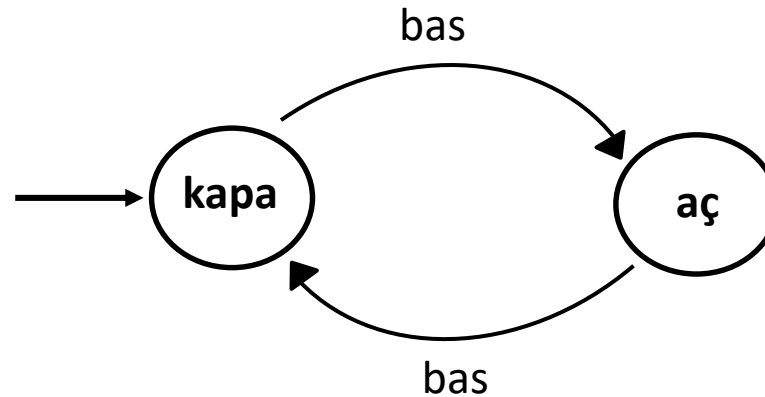


# Otomata Teorisi (BİL 2114)

## Hafta 3: Sonlu Otomata (II.Bölüm)

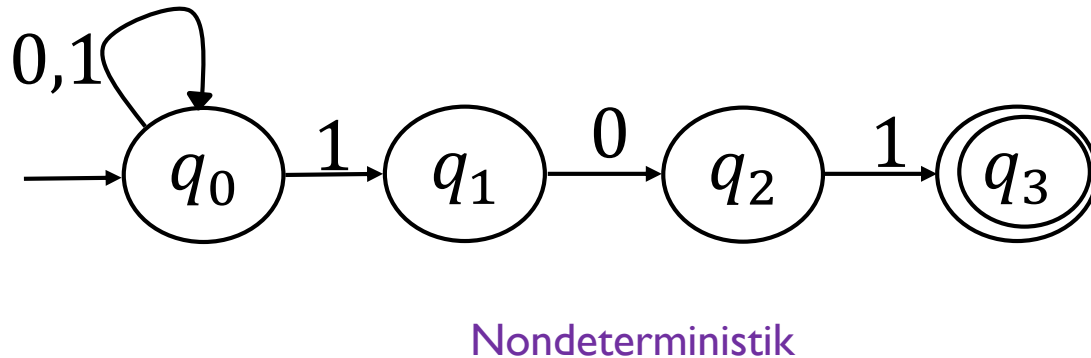
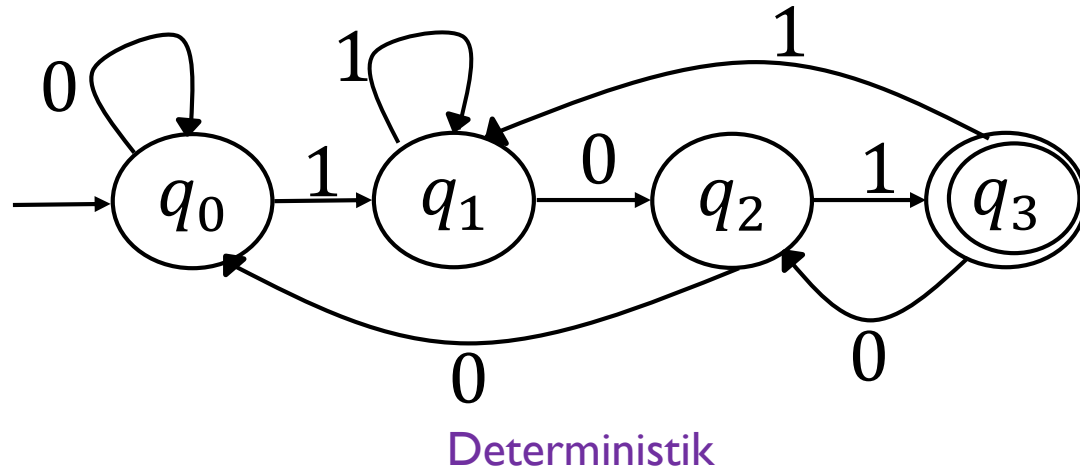


# Hafta 3

## Plan

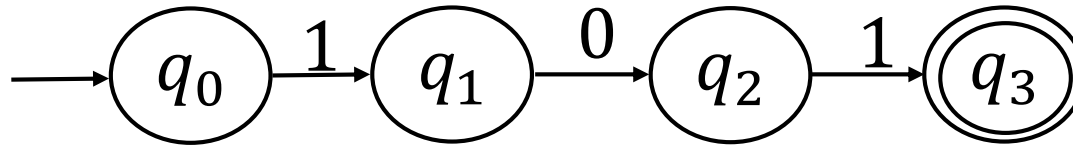
1. NSO inşası
2. Epsilon Geçişleri
3. Nondeterministik Sonlu Otomata'nın Resmi Gösterimi
4. Bir NSO'yu bir DSO'ya Dönüştürme

ör.  $\Sigma = \{0,1\}$  alfabesi kullanılarak üretilen kelimelerden sonu '101' ile biten kelimeri kabul eden deterministik ve nondeterministik sonlu otomatalar:

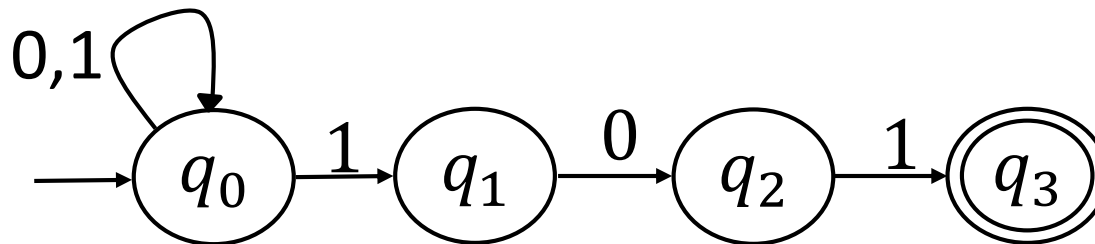


Bir önceki soruda NSO'yu inşa ederken:

Oncelikle 101 geldiginde kabul durumuna ulasan otomata insha edilir:

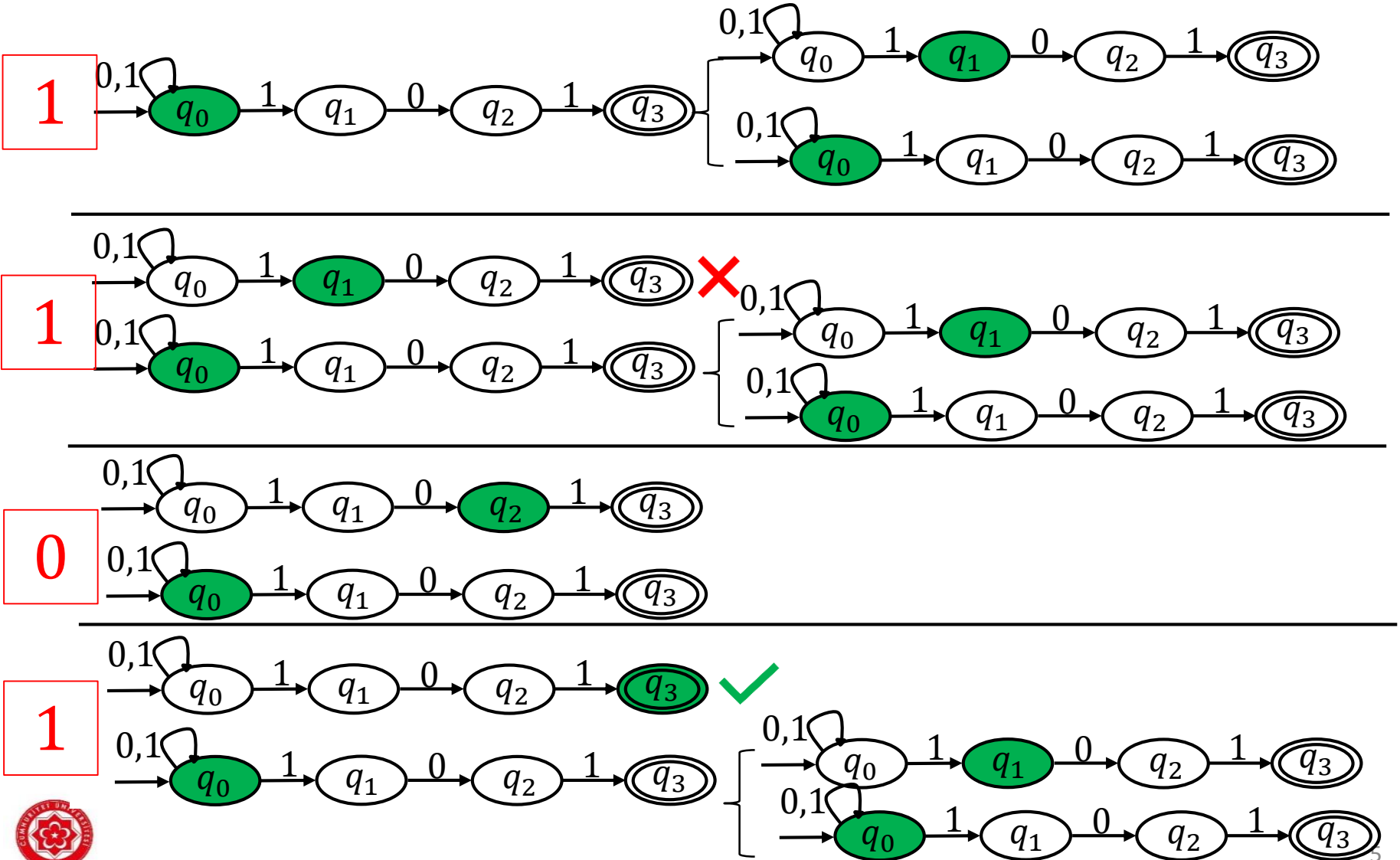


Ve buna  $q_0'$  dan 0 ve 1 oklari ekleriz ki, 0 yada 1 ile baslayip 101 ile biten kelimeri kabul etsin.



## Ek bilgi:

Önceki örnekteki nondeterministik otomata  $q_0'$  da karşılaştığı her 1 harfi için kendini kopyalar. Örnek olarak 1101 kelimesini aldığını düşünelim.

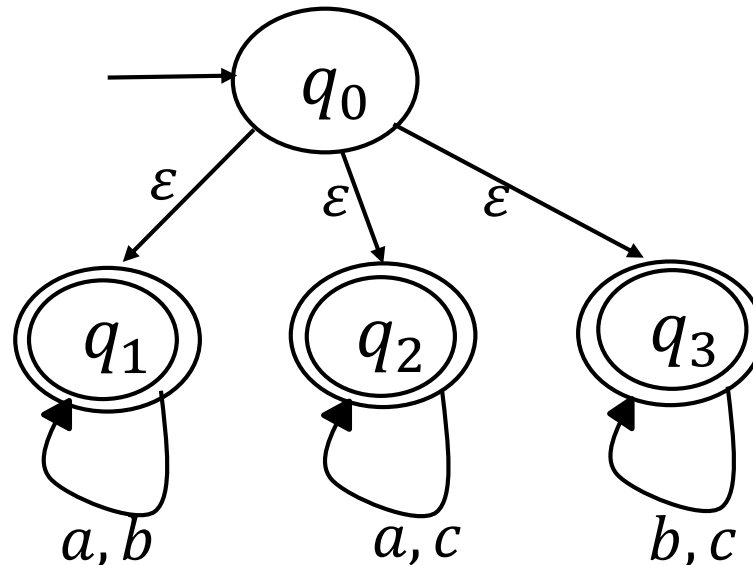


## Epsilon( $\varepsilon$ ) geçişleri

NSO'nun bir diğer güzelliği epsilon geçişlerine izin vermesidir.

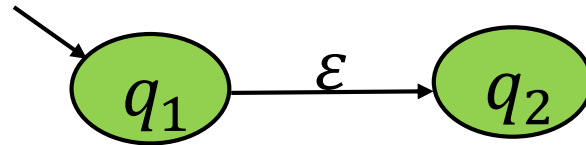
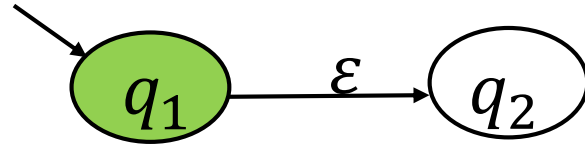
Bu geçiş diğer geçişlerden farklı olarak harf almaz. Yani epsilon ( $\varepsilon$ ) ile bağlanan iki durumdan, birinden diğerine geçmek için bir harf gerekmez; otomatik olarak geçeriz. Yani bu iki durumdan ilkinе vardığımızda diğerine de varmış oluruz.

**ör.**  $\Sigma = \{a, b, c\}$  alfabesi kullanılarak oluşturulan kelimelerden  $a, b, c$  harflerinden ucunu birden içeren kelimeri kabul etmeyen sonlu otomata:

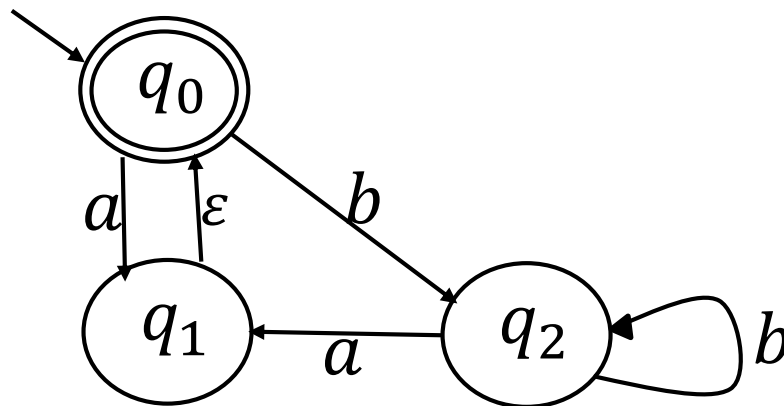


## Epsilon( $\varepsilon$ ) geçişleri

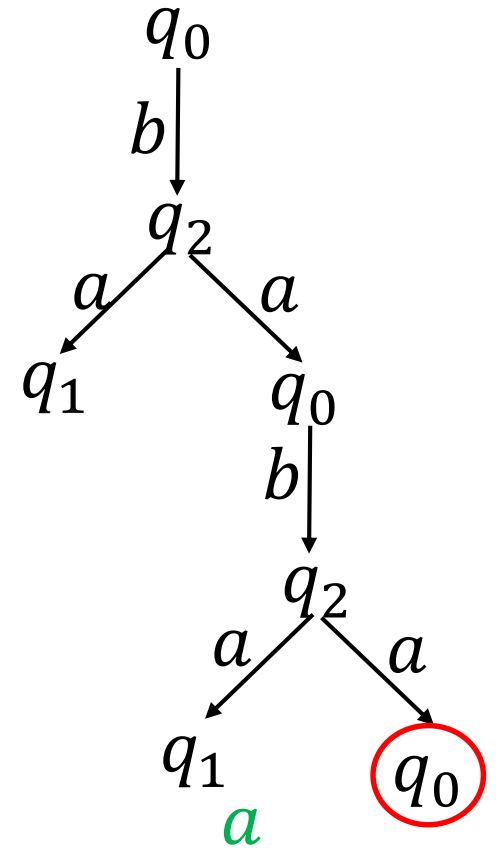
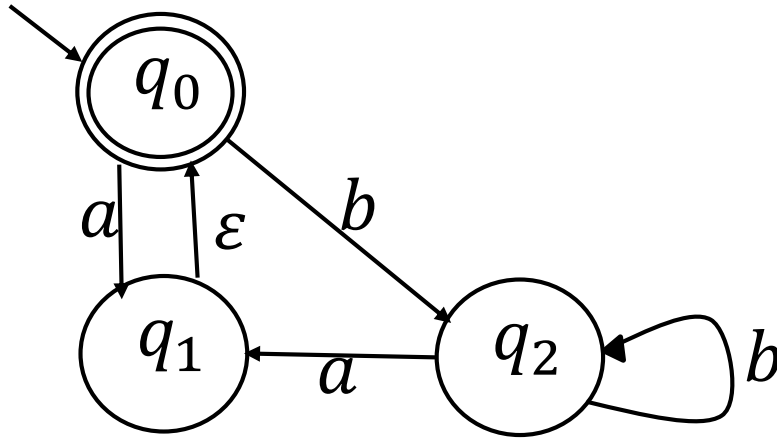
Aralarında bir  $\varepsilon$  geçişi olan iki durumdan ilkine vardığımızda ilkiyle beraber ikinciye de otomatik olarak varmış oluruz.



**ör.**  $\Sigma = \{a, b\}$  alfabesi kullanılarak üretilen kelimelerden  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $baa$  ve  $baba$  kelimelerini kabul eden; fakat  $b$  ve  $bb$  kelimelerini kabul etmeyen sonlu otomata:



$w = \text{baba}$

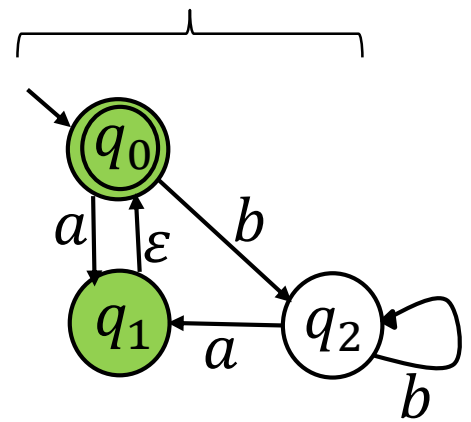
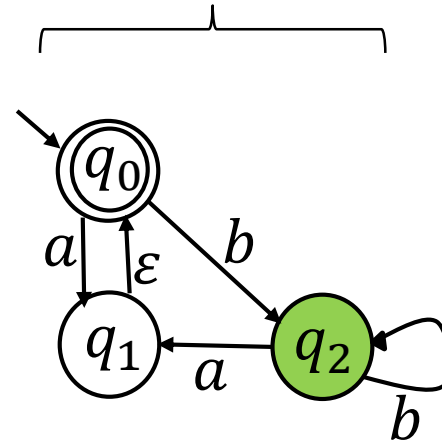
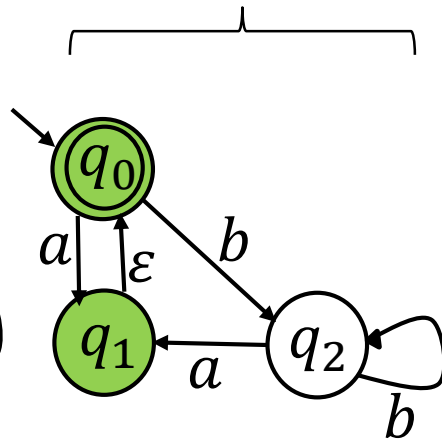
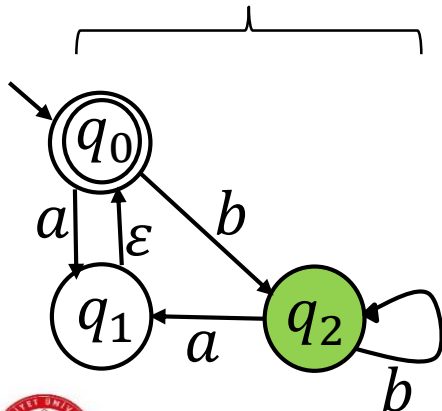


$b$

$a$

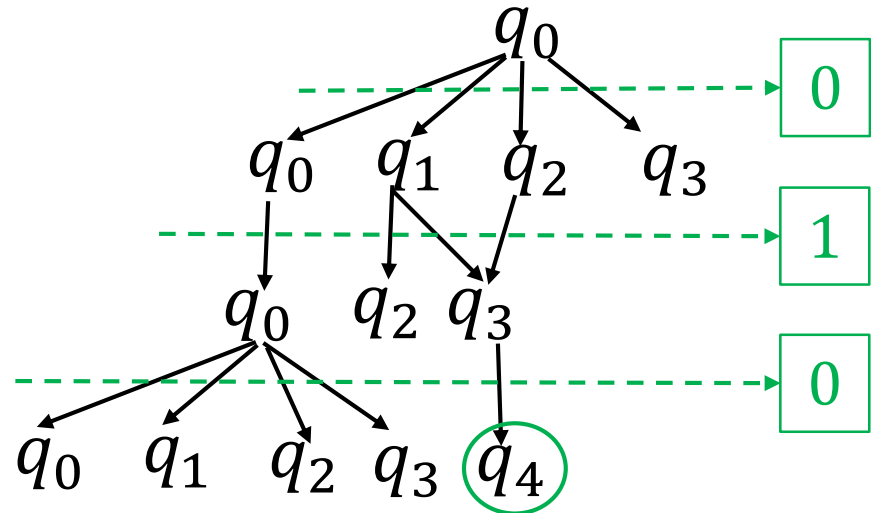
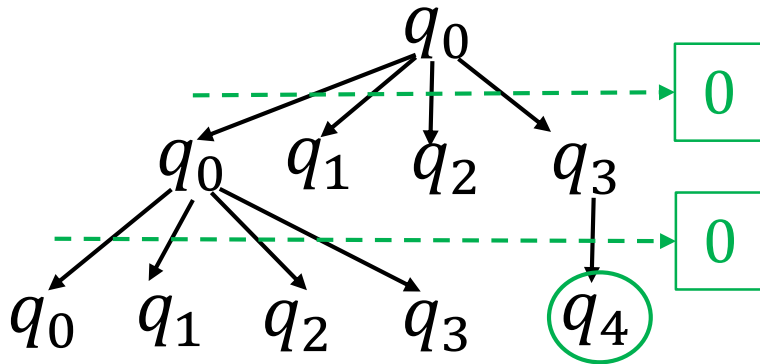
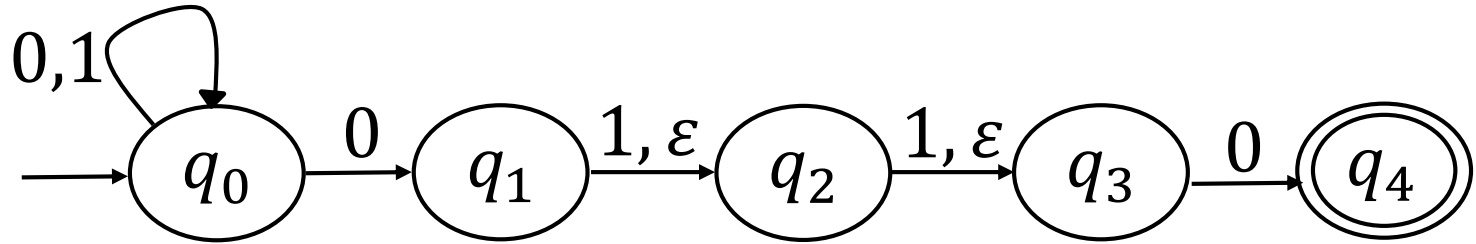
$b$

$a$

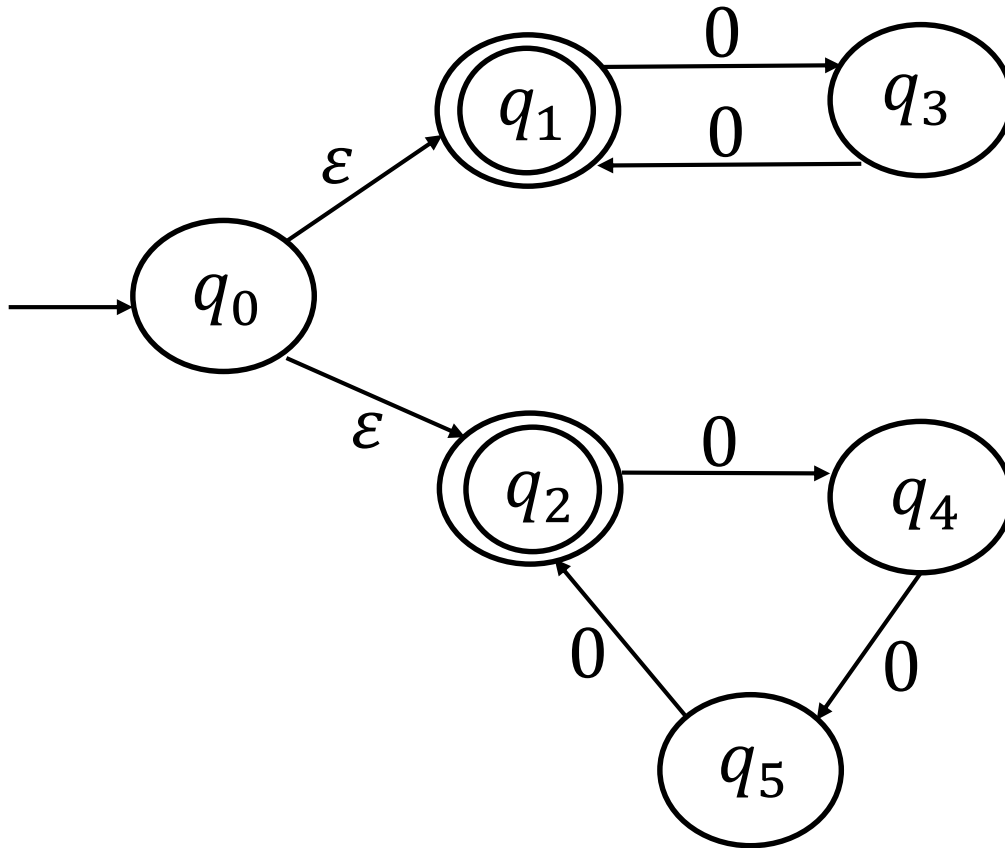




ör.  $\Sigma = \{0,1\}$  alfabeti kullanılarak üretilen kelimelerden sonu '0110' yada '010' yada '00' ile biten kelimeleri kabul eden nondeterministik sonlu otomata:

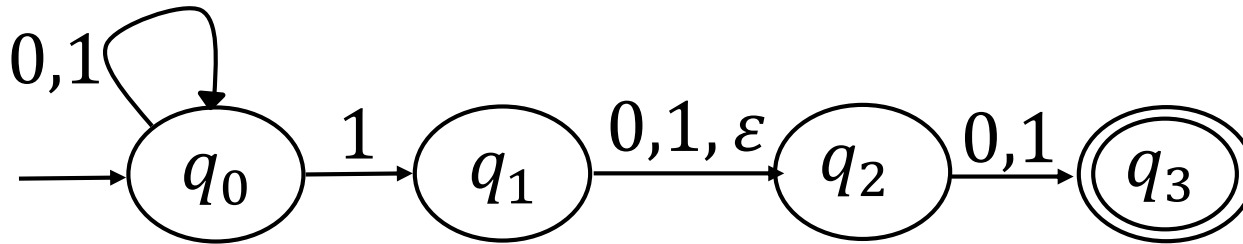


ör.  $\Sigma = \{0\}$  alfabeti kullanılarak oluşturulan kelimelerden 2'nin yada 3'ün katı uzunluğundaki kelimeleri tanıyan sonlu otomata:

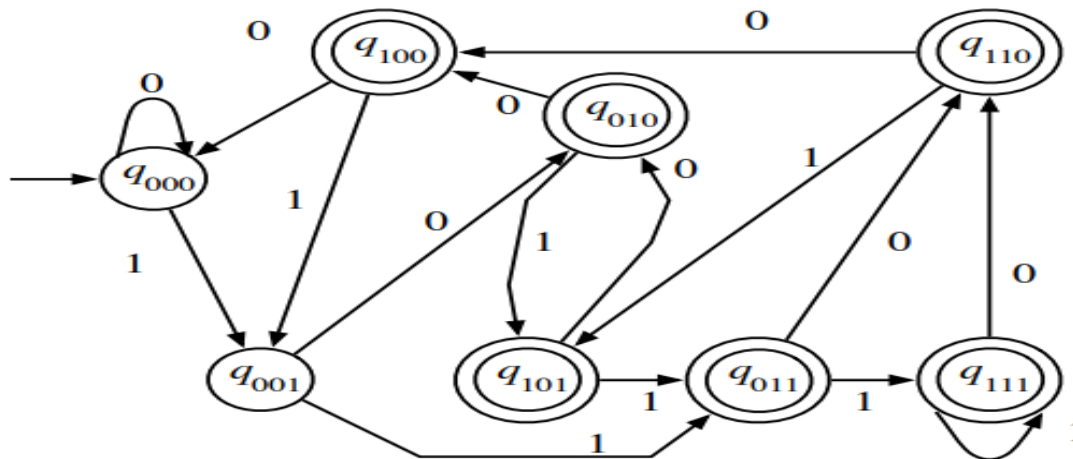


## Neden Nondeterministik?

ör.  $\Sigma = \{0,1\}$  alfabesi kullanılarak üretilen kelimelerden sondan 3. harfi yada sondan 2. harfi 1 olan kelimeleri tanıyan nondeterministik sonlu otomata:



Nondeterministik



Deterministik



# Nondeterministik Sonlu Otomatanın Formal Tanımı

Bir nondeterministik sonlu otomata 5-li sıradır ve  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ile gösterilir. Burada:

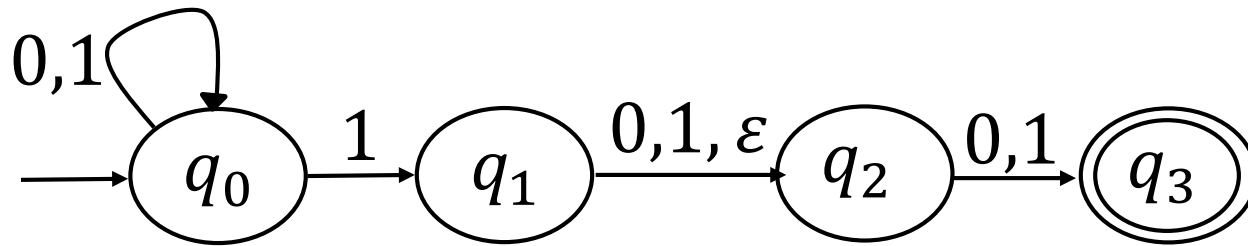
1.  $Q$  tüm durumları içeren sonlu bir kümedir,
2.  $\Sigma$  kullandığımız harfleri (inputları) içeren alfabadir,
3.  $\delta: Q \times \Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  geçiş fonksiyonudur (transition function),
4.  $q_0 \in Q$  başlangıç durumudur,
5.  $F \subseteq Q$  final durumları içeren kümedir.

**Not 1.**  $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ . Yani NSO'da  $\varepsilon$  geçişine de izin veriyoruz.

**Not 2.** Dikkat et! NSO'da geçiş fonksiyonun değer kümesi  $Q$  değil,  $Q$ 'nun güç kümesi olan  $\mathcal{P}(Q)$ 'dur.  $\mathcal{P}(Q)$ 'nin elemanları  $Q$ 'nun altkümeleri idi. Yani böylece NSO'da bir durumdan yalnız bir duruma değil birden çok duruma geçiş yapabiliriz.



ör.



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\},$$

$$\Sigma = \{0,1\},$$

$$q_0,$$

$$F = \{q_3\}.$$

$\delta$	0	1	$\varepsilon$
$q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
$q_1$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$q_2$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$q_3$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



## NSO ve DSO'nun Denkliği

NSO, DSO'dan daha güçlü görünmesine karşın, aslında NSO ve DSO aynı dili tanırlar; yani birbirlerine denktirler.

**Teorem 1** : Her bir DSO zaten bir NSO dur. ( $DSO \subseteq NSO$ )

Bir DSO, bir NSO'ya dönüştürülürken yalnızca geçiş fonksiyonu aşağıdaki gibi değiştirilir:

$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$  iken,  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  olur.

**ör.**  $\delta(q_i, 0) = q_j, \delta(q_i, 0) = \{q_j\}$  olur.

**Teorem 2** : Her bir NSO'ya karşılık bir DSO vardır.

Bir NSO'yu bir DSO'ya dönüştürürken şu süreç izlenir.



## Bir NSO'yu bir DSO'ya dönüştürme:

Bir NSO  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , bir D DSO'ya dönüştürülürken:

1.  $\mathcal{P}(Q)$  oluşturulur, yani  $Q$ 'nın bütün altkümeleri.  $D$ 'nin durumları bu  $\mathcal{P}(Q)$ 'nin elemanları olan altkümeler olur.

2.  $D$ 'nin başlangıç ve final (kabul) durumlarına karar verilir:

Başlangıç durumu:  $N$ 'deki başlangıç durumu  $q_0$ 'ı ve varsa  $q_0$ 'ın  $\varepsilon$  ile bağlandığı diğer durumları içeren  $\mathcal{P}(Q)$ 'nin elemanı olan küme  $D$ 'nin başlangıç durumu olur.

Kabul durumu:  $N$ 'deki kabul durumlarını içeren  $\mathcal{P}(Q)$ 'nin her elemanı  $D$ 'nin bir kabul durumu olur.

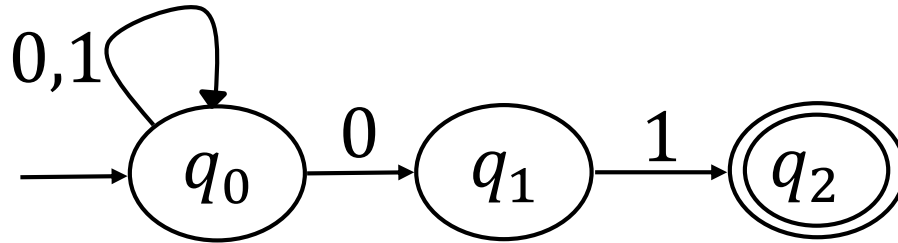
3.  $D$  için geçiş tablosu oluşturulur. Bunun için  $\mathcal{P}(Q)$ 'nin her biri bir altküme olan elemanı için, bu altkümedeki her bir durumun  $\Sigma$ 'daki her bir harf için hangi duruma gittiği bulunur. Bulunan durumların oluşturduğu birleşim kümesi geçiş durumu olur.



## Bir NSO'yu bir DSO'ya dönüştürme:

4. Son olarak  $\mathcal{P}(Q)$ 'nin geçiş alan elemanları için 3'de bulunan geçiş tablosu yardımıyla DSO çizilir.

ör.



$$N = (Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma = \{0,1\}, \delta, q_0, F = \{q_2\})$$

NSO'sunun DSO'ya dönüşümü:

1.  $\mathcal{P}(Q) = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$

2. Başlangıç durumu:  $\{q_0\}$ ,

Kabul durumları:  $\{q_2\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}$

( $\mathcal{P}(Q)$ 'nin  $q_2$ 'yi içeren her elemanını aldık)



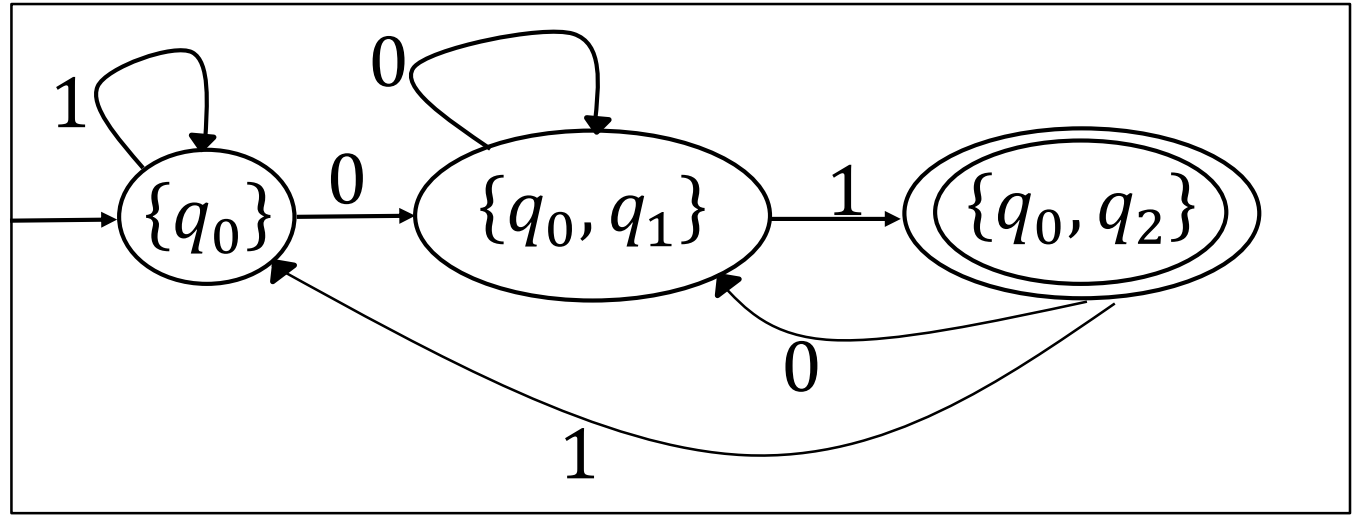
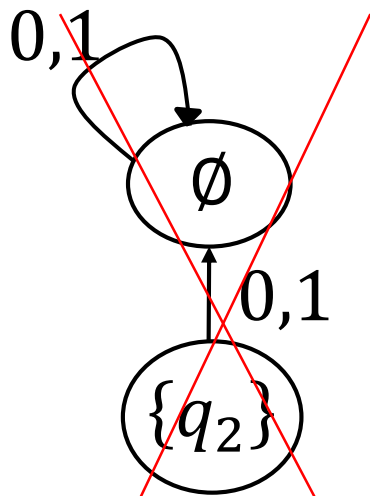


### 3. Geçiş tablosu:

$\delta_D$		0	1
Yeni durumlar	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

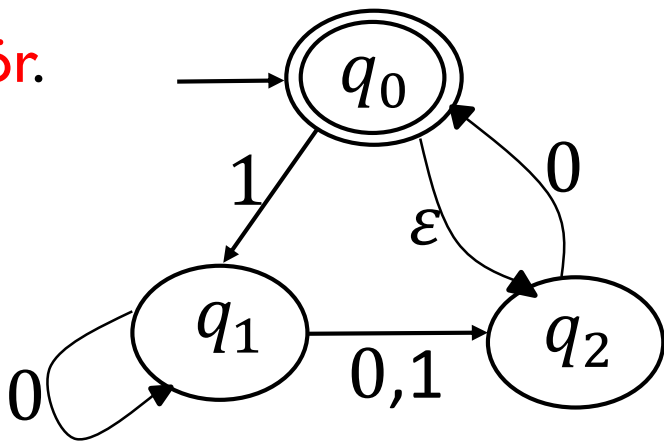
4. Yukarıdaki tabloda yalnızca  $\emptyset$ ,  $\{q_0\}$ ,  $\{q_2\}$ ,  $\{q_0, q_1\}$  ve  $\{q_0, q_2\}$  durumlarına geçiş vardır. O yüzden DSO'yu inşa ederken yalnızca bu durumları dikkate alacağız.





Bu parçaya  
başlangıç durumu  
 $\{q_0\}$ 'dan  
ulaşılamayacağı için,  
bu parçayı atıyoruz.

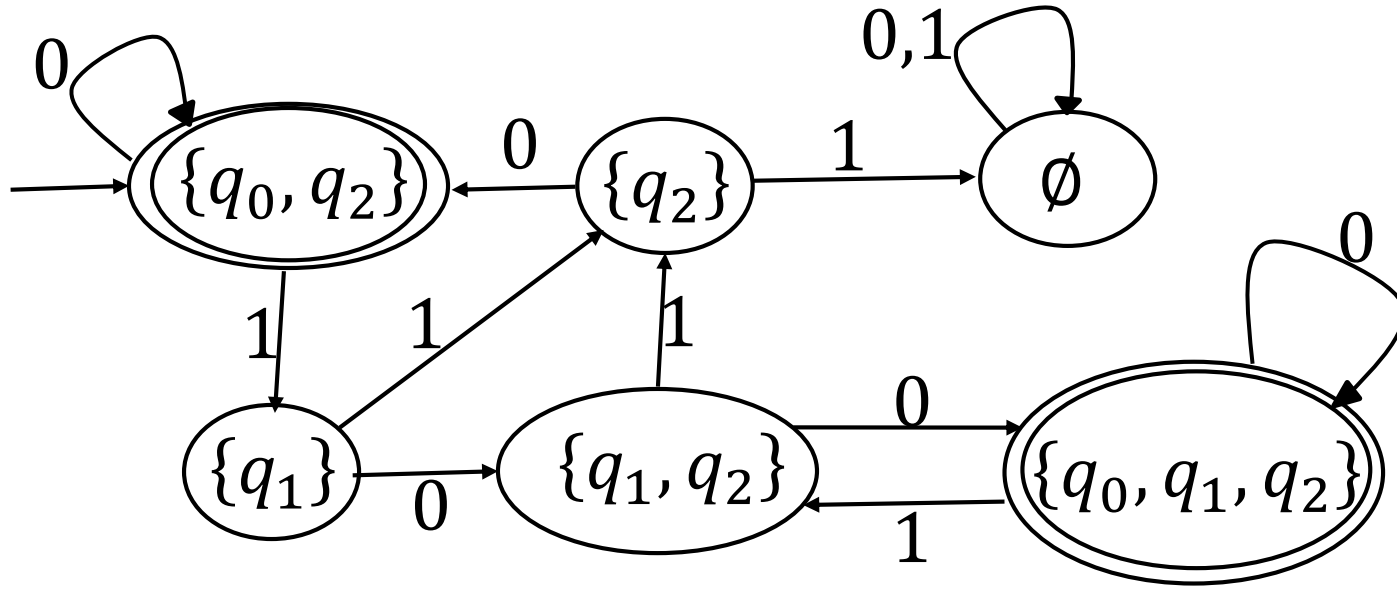
ör.



$\delta_D$	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$

$q_2'$  den 0 ile hem  $q_0'$ 'a, hem de oradan  $\varepsilon$  ile otomatik olarak  $q_2'$  ye gidilir!





**Not 1.** Başlangıç durumu yalnız  $q_0$  değil,  $q_0$  ile birlikte  $q_0'$  ın  $\varepsilon$  ile bağlandığı  $q_2$ .

**Not 2.** Kabul durumları NSA'daki kabul durumu olan  $q_0'$  ı içeren tüm alt kümeler.