}{r-1} \cdot \frac{n-2}{r-2} \cdot \binom{n-3}{r-3}$$

در نهایت میبینیم که رابطه $\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$ بدست خواهد آمد.

(Ctrl)

گاهی از نماد $C(n,r)$ نیز برای $\binom{n}{r}$ استفاده می شود.

گزاره:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

گزاره:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

اثبات: تفسیری ترکیبیاتی انجام می دهیم.

یعنی سمت چپ و سمت راست را سایز محاسبه شده از یک مجموعه خاص به دو طریق مختلف نمایش می دهیم.

سمت چپ: تعداد انتخاب هایی r تایی از یک مجموعه n+1 عنصری.

سمت راست: یک عنصر مجموعه را مثل a فیکس می کنیم و مجموعه r را به دو دسته تقسیم می کنیم.

دسته ۱: آنهایی که a دارند $\leftarrow \binom{n}{r-1}$

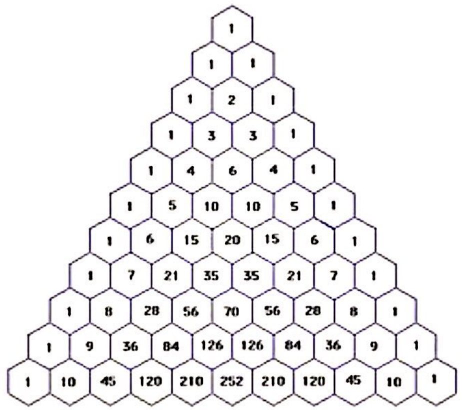
دسته ۲ آنهایی که a ندارند $\leftarrow \binom{n}{r}$

پس سمت راست میشود جمع این دو حالت.

مثلث خیام-پاسکال:

در سطر nام این مثلث از اعداد، اعداد $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ به ترتیب چیده می شوند.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1