Aktuelle Lernförderung

Mathe 34

Änderungsraten und Bestände

Liebe Förderlehrer,

bitte arbeitet mit euren Schülerinnen und Schülern hauptsächlich an deren Unterlagen zum aktuellen Schulstoff – also Hausaufgaben erklären, Tests und Klassenarbeiten vorbereiten, sowie das aktuelle Themengebiet erläutern.

Diese Arbeitsblätter sind ausschließlich zu eurer Unterstützung gedacht, falls die SuS einmal nichts dabei haben sollten, keinen Unterricht in Mathe hatten oder noch weitere Übung in einem Themengebiet benötigen.

Danke und viel Erfolg!

Beispiele:

1. zu Ableitung einer Konstanten:

   z.B.: $f(x) = 5 \to f'(x) = 0$ oder $f(x) = -8 \to f'(x) = 0$

2. zu Ableitung von x

   z.B.: $f(x) = x + 5 \to f'(x) = 1$ oder $f(x) = x - 8 \to f'(x) = 1$

3. zu Potenzregel:

   z.B.: $f(x) = x^3 \to f'(x) = 3x^2$ oder $f(x) = x^{-5} \to f'(x) = -5x^{-6}$

4. zu Faktorregel:

   z.B.: $f(x) = 2x^3 \to f'(x) = 6x^2$ oder $f(x) = -4x^{-4} \to f'(x) = 16x^{-5}$

5. zu Summen-/Differenzregel:

   z.B.: $f(x) = x^3 + 2x - 5 \to f'(x) = 3x^2 + 2$

Neben Potenzfunktionen der Form $f(x) = x^p$ haben wir bereits weitere Funktionen kennengelernt, wie die Exponential- und Logarithmusfunktion. Bei diesen beiden Funktionen müssen wir uns die Ableitung einfach merken, denn die Ableitung von $f(x) = e^x$ ist z.B. $f'(x) = e^x$. Die Ableitung entspricht also der e-Funktion selbst. Diese und weitere besondere Ableitungen stehen in der nebenstehenden Tabelle, welche ihr unbedingt können müsst.

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\ln(x)$	$1/x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$1/(2\sqrt{x})$
$1/x = x^{-1}$	$-x^{-2} = -1/x^2$

4.3 Höhere Ableitungsregeln

Bei verketteten Funktionen oder wenn zwei Funktionen (in denen jeweils ein x vorkommt) miteinander multipliziert werden, müssen höhere Ableitungsregeln beachtet werden.

Kettenregel: $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Beispiele

1. zur Kettenregel: $f(x) = (x^3 + 5x)^3$

   mit $u(v) = v^3 \rightarrow u'(v) = 3v^2$ und $v(x) = x^3 + 5x \rightarrow v'(x) = 3x^2 + 5$ lautet die erste Ableitung:

   $$f'(x) = 3 \cdot (x^3 + 5x)^2 \cdot (3x^2 + 5)$$

   Klammersetzung nicht vergessen bei $v'(x)$!

   „Regel" für die Ableitung von komplizierteren Potenzausdrücken:

   $$((etwas)^p)' = p \cdot (etwas)^{p-1} \cdot (etwas)'$$

   Das *etwas* steht für eine beliebige Funktion, wie z.B. $x^3 + 5x$ oder e^x etc.

2. zur Produktregel: $f(x) = \underbrace{(2x^3 - 5)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sqrt{x}}_{v(x)}$

   mit $u(x) = 2x^3 - 5 \rightarrow u'(x) = 6x$ und $v(x) = \sqrt{x} \rightarrow v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ lautet die erste Ableitung:

   $$f'(x) = 6x \cdot \sqrt{x} + (2x^3 - 5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

   Klammersetzung nicht vergessen bei $u(x)$!

3. zur Quotientenregel: $f(x) = \frac{x^3+2}{x^5}$

   mit $u(x) = x^3 + 2 \rightarrow u'(x) = 3x^2$ und $v(x) = x^5 \rightarrow v'(x) = 5x^4$ lautet die erste Ableitung:

   $$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^5 - (x^3 + 2) \cdot 5x^4}{(x^5)^2} = \frac{3x^7 - 5x^7 - 10x^4}{x^{10}} = \frac{-2x^7 - 10x^4}{x^{10}}$$

   Klammersetzung nicht vergessen bei $u(x)$!

Tipp: Manchmal kann man einen Bruch umformen und benötigt gar nicht die Quotientenregel! Schreibt den Bruch einfach als Produkt und wendet die Produktregel an.

4.4 e- und $\ln$-Funktion ableiten

Eine e-Funktion wird folgendermaßen abgeleitet: Ihr verwendet „offiziell“ die Kettenregel, aber es geht eigentlich um einiges einfacher. Wir betrachten dafür die Funktion

$$f(x) = e^{5x},$$

welche wir nach x ableiten wollen. Dafür schreiben wir einfach den Term mit der e-Funktion nochmal hin und multiplizieren das Ding mit dem abgeleiteten Exponenten. Der Exponent ist hier $5x$ und abgeleitet wäre das einfach 5. Dann folgt für die Ableitung

$$f'(x) = e^{5x} \cdot 5.$$

„Regel“ für die Ableitung von e-Funktionen:

$$\left(e^{etwas}\right)' = e^{etwas} \cdot (etwas)'$$

Weitere Beispiele stehen in der Tabelle.

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$2e^x$	$2e^x$
$3e^x$	$3e^x$
e^{2x}	$2e^{2x}$
e^{3x}	$3e^{3x}$
e^{x^2}	$2xe^{x^2}$
e^{2-4x}	$-4e^{2-4x}$
$20e^{3x}$	$3 \cdot 20e^{3x}$
$x \cdot e^{2x}$	Produktregel

Falls eine e-Funktion mit anderen Funktionen multipliziert wird, müssen wir die bereits bekannte Produktregel anwenden. Hier ein kleines **Beispiel**:

$$f(x) = \underbrace{(x^2-2)}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{v(x)}$$

$$\begin{array}{lll} \text{mit} & u(x) = x^2 - 2 & u'(x) = 2x \\ \text{und} & v(x) = e^{-2x} & v'(x) = -2e^{-2x} \end{array}$$

Somit ergibt sich für die erste Ableitung:

$$f'(x) = 2xe^{-2x} + (x^2-2) \cdot (-2e^{-2x})$$

Oft ist es hilfreich, die Anteile mit e auszuklammern. Gerade wenn dieser Ausdruck gleich 0 gesetzt wird, z.B. um die Extremstellen zu bestimmen. Vereinfacht folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-2x}(2x + (x^2-2)(-2)) \\ &= e^{-2x}(2x - 2x^2 + 4) \\ &= e^{-2x}(-2x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

Wird von uns die Ableitung der ln-Funktion verlangt, müssen wir zunächst wissen, dass die Ableitung von $f(x) = \ln(x) \to f'(x) = 1/x$ ist. Steht statt dem x etwas anderes da, muss die Kettenregel verwenden.

„Regel“ für die Ableitung von ln-Funktionen:

$$(\ln(etwas))' = \frac{1}{etwas} \cdot (etwas)'$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) = \ln(5x^2 - 3x) \to f'(x) &= \frac{1}{5x^2 - 3x} \cdot (5x^2 - 3x)' \\ &= \frac{1}{5x^2 - 3x} \cdot (10x - 3) \end{aligned}$$

Mit den eingeführten „Regeln“ können wir e- und ln-Funktionen leicht ableiten.

Übungsaufgaben:

1

20 Bestimmen Sie die Ableitungsfunktionen. In einigen Fällen müssen Sie den Funktionsterm vor dem Ableiten geeignet umformen.

a) $f(x) = \frac{1}{x} + 5x$
b) $g(x) = x \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)$
c) $f(x) = (2x - 3)(x + 4)$
d) $f(x) = \sin(x) + 2x$
e) $f(x) = 4x^{n+1} + n$
f) $f(x) = \frac{1-x}{x}$
g) $f(x) = 2\sin(x) - 5x^2 + \frac{1}{x}$
h) $f(x) = \frac{2}{x} - 3\sqrt{x}$
i) $f(x) = (3x - 1)^2$

2

23 *Wo ist der Fehler?*

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$
$f'(x) = 12x^3 - 4x + 5$

b) $f(x) = 5^x$
$f'(x) = x \cdot 5^{x-1}$

c) $f(t) = 5x^2 - 10t$
$f'(t) = 10x$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{4x}$
$f'(x) = \frac{2x}{4} = \frac{1}{2}x$

3

Wende die Produktregel an.

a) $f(x) = (3x + 4) \cdot (7x^2 + 5)$
b) $f(x) = (2x + 2) \cdot (4x^5 + 7x + 2)$
c) $f(x) = (2x^2 - 9) \cdot (3x^2 - 4x)$
d) $f(x) = (4x^3 - 1) \cdot \frac{1}{x}$
e) $f(x) = (7x^2 + 5x + 3) \cdot \sqrt{x}$
f) $f(x) = (6x^7 + 5) \cdot \frac{1}{x}$
g) $f(x) = 3x^4 \cdot \sqrt{x}$
h) $f(x) = x \cdot \sin x$
i) $f(x) = x^3 \cdot \sin x$
j) $f(x) = 4x \cdot \cos x$
k) $f(x) = \sin^2 x$
l) $f(x) = \cos^2 x$
m) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (\sin x - \cos x)$
n) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \sin x$
o) $f(x) = (2x^2 + x) \cdot \cos x$
p) $f(x) = \left(2 \cdot \sqrt{x} + 4\right) \cdot \cos x$
q) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(\sin x - \frac{1}{x}\right)$
r) $f(x) = \sin x \cdot \sin x + \cos^2 x$

4 Bestimme die Ableitung mithilfe der Kettenregel. In einigen Fällen gibt es auch andere Wege zur Bestimmung der Ableitung. Gib dann auch diese an.

a) $f(x)=(x-2)^2$
b) $f(x)=(3x-5)^2$
c) $f(x)=(2x^3+1)^2$
d) $f(x)=(\sqrt{x}+1)^2$
e) $f(x)=\left(2+\frac{1}{x}\right)^2$
f) $f(x)=(x-4)^5$
g) $f(x)=2\cdot(3x-2)^3$
h) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$
i) $f(x)=3\cdot\sqrt{4x+2}$
j) $f(x)=5\cdot\sqrt{x-4}$
k) $f(x)=(2x^2+x-1)^4$
l) $f(x)=\sqrt{x\cdot(x+1)}$
m) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2x+1}}$
n) $f(x)=\sqrt{2x}+\frac{1}{2x}$
o) $f(x)=\left(\frac{1}{2}x\right)^4+\sqrt{5x}$
p) $f(x)=(x+2)^5+(4-x)^9$
q) $f(x)=(2x^4-1)^2+\sqrt{x^3}$
r) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}+2\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)^2$

5 Bestimme die 1. und 2. Ableitung der Funktion f.

a) $f(x)=(2x-5)^3$
b) $f(x)=\left(\frac{1}{3}x^2-2\right)^4$
c) $f(x)=\sqrt{2x+5}$
d) $f(x)=\frac{1}{3x-5}$
e) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$
f) $f(x)=3\cdot(2x-4)^5$
g) $f(x)=\frac{1}{4x+2}$
h) $f(x)=(4x^2-2x)^3$
i) $f(x)=\cos(3x-2)$
j) $f(x)=7\cdot\sin(4x+1)$
k) $f(x)=2\cdot\sin x^2$
l) $f(x)=5\cdot\sin(3x^2-1)$

6

38 *Ableitungen*

a) Bilden Sie die Ableitungen.

(1) $f(x)=\ln(3x)$
(2) $f(x)=3\cdot\ln(x)$
(3) $f(x)=\ln(x+3)$
(4) $f(x)=2\cdot\ln(4x)$
(5) $f(x)=x\cdot\ln(x)-x$
(6) $f(x)=\frac{3x}{\ln(x)}$
(7) $f(x)=\frac{\ln(x)}{3x}$
(8) $f(x)=\ln(\sqrt{x})$

b) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen und der zugehörigen Ableitungen. Welche der Funktionen haben lokale Extrempunkte? Bestimmen Sie diese.

7

12 *Ableitungen von e-Funktionen*

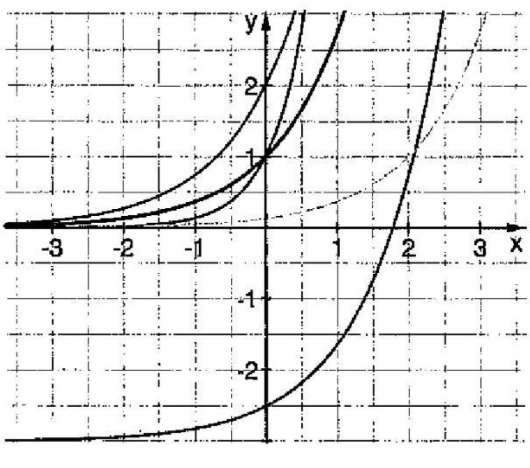
a) Ordnen Sie die Funktionsgraphen den Funktionsgleichungen zu.

$f_1(x)=2e^x$ $\quad$ $f_2(x)=e^{2x}$
$f_3(x)=e^{x-2}$ $\quad$ $f_4(x)=0{,}5e^x-3$

Durch welche geometrischen Abbildungen gehen diese jeweils aus dem Graphen von $f(x)=e^x$ hervor?

b) Bestimmen Sie die Ableitungen und zeichnen Sie deren Graphen.

c) Wie unterscheiden sich die Ableitungsgraphen von dem Graphen der Ableitung von $f(x)=e^x$?



8	**13** *Ableitungen* Erläutern Sie, wie man den Graphen von $f(x) = e^x$ „bewegen" muss, um die Graphen der angegebenen Funktionen zu erzeugen. Geben Sie zudem die zugehörige Ableitung an. a) $f(x) = -e^x + 5$ b) $f(x) = 0{,}1 \cdot e^{x+6}$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x - e$ d) $f(x) = -e^{-x}$
9	**14** *Zusammengesetzte e-Funktionen ableiten* Bestimmen Sie die Ableitung und geben Sie jeweils an, welche Ableitungsregeln Sie verwendet haben. a) $f(x) = 4 \cdot e^{3x}$ b) $f(x) = e^{-x^2} + e^2$ c) $f(x) = 4 \cdot e^{2x} + 1$ d) $f(x) = \frac{5}{1+e^x}$ e) $f(x) = 3e^{4x-x^2}$ f) $f(x) = \frac{1}{2}e^x + kx^2$, g) $f(x) = (k-1)e^{kx} - 2k$ h) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

Die Stammfunktion zu der Potenzfunktion

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

ermittelt sich allgemein über

$$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

Beim Aufleiten muss der Exponent um 1 erhöht und in den Nenner des Bruchs geschrieben werden! In nebenstehender Tabelle findet ihr weitere Beispiele.

$f(x)$	$F(x)$
1	x
10	$10x$
x	$\frac{1}{2}x^2$
$10x$	$5x^2$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$
$5x^7$	$\frac{5}{8}x^8$
$3x^4 - 2x^3 + 4$	$\frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + 4x$

Wie bereits erwähnt gibt es bei der Integralrechnung auch eine Summenregel, die besagt, dass jeder Summand einzeln integriert wird. Zum Beispiel ist $F(x) = x^2 + 3x$ eine Stammfunktion von $f(x) = 2x + 3$.

e-Funktion

In der nebenstehenden Tabelle finden wir viele Beispiele von aufgeleiteten e-Funktionen.

Merkt euch: Egal ob Nullstellen bestimmen, Ableitung oder Stammfunktion bilden. Achtet auf die Struktur der Funktion! Steht da nur eine Summe oder eine Differenz oder ist ein Produkt aus Term mit einer Variablen mal e hoch irgendwas zu erkennen?

$f(x)$	$F(x)$
e^x	e^x
e^{2x}	$\frac{1}{2}e^{2x}$
e^{3x}	$\frac{1}{3}e^{3x}$
e^{4-2x}	$\frac{-1}{2}e^{4-2x}$
$20e^{10x}$	$2e^{10x}$
$3e^{5-2x}$	$\frac{3}{-2}e^{5-2x}$
e^{x^2}, e^{x^3}	Geht nicht!
$2x \cdot e^{-2x}$	Partielle Integration
$2x \cdot e^{x^2}$	Substitution

12.2 Unbestimmtes Integral

Als unbestimmtes Integral bezeichnet man, wie oben bereits angedeutet, die Gesamtheit aller Stammfunktionen $F(x) + C$ einer Funktion $f(x)$. Die Schreibweise für unbestimmte Integrale lautet

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

12.5 Partielle Integration und Integration durch Substitution

Durch Umkehrung der Produkt- und Kettenregel lassen sich zwei Integrationsverfahren gewinnen, mit denen sich bisher nicht bestimmbare Stammfunktionen ermitteln lassen. Die **partielle Integration**, auch Produktintegration genannt, ist in der Integralrechnung eine Möglichkeit zur Berechnung bestimmter Integrale und zur Bestimmung von Stammfunktionen. Sie ist quasi das Gegenstück zur Produktregel beim Ableiten.

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\ \mathrm{d}x = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\ \mathrm{d}x$$

Die partielle Integration wird stets bei einem Produkt zweier Funktionen angewendet, wobei von einem Faktor die Stammfunktion bekannt ist ($v'(x)$) und man die Hoffnung hat, dass durch die Ableitung des anderen Faktors ($u(x)$) das Integral einfacher wird. Warum heißt es eigentlich *partielle* Integration? Weil ein Teil des Ingetrals $[u(x) \cdot v(x)]_a^b$ gelöst wird und der andere Teil noch ein Integral $\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\ \mathrm{d}x$ beinhaltet. Die Schwierigkeit ist es zu entscheiden, welcher Teil $u(x)$ ist und welcher $v'(x)$. Unter Umständen kann es nämlich sein, dass das Integral bei falscher Wahl nicht zu lösen ist. Die Frage die wir uns stellen müssen: Die Ableitung welches Faktors vereinfacht das Integral?

Allgemeines Vorgehen:

1. Überlegung: Die Ableitung welchen Faktors vereinfacht das Integral? Danach $u(x)$ und $v'(x)$ festlegen.
2. Ableitung $u'(x)$ bestimmen.
3. Stammfunktion $v(x)$ bestimmen.
4. Ergebnisse in Formel einsetzen.

Beispiel Bestimme das Integral der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ in den Grenzen $[0; 2]$.

Zunächst schreiben wir auf, was wir machen sollen. Das Integral soll schließlich gebildet werden.

$$\int_0^2 (x \cdot e^x)\ \mathrm{d}x = ?$$

Doch an dieser Stelle kommen wir mit unseren einfachen Methoden zur Bildung der Stammfunktion nicht weiter. Die Funktion $f(x)$ ist nämlich ein Produkt der beiden Funktionen x und e^x. Wir wenden also die partielle Integration an, um die Aufgabe zu lösen. Dafür gehen wir die obigen Schritte aus dem Vorgehen ab. 1. Wir überlegen:

Die Ableitung welchen Faktors vereinfacht das Integral? Die Ableitung von x ist 1. Die Ableitung von e^x ist e^x. Da e^x auch einfach integrierbar ist folgt:

$$u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1 \quad \text{und} \quad v'(x) = e^x \longrightarrow v(x) = e^x$$

$$\Rightarrow \int_0^2 (x \cdot e^x)\ \mathrm{d}x = [x \cdot e^x]_0^2 - \int_0^2 (1 \cdot e^x)\ \mathrm{d}x = [x \cdot e^x]_0^2 - [e^x]_0^2 = e^2 + 1$$

Tipp: Wenn die Aufgabe nicht lösbar ist mit der Wahl von u und v', sollte man diese gegeneinander austauschen und erneut probieren. Manchmal hilft zweimaliges partielles Integrieren und Umsortieren. Generell werden Potenzen x^n oder Umkehrfunktionen wie $\ln(x)$ oder $\arcsin(x)$ durch Ableiten einfacher und Funktionen wie e^x oder $\sin(x)$ durch Integrieren nicht komplizierter.

Kommen wir zur **Integration durch Substitution**. Unter Substitution versteht man allgemein das Ersetzen eines Terms durch einen anderen. Und genau das tun wir hier um eine Integration durchzuführen. Durch Einführung einer neuen Integrationsvariablen wird ein Teil des Integranden ersetzt, um das Integral zu vereinfachen und so letztlich auf ein bekanntes oder einfacheres Integral zurückzuführen. Die Kettenregel aus der Differentialrechnung ist die Grundlage der Substitutionsregel.

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\ \mathrm{d}u$$

In Anlehnung an die Kettenregel kann über Integration per Substitution gesagt werden, dass sie immer dort angewendet wird, wo ein Faktor im Integranden die Ableitung eines anderen Teils des Integranden ist; im Prinzip immer dort, wo man auch die Kettenregel anwenden würde. Ist die Ableitung ein konstanter Faktor, so kann dieser aus dem Integral faktorisiert werden.

Allgemeines Vorgehen:

1. Den zu substituierenden Term bestimmen, ableiten und nach $\mathrm{d}x$ umstellen.
2. Substitution durchführen.
3. Integral lösen.
4. Rücksubstitution durchführen.

Beispiel Bestimme das Integral der Funktion $f(x) = (x^2 - 4)^3 \cdot 2x$ im Intervall 4 und 5 und gebe die Menge aller Stammfunktionen an.

Wir schreiben zunächst das Integral auf, welches bestimmt werden soll:

$$\int_4^5 \underbrace{(x^2-4)^3}_{f(u(x))} \cdot \underbrace{2x}_{u'(x)}\ \mathrm{d}x$$

Wir erkennen eine Verkettung $(x^2-4)^3$ und stellen fest, dass wir diesen Teil nicht mit den bisher bekannten Methoden integrieren können. Zusätzlich erkennen wir, dass $2x$ die Ableitung der inneren Funktion $u(x)=x^2-4$ ist und das ist es, was wir wollen! Also ersetzen (substituieren) wir diesen Teil durch den Parameter u:

$$\text{mit } u=x^2-4 \text{ folgt}: \quad \int_4^5 u^3\cdot 2x\,\mathrm{d}x$$

Da nach u integriert werden soll, muss als nächstes $\mathrm{d}x$ ersetzt werden. Das schaffen wir, indem wir u nach x ableiten, nach $\mathrm{d}x$ umstellen und in das Integral einsetzen:

$$u'=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{2x} \;\Rightarrow\; \int_4^5 u^3\cdot 2x\,\frac{\mathrm{d}u}{2x}$$

Das $2x$ kürzt sich an dieser Stelle raus und der Integrand hängt nur noch von u ab. An dieser Stelle müssen wir noch die Integralgrenzen ersetzen mit $u(4)=12$ und $u(5)=21$ und können das Integral bestimmen:

$$\int_{12}^{21} u^3\,\mathrm{d}u=\left[\frac{1}{4}u^4\right]_{12}^{21}=43.436,25\ [\mathrm{FE}]$$

Für die Stammfunktion müssen wir u rücksubstituieren: $F(x)=\frac{1}{4}\underbrace{(x^2-4)}_{=u}{}^4+C$.

Weitere kurze Beispiele:

1)

innere Funktion

$$\int_0^{2\pi}\sin(2x)\,dx \qquad u=2x$$

äußere Funktion

$$=\int_0^{2\pi}\sin(u)\,dx \qquad u'=2=\frac{du}{dx}$$

$$=\int_{u(0)=0}^{u(2\pi)=4\pi}\sin(u)\,\frac{du}{2} \qquad \Leftrightarrow\; dx=\frac{du}{2}$$

Grenzen ersetzen!

$$=\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\sin(u)\,du$$

$$=\frac{1}{2}[-\cos(u)]_0^{4\pi}$$

2)

innere Funktion

$$\int_1^2 e^{3x}\,dx \qquad u=3x$$

äußere Funktion

$$=\int_1^2 e^u\,dx \qquad u'=3=\frac{du}{dx}$$

$$=\int_{u(1)=3}^{u(2)=6} e^u\,\frac{du}{3} \qquad \Leftrightarrow\; dx=\frac{du}{3}$$

Grenzen ersetzen!

$$=\frac{1}{3}\int_3^6 e^u\,du$$

$$=\frac{1}{3}[\,e^u\,]_3^6$$

Sonderfälle der Substitution:

- Lineare Substitution: $\int_a^b f(mx+n)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{m}\,[F(mx+n)]_a^b$
- Logarithmische Integration: $\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x=[ln|g(x)|]_a^b$

Übungsaufgaben

<table>
<tr><td>1</td><td>

7 *„Aufleiten" und Ableiten*

a) Finden Sie Stammfunktionen zu f(x).

$f_1(x) = 3$ $f_2(x) = 3x - 2$ $f_3(x) = x(x-1)^2$

$f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $f_5(x) = -\frac{4}{x^2}$ $f_6(x) = \cos(x)$

b) Geben Sie zu den folgenden Stammfunktionen F(x) jeweils die Ableitungsfunktion f(x) an.

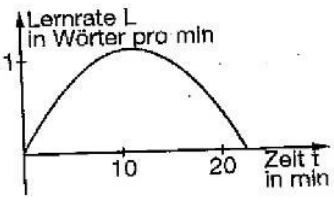
$F_1(x) = x^2$ $F_2(x) = 4x$

$F_3(x) = 2x^3 - \sin(x)$ $F_4(x) = -6x^3 + 0{,}5x^2 - 2x + 3$

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

15 *Vokabellernen*

Beim Auswendiglernen von Vokabeln wird die Lernrate (Anzahl der neu gelernten Wörter pro Minute) durch die Funktionsgleichung $L(t) = -0{,}009\,t^2 + 0{,}2\,t$ beschrieben.



a) Beschreiben Sie den Lernvorgang anhand des Graphen.

b) Wie viele Wörter wurden in den ersten 10 Minuten gelernt, wie viele Wörter bis zum Zeitpunkt, an dem die Lernrate auf null gesunken ist?

</td></tr>
<tr><td>3</td><td>

11 Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f(x) im Intervall [a ; b] mit der x-Achse einschließt.

a) $f(x) = x^3 - x$, [−1 ; 2] b) $f(x) = 0{,}5x^3 - x^2 - 4x$, [−2 ; 4]

</td></tr>
<tr><td>4</td><td>

12 Vergleichen Sie das Integral von f in den Grenzen zwischen a und b mit dem Flächeninhalt unter dem Graphen von f im Intervall [a ; b].

a) $f(x) = x^3$, [−2 ; 2] b) $f(x) = 0{,}25x^4 - x^2$, [−2 ; 0]

c) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, [0 ; 4]

</td></tr>
</table>

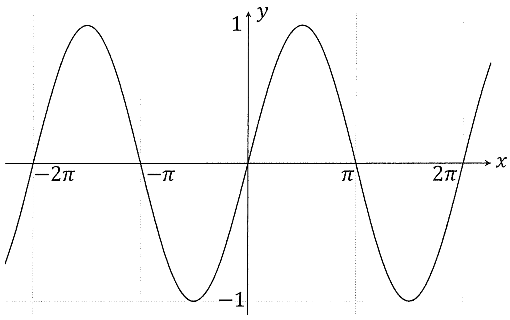
5	**13** Welchen Inhalt schließen die Graphen der Funktionen f und g zwischen ihren Schnittstellen ein? a) $f(x) = 6 - x$; $g(x) = x^2 - 6x + 10$ b) $f(x) = 5 - 0{,}5x^2$; $g(x) = x^2 + 3x + 0{,}5$
6	**14** Durch den Wendepunkt des Graphen von $f(x) = x^3 - 3x^2$ wird eine Parallele zur y-Achse gezogen. Diese Parallele zerlegt die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt, in zwei Teilflächen. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der beiden Teilflächen zueinander?
7	**3.** Berechne das Integral und gib jeweils eine Stammfunktion zum Integranden an. **a)** $\int_1^2 (x-2) \cdot e^x \, dx$ **c)** $\int_0^5 2x \cdot e^{-x} \, dx$ **e)** $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x \, dx$ **b)** $\int_{-1}^1 (x+1)\, e^x \, dx$ **d)** $\int_1^4 \ln x \cdot x \, dx$ **f)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx$
8	**4.** Berechne das Integral, indem du das Verfahren der partiellen Integration mehrfach anwendest. **a)** $\int_{-1}^2 (x^2+1)\, e^x \, dx$ **d)** $\int_{-2}^4 (x^2-x) \cdot e^{-x} \, dx$ **g)** $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ **b)** $\int_{-3}^0 (x^2+4x+3)\, e^x \, dx$ **e)** $\int_0^1 x^3 e^x \, dx$ **h)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos x \, d$ **c)** $\int_{-2}^1 (-6x^2+4)\, e^x \, dx$ **f)** $\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$ **i)** $\int_a^{\pi} \sin x \cdot e^x \, dx$
9	**5.** Ermittle eine Stammfunktion F zu f. **a)** $f(x) = x\,e^{2x}$ **d)** $f(x) = (2x+5) \cdot (x+2)^8$ **g)** $f(x) = (x^2 - 3x + 4)\, e$ **b)** $f(x) = (2x-1) \cdot e^x$ **e)** $f(x) = x \cdot \sin x$ **h)** $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$ **c)** $f(x) = x \cdot (x-1)^4$ **f)** $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ **i)** $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

15 Trigonometrische Funktionen

Sinusfunktion

Wichtige Eigenschaften der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$:

- periodische Funktion mit Periode 2π, d.h. dass der Graph der Sinusfunktion sich nach jeder Periode wiederholt.
- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$
- $W = [-1; 1]$
- schneidet die y-Achse bei $(0|0)$
- punktsymmetrisch zum Ursprung

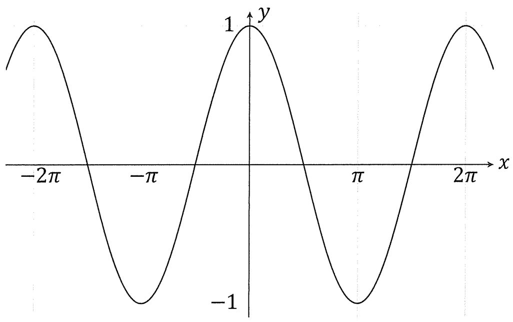


Die allgemeine Sinusfunktion lautet: $f(x) = a\sin(bx + c) + d$

Cosinusfunktion

Wichtige Eigenschaften der Cosinusfunktion $f(x) = \cos(x)$:

- periodische Funktion mit Periode 2π, d.h. dass der Graph der Cosinusfunktion sich nach jeder Periode wiederholt.
- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$
- $W = [-1; 1]$
- schneidet die y-Achse bei $(0|1)$
- achsensymmetrisch zur y-Achse

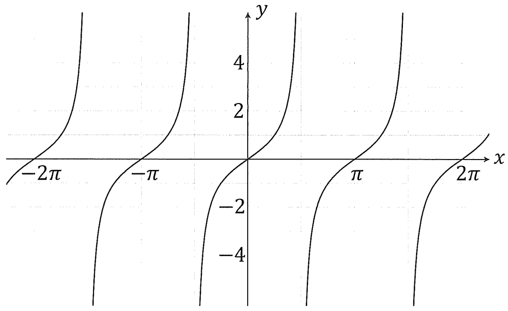


Die allgemeine Cosinusfunktion lautet: $f(x) = a\cos(bx + c) + d$

Tangensfunktion

Wichtige Eigenschaften der Tangensfunktion $f(x) = \tan(x)$:

- die Tangensfunktion wiederholt sich in regelmäßigen Abständen, deswegen nennt man die Tangensfunktion auch periodisch
- Der Abstand zwischen zwei Wiederholungen nennt man die kleinste Periode T.
- $W = \mathbb{R}$



- Eine weitere Eigenschaft der Tangensfunktion ist, dass ihr Graph punktsymmetrisch zum Ursprung (0|0) ist

Ableiten von sin, cos und tan

Hier eine Übersicht über die Ableitungen der Sinus- und Cosinusfunktion:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) &\Rightarrow\quad f'(x) &= \cos(x) \\ f(x) &= \cos(x) &\Rightarrow\quad f'(x) &= -\sin(x) \\ f(x) &= -\sin(x) &\Rightarrow\quad f'(x) &= -\cos(x) \\ f(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow\quad f'(x) &= \sin(x) \end{aligned}$$

Die Ableitung des Tangens ist ein wenig schwieriger:

$$f(x) = \tan(x) = \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Der Tangens kann auch mit der Quotientenregel abgeleitet werden, wenn man weiß, dass der Tangens mit Sinus und Cosinus zu

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

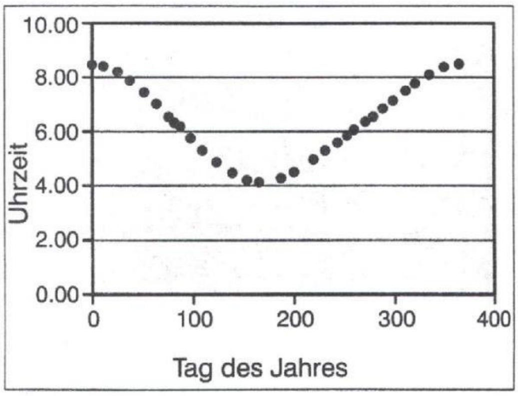
umgeschrieben werden kann. Dann folgt für die Ableitung

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

mit $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Übungsaufgaben

1	**17** *Tageslängen* Aus eigener Erfahrung wissen Sie, dass sich die Zeiten für den Sonnenaufgang im Laufe des Jahres verändern. In dem nebenstehenden Diagramm sind die Sonnenaufgangszeiten in Kassel für das Jahr 2003 aufgetragen. a) Zeigen Sie, dass die Punkte in dem Diagramm durch die Modellfunktion $a(t) = 2{,}2\cos\left(\frac{2\pi}{365}t\right) + 6{,}3$ in etwa erfasst werden. Interpretieren Sie die einzelnen Parameter im Funktionsterm. b) An welchem Tag ist der Sonnenaufgang am frühesten, wann am spätesten? Wann ist die Änderungsrate besonders groß? Geben Sie diese Größe in einer passenden Maßeinheit an.
2	**5.** *Kurvendiskussionen* Untersuche den Graphen der gegebenen Funktion f. **a)** $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ **b)** $f(x) = \sin x + \cos 2x$ **c)** $f(x) = \sin x \cdot \cos 2x$ **d)** $f(x) = \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x}$ **e)** $f(x) = x^2 \cos(x^2 - 1)$ **f)** $f(x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$



Aufgabe 1.2: Anhänger einer Halskette

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = (a - x) \cdot e^{\frac{x}{a}}$; $x \in IR$; $a \in IR$, $a \neq 0$.
Ihre Graphen heißen G_a.

a) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \pm\infty$ in Abhängigkeit von a. Berechnen Sie die Länge der Strecke in Abhängigkeit von a, die durch die jeweiligen beiden Achsenschnittpunkte von G_a festgelegt ist.

b) Zeigen Sie, dass für jeden Graphen G_a der lokale Extrempunkt auf der *y*-Achse liegt und bestimmen Sie in Abhängigkeit von a dessen Art.

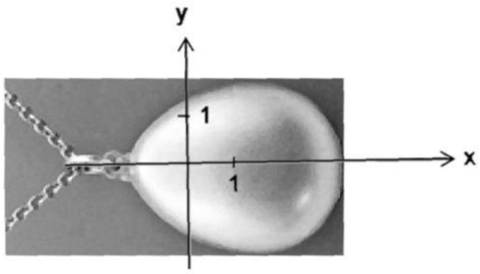
[Kontrollergebnis: $f_a''(x) = -e^{\frac{x}{a}} \cdot \left(\frac{a + x}{a^2}\right)$]

Stellen Sie G_2 mindestens im Intervall $[-7\,;3]$ in einem Koordinatensystem graphisch dar.

c) Ein Graph der Schar G_a hat an der Stelle $x = 1$ den Anstieg $m = -e$. Ermitteln Sie den zugehörigen Parameterwert a durch inhaltliche Überlegung.
Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Tangente an diesen Graphen an der Stelle $x = 1$ mit der positiven Richtung der *x*-Achse einschließt.

d) Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve, auf der alle Wendepunkte von G_a liegen.
Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente an den Graphen der Funktion f_2.
Hinweis: Auf den Nachweis der Existenz der Wendepunkte mithilfe einer hinreichenden Bedingung wird verzichtet.

e) Jeweils ein Graph G_a für $a > 0$ und der zugehörige an der *x*-Achse gespiegelte Graph sowie die Gerade $x = k$ sollen die Form eines Kettenanhängers begrenzen. Um den Materialbedarf zu ermitteln, wird der Inhalt der Querschnittsfläche benötigt. Bestimmen Sie für alle $k < 0$ den Inhalt der Querschnittsfläche des Kettenanhängers.



Hilfsmittelfreie Aufgaben

1. Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)$.

2. Leiten Sie einmal ab.

a) $f(x) = x^2\, e^{-2x}$ b) $g(x) = (k + e^{-x})^2$

c) $h(x) = \ln(1+3x^2)$ c) $k(x) = 3\sqrt{x}\,\ln(3x)$

3. Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = 8 - \frac{16}{x^2}$ b) $f(x) = 3(x^2 - 4e^{-2x})$ c) $f(x) = \frac{2}{(9+2x)^2}$.

4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen: a) $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 0$ b) $e^x + e^{\frac{1}{2}x} - 2 = 0$

5. Lösen Sie die Gleichungen

a) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ b) $\frac{2x}{x-4} + \frac{3x}{x+4} = \frac{4(x^2+2x-8)}{x^2-16}$

6. Eine Parabel 3.Ordnung berührt die x-Achse im Ursprung. Ihr Wendepunkt ist W(-1 / 2). Bestimmen Sie die Gleichung dieser Parabel !

7. Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \begin{cases} -x^2 + s \cdot x + t & \text{für } x \le 2 \\ x^2 + 2 & \text{sonst} \end{cases}$.

Bestimmen Sie s und t so, dass die Funktion an der Stelle x=2 differenzierbar ist.

Übungsaufgabe (Analysis)

1. Gegeben sei die Funktionenschar f und die Funktion g:

$f_a(x) = \cos(4x + a) + 2x \quad$ mit a $\in$ R
$g(x) = 2x + 1$

a) Begründe, dass die Funktionen der Funktionenschar h_a: $h_a(x) = f_a(x) - g(x)$ im Gegensatz zu denen von f_a periodische Funktionen sind und bestimme die Periodenlänge p.
b) *Beweisen Sie dass die Funktion $f_{\frac{1}{2}\pi}$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
Begründen Sie anschaulich, dass das Symmetrieverhalten von f_a im Allgemeinen von dem Parameter a abhängt.
c) Bestimmen Sie alle Extremstellen von f_0.
d) Bestimmen Sie a so, dass an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ ein Hochpunkt ist.
e) Berechnen Sie die Schnittpunkte von $f_{\frac{1}{2}\pi}$ und g im Intervall $[0,\pi]$.
f) Bestimmen Sie den Flächeninhalt den die Funktionen $f_{\frac{1}{2}\pi}$ und g im Intervall $\left[\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi\right]$ einschließen.
g) Zeigen Sie dass es kein a gibt, so dass $\int_0^{\pi} f_a(x)dx = 1$.
h) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 3ten Grades, die $f_{\frac{1}{2}\pi}$ in einer Umgebung von x = 0 möglichst gut annähert.
i) Skizzieren Sie den Graphen von $f_{\frac{1}{2}\pi}$.

*ziemlich anspruchsvolle Aufgabe