Aktuelle Lernförderung

Mathe 27

Matrizen und Vektoren als Datenspeicher

Liebe Förderlehrer,

bitte arbeitet mit euren Schülerinnen und Schülern hauptsächlich an deren Unterlagen zum aktuellen Schulstoff – also Hausaufgaben erklären, Tests und Klassenarbeiten vorbereiten, sowie das aktuelle Themengebiet erläutern.

Diese Arbeitsblätter sind ausschließlich zu eurer Unterstützung gedacht, falls die SuS einmal nichts dabei haben sollten, keinen Unterricht in Mathe hatten oder noch weitere Übung in einem Themengebiet benötigen.

Danke und viel Erfolg!

11 Wachstumsprozesse

Berechnungen zu Wachstum bzw. Wachstumsprozessen beschäftigen sich mit der Entwicklung von einem Bestand. Eine wichtige Idee dabei ist, dass die Änderung des Bestands (also Zunahme und Abnahme) die Ableitung des Bestands ist.

11.1 Lineares Wachstum

Das lineare Wachstum ist sehr, sehr einfach. Es handelt sich hierbei um einen Bestand mit einer gleichmäßigen Entwicklung! Es kommt also in jeder Zeitspanne immer die gleiche Menge dazu (oder geht weg). Das lineare Wachstum wird durch eine Gerade beschrieben, der Ansatz lautet also:

$$y = m \cdot x + b \quad \text{oder auch} \quad B(t) = m \cdot t + b$$

Beispiel In einen Tümpel, der anfangs 200 m^3 dreckiges, stinkendes Wasser enthält, fließen täglich 4 m^3 sauberes, kristallklares Wasser dazu.

1. Wieviel Wasser enthält der See nach 50 Tagen?

   Lineares Wachstum wird einfach durch unsere bekannte Geradengleichung beschrieben. Da Wachstumsprozesse meist von der Zeit t (Englisch für *time*) abhängen, seht ihr oft auch $B(t) = m \cdot t + b$. Hier hängt der Bestand B von der Zeit t ab. b bezeichnet hierbei den Bestand zum Zeitpunkt 0, m die Zunahme pro Zeiteinheit t [Tage]. Unser Beispiel können wir also wie folgt beschreiben:

   $$B(t) = 4 \cdot t + 200 \quad [\text{m}^3]$$

   Um herauszufinden, wieviel Wasser nach 50 Tagen enthalten ist, setzen wir $t = 50$ in die obige Gleichung ein und erhalten:

   $$B(50) = 4 \cdot 50 + 200 = 400 \quad [\text{m}^3]$$

   Antwort: Nach 50 Tagen sind 400 m^3 in dem Tümpel.

2. Wann enthält der See 1000 m^3 Wasser?

   Lösungsweg 1 - Überlegen: Zu Beginn waren schon 200 m^3 im Tümpel, also sind $1000 - 200 = 800$ m^3 hinzugekommen. Da 4 m^3 täglich hinzufließen, brauche ich 800/4=200 Tage, damit 1000 m^3 im Tümpel sind.

Lösungsweg 2 - Gleichung verwenden: Der Bestand B soll 1000 m^3 sein. Also setzen wir die 1000 in die Geradengleichung ein und stellen nach der Unbekannten t um. Es folgt:

$$1000 = 4 \cdot t + 200 \quad \Rightarrow \quad t = 200 \quad \text{[Tage]}$$

3. Wann ist nur noch 1% des Wassers dreckig?

   An dieser Stelle denken wir einmal nach und schauen uns den Aufgabentext an. Es fließt nur sauberes Wasser hinzu. Das einzig dreckige Wasser in dem Tümpel ist der Anfangsbestand. Demnach sind die gesuchten 1% die anfänglichen 200 m^3. Mit Hilfe des Dreisatz können wir herausfinden, dass 100% also 20000 m^3 sein müssen. Jetzt stellt sich die Frage, wann 20000 m^3 im Tümpel sind. Das können wir genau so wie Aufgabenteil 2. lösen. Wir verwenden hier den zweiten Lösungsweg und erhalten:

$$20000 = 4 \cdot t + 200 \quad \Rightarrow \quad t = 4950 \quad \text{[Tage]}$$

11.2 Exponentielles Wachstum

Im vorherigen Kapitel haben wir gelernt, was es mit dem linearen Wachstum auf sich hat. Wir haben bewusst auf die Darstellung des linearen Zerfalls verzichtet, weil die Abläufe identisch sind. Der einzige Unterschied ist, dass etwas immer gleich viel abnimmt anstatt zunimmt.

Exponentielles Wachstum ist ein Wachstum, in welchem die Zunahme (oder Abnahme) immer proportional zum Bestand ist, sprich: zum bereits vorhandenen Bestand kommt immer der gleiche prozentuale Anteil dazu (oder geht weg). Standardbeispiel: Zinsen bei der Bank (zu einem angelegten Kapital kommt immer der gleiche Zinssatz dazu).

Exponentielles Wachstum wird durch die Funktionsgleichung

$$\begin{aligned} \text{Endwert} &= \text{Startwert} \cdot \text{Basis}^x \\ f(x) &= s \cdot b^x \\ \text{oder} \quad f(t) &= a \cdot q^t \end{aligned}$$

mit $q > 1$ als Wachstumsfaktor und $q < 1$ als Zerfallsfaktor beschrieben.

Was bedeutet das jetzt? Hier ein paar Beispiele:

- 200 Fliegen verdoppeln täglich ihre Anzahl: $f(t) = 200 \cdot 2^t$
- 200 Fliegen halbieren tägliche ihre Anzahl: $f(t) = 200 \cdot 0,5^t$

- 200 Fliegen vermehren sich täglich um 7 %. Allgemein: $f(t) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$

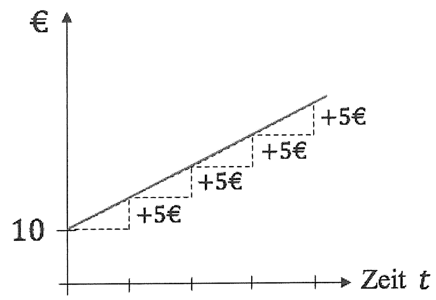
$$f(t) = 200 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^t = 200 \cdot 1,07^t$$

- 200 Fliegen werden täglich 5 % weniger. Allgemein: $f(t) = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^t$

$$f(t) = 200 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)^t = 200 \cdot 0,95^t$$

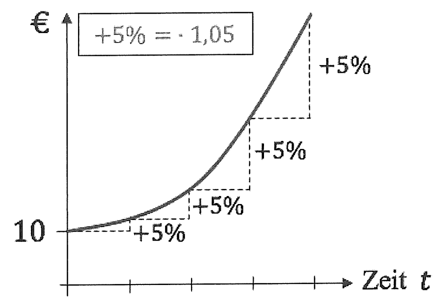
Die nachfolgende Abbildung soll euch als Übersicht zum Thema Wachstumsprozesse dienen. Hier sind lineare und exponentielle Prozesse gegenübergestellt, so dass die Unterschiede deutlich werden können.

Lineares Wachstum



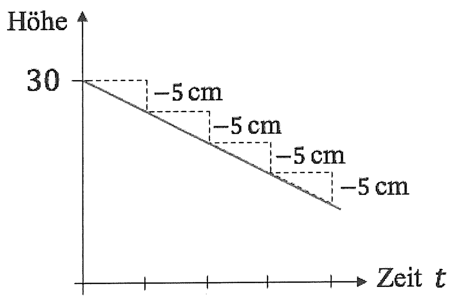
z.B. monatliches Taschengeld

Exponentielles Wachstum



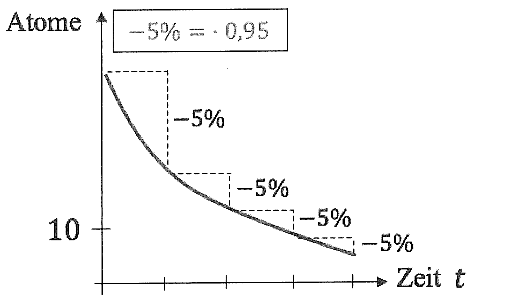
z.B. Geld auf Konto (Zinses-Zins)

Linearer Zerfall



z.B. abbrennende Kerze

Exponentieller Zerfall



z.B. radioaktiver Zerfall von Atomen

Typisch für exponentielles Wachstum ist die *Verdopplungszeit bzw. Generationszeit*, wo gefragt wird, wann der doppelte Startwert (oder Anfangsbestand) erreicht wird und die *Halbwertszeit* (bei exponentieller Abnahme), wo gefragt wird, wann der halbe Startwert (oder Anfangsbestand) erreicht wird. Da bei der Verdopplungszeit immer nach dem doppelten Startwert ($2 \cdot S$) mit S als Startwert gefragt wird, steht auf der linken Seite der Gleichung immer eine 2 bzw. eine 0,5 bei der Halbwertszeit.

Übungsaufgaben

1

26 *Wachstum und Zerfall*

a) Geben Sie die Exponentialfunktionen mit der Basis e an, die folgende Wachstums- und Zerfallsprozesse beschreiben.

(1) 4 % Zinsen/Jahr (mit Zinseszins)
(2) 12 % jährlicher Wertverlust
(3) Verdreifachung pro Jahr
(4) Halbierung pro Woche

b) Berechnen Sie, wann sich das Kapital in (1) gegenüber dem Anfangskapital verdoppelt hat bzw. der Wert in (2) nur noch halb so groß wie zu Beginn ist.

2

Nuklid	Halbwertszeit
^{235}U	704 Mio. Jahre
^{14}C	5730 Jahre
^{226}Ra	1602 Jahre
^{222}Rn	3,8 Tage
^{223}Th	0,6 Sekunden

28 *Plutonium*

Plutonium 239 ist ein verbreitetes Reaktorprodukt mit einer sehr kleinen Zerfallskonstante von $k = 285 \cdot 10^{-7}$/Jahr.

a) Geben Sie die Menge des noch vorhandenen Plutoniums als Funktion M(t) der Zeit t an, wenn die Ausgangsmenge A = M(0) = 20 g beträgt und zeichnen Sie den Graphen (t in Jahren).

b) Wie viel dieser Ausgangsmenge ist nach 1000 Jahren noch vorhanden? Wann ist die noch vorhandene Menge auf 1 Gramm geschrumpft?

c) Wie groß ist die Halbwertszeit von Plutonium?

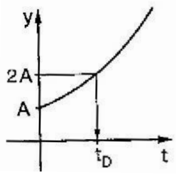
3

29 *Verdopplungszeit*

Bei einem exponentiellen Wachstumsprozess $f(t) = A \cdot e^{kt}$ $(k > 0)$ heißt der Faktor k Wachstumskonstante. Die Verdopplungszeit t_D gibt an, in welcher Zeit sich die Menge der vorhandenen Substanz gerade verdoppelt.

Leiten Sie eine Formel zur Bestimmung der Verdopplungszeit t_D mithilfe der Funktionsgleichung $f(t) = A \cdot e^{kt}$ her. Vergleichen Sie mit der Formel für die Halbwertszeit bei einem Zerfallsprozess.

4



30 *Bevölkerungswachstum*

a) Eine Bevölkerung wächst gegenwärtig mit 1,7 % pro Jahr. Wie groß ist die Verdopplungszeit bei gleichbleibendem Wachstum?

b) Vergleichen Sie jeweils mit der Verdopplungszeit bei 1 % Wachstum pro Jahr und bei 2 % Wachstum pro Jahr.

c) Verdoppelt sich auch die Wachstumsgeschwindigkeit jeweils in der Zeit t_D?

5

Übungen

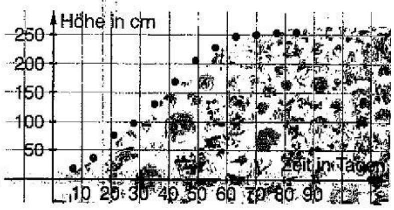
12 *Sonnenblumen*

1919 untersuchten H. S. REED und R. H. HOLLAND das Wachstum von Sonnenblumen. Die Tabelle gibt ihre Messdaten an.

Zeit (in Tagen)	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
Höhe (in cm)	8	17,9	36,4	67,8	98,1	131,0	169,5	205,5	228,3	247,1	250,5	253,8	254,5

Finden Sie geeignete Parameter G, b und k, so dass die Kurve f(x) zu den Daten passt.

$f(x) = \frac{G}{1 + b \cdot e^{-kx}}$



6

11 *Eine Tierpopulation*

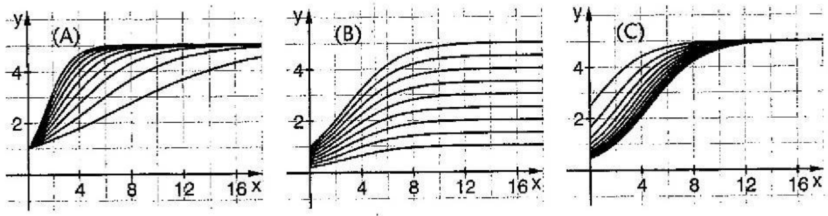
In einem Reservat soll eine neue Tierart angesiedelt werden. Die drei Funktionenscharen beschreiben mögliche Populationsentwicklungen dieser Tierart (x: Zeit in Jahren; y: Anzahl in 100 Tieren).

(1) $f_G(x) = \frac{G}{1 + 4e^{-0,5x}}$

(2) $f_b(x) = \frac{5}{1 + b \cdot e^{-0,5x}}$

(3) $f_k(x) = \frac{5}{1 + 4e^{-kx}}$

Prinzip: ein Parameter frei, die übrigen fest gewählt



17

a) Ordnen Sie den Funktionsgleichungen begründet die Bilder zu und erzeugen Sie diese auch mit dem GTR oder einem Funktionenplotter.

b) Beschreiben Sie die Entwicklung der Population in Abhängigkeit des jeweiligen Parameters. Welche Handlungsoptionen haben die Mitarbeiter des Reservats, um Einfluss auf die Bestandsentwicklung zu nehmen? Ordnen Sie diesen Möglichkeiten die einzelnen Parameter G, k und A zu und beschreiben Sie die Entwicklung der Population in Abhängigkeit des jeweiligen Parameters.

c) Geben Sie jeweils die Kapazitätsgrenze und den Anfangsbestand an. Berechnen Sie mithilfe der angegebenen zweiten Ableitungen jeweils den Punkt, in dem die Zunahme des Bestandes maximal ist. Was fällt auf?

Ein Parameter steuert den unterschiedlichen Anfangsbestand zum Zeitpunkt x = 0.

(1) $f_G''(x) = \frac{-G e^{0,5x}(e^{0,5x} - 4)}{(e^{0,5x} + 4)^3}$

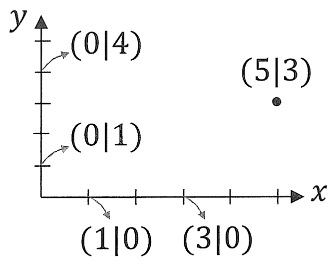
(2) $f_b''(x) = \frac{-5 b e^{0,5x}(e^{0,5x} - b)}{4(e^{0,5x} + b)^3}$

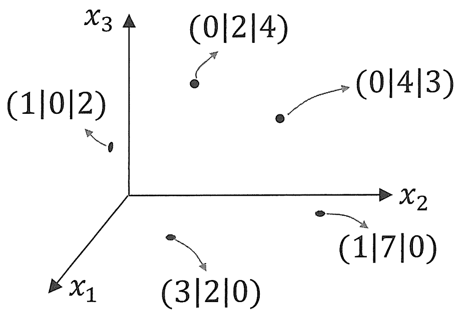
(3) $f_k''(x) = \frac{-20 k^2 e^{kx}(e^{kx} - 4)}{(e^{kx} + 4)^3}$

1 Analytische Geometrie: Grundlagen

1.1 Punkte im Koordinatensystem ablesen

Zu einem beliebigen Punkt im dreidimensionalen Raum $(x_1|x_2|x_3)$ bzw. $(x|y|z)$, z.B. $P(6|7|4)$, gelangt man, indem man vom Nullpunkt des Koordinatensystems 6 Einheiten in x-Richtung, 7 Einheiten in y-Richtung und dann 4 Einheiten in z-Richtung geht. Hier noch besondere Punkte:





2-Dimensional:

- Alle Punkte auf der y-Achse haben den x-Wert 0! $P(0|y)$
- Alle Punkte auf der x-Achse haben den y-Wert 0! $P(x|0)$

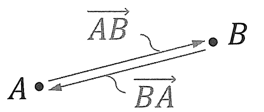
3-Dimensional:

- Alle Punkte in der x_1x_2-Ebene haben den x_3-Wert 0! $P(x_1|x_2|0)$
- Alle Punkte in der x_1x_3-Ebene haben den x_2-Wert 0! $P(x_1|0|x_3)$
- Alle Punkte in der x_2x_3-Ebene haben den x_1-Wert 0! $P(0|x_2|x_3)$

1.2 Vom Punkt zum Vektor

Ein Vektor $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet eine Verschiebung in der Ebene oder im Raum. Aus zwei Punkten im 3-dimensionalem Raum $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ erhält man den Vektor

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

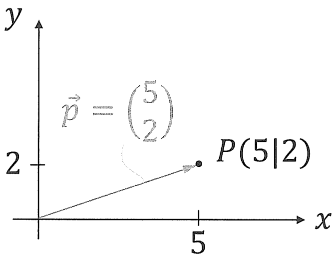


Grafisch wird der Vektor durch einen Pfeil dargestellt, der vom Punkt A zum Punkt B zeigt. Der Vektor $\overrightarrow{BA}$ zeigt in die entgegengesetzte Richtung und ist genauso lang wie $\overrightarrow{AB}$.

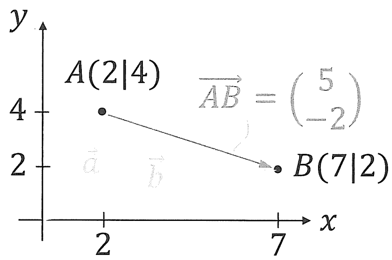
1.3 Unterschied Ortsvektor/Richtungsvektor

Ist $O(0|0)$ der Koordinatenursprung und $P(5|2)$ ein Punkt, so heißt der Vektor $\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 5-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ Ortsvektor zum Punkt P.

Ortsvektor zum Punkt *P*



Richtungsvektor von Punkt *A* zu *B*



Richtungsvektoren können jeden Punkt als Startpunkt haben, während Ortsvektoren immer vom Koordinatenursprung ausgehen. Zum Beispiel lautet der Richtungsvektor zwischen $A(2|4)$ und $B(7|2)$:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Zwei Richtungsvektoren sind identisch, wenn sie gleich lang sind und die gleiche Richtung haben. Im dreidimensionalem Raum werden Orts- und Richtungsvektoren genau wie im zwei-dimensionalen aufgestellt. Einziger Unterschied ist die zusätzliche Koordinate x_3 (oder z).

1.4 Länge eines Vektors

In kartesischen Koordinaten kann die Länge von Vektoren nach dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Gegeben sei Vektor $\vec{a} = (2\ 1\ 4)^T$ - Hinweis: Schreibweise mit „hoch T“ (Transponierte einer Matrix) ist oft platzsparender! Bitte nicht verzweifeln, es gilt:

$$\vec{a} = (2\ 1\ 4)^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

dann wird die Länge über $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}$ bestimmt. Oder allgemein mit

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}.$$

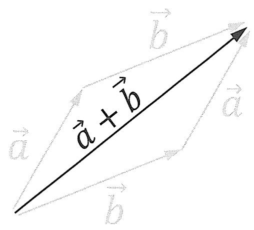
Alternativ kann die Länge auch als die Wurzel des Skalarprodukts angeben werden:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}.$$

Vektoren der Länge 1 heißen Einheitsvektoren oder normierte Vektoren.
Hat ein Vektor die Länge 0, so handelt es sich um den Nullvektor.

1.5 Rechnen mit Vektoren

Addieren/Subtrahieren: Rechenregel gilt für + und −, kurz: ±

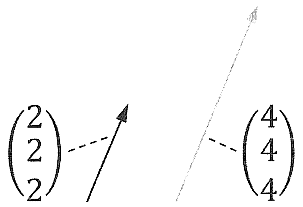


$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B.} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & + & 8 \\ -1 & + & 1 \\ 5 & + & (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation mit Zahl: Länge des Vektors ändert sich! Richtung bleibt gleich.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Skalarprodukt

Das *Skalarprodukt* (auch inneres Produkt, selten Punktprodukt genannt) ist eine mathematische Verknüpfung, die zwei Vektoren eine Zahl (Skalar) zuordnet. Um es nicht mit dem Malzeichen „·“ zu verwechseln, benutzen wir im Folgenden für das Skalarprodukt „•“. Es wird für die Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren benutzt. Als allgemeines Rechenbeispiel folgt für Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Jetzt mal als Zahlenbeispiel:

$$1) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 9$$

$$2) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 + 0 + 2 = 0$$

Achtung: Wenn die 0 raus kommt, dann sind die beiden Vektoren senkrecht (auch orthogonal genannt) zueinander!

Wofür wir das Skalarprodukt brauchen:

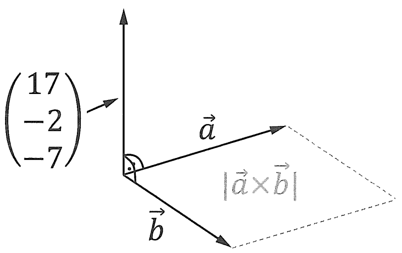
- Winkelberechnung zwischen Vektoren in der Ebene (2D):
  $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$
- Winkelberechnung zwischen Vektoren im Raum (3D):
  $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
- Prüfung, ob Orthogonalität vorliegt:
  Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind, dann gilt: $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$.
- Ermittlung eines Normalenvektors:
  Bedingungen für einen Normalenvektor $\vec{n}$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind:
  $\vec{n} \bullet \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \bullet \vec{b} = 0$

Kreuzprodukt/Vektorprodukt

Das *Kreuzprodukt* der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht und mit ihnen einen drei-dimensionalen Raum bildet. Allgemein gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Zahlenbeispiel:



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & - & 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 1 & - & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-2) & - & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Wichtig: Der Betrag des Kreuzprodukts entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Um zu überprüfen, ob wir richtig gerechnet haben, müsste das Skalarprodukt vom Vektor des Kreuzproduktes mit den zwei einzelnen Vektoren jeweils 0 ergeben:

$$\begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 34 - 6 - 28 = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 17 + 4 - 21 = 0 \quad \checkmark$$

Es besteht damit die Möglichkeit, das Kreuzprodukt als Berechnung des Normalenvektors $\vec{n}$ einer Ebene zu benutzen.

Die Kombination von Kreuz- und Skalarprodukt in der Form

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$$

wird als *Spatprodukt* bezeichnet. Das Ergebnis ist eine Zahl, die dem orientierten Volumen des durch die drei Vektoren aufgespannten Spats entspricht.

Anwendung

- Umwandlung von Ebenengleichungen von der Parameterform in die Koordinaten- oder Normalenform.
- Abstandsformel windschiefer Geraden.
- Berechnung des Flächeninhalts eines Parallelogramms, welches von zwei Vektoren aufgespannt wird.

1.6 Mittelpunkt einer Strecke

Gegeben sei die Strecke, die durch die Punkte A und B begrenzt wird. Gesucht sind die Koordinaten des Punktes M, der genau in der Mitte zwischen A und B liegt. Um diesen zu berechnen, benutzen wir diese einfache Formel:

$$\begin{aligned} \text{in 2D:} \quad & M\left(\frac{a_1+b_1}{2} \mid \frac{a_2+b_2}{2}\right) \\ \text{in 3D:} \quad & M\left(\frac{a_1+b_1}{2} \mid \frac{a_2+b_2}{2} \mid \frac{a_3+b_3}{2}\right) \end{aligned}$$

Beispiel: Berechne den Mittelpunkt der Punkte $A = (2|4|3)$ und $B = (10|16|5)$.

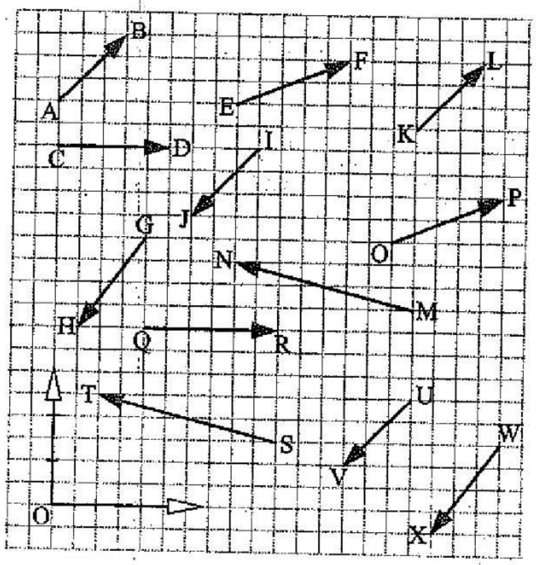
$$M_{AB} = \left(\frac{2+10}{2} \mid \frac{4+16}{2} \mid \frac{3+5}{2}\right) = (6|10|4)$$

Zusatz - Formel Schwerpunkt Dreieck: $\overrightarrow{0S} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C})$

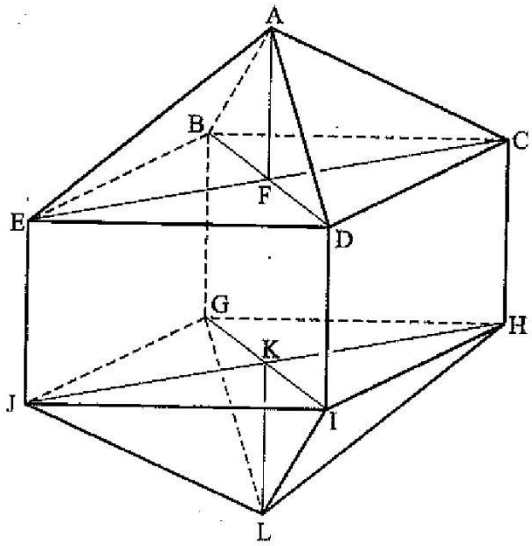
Übungsaufgaben

1

a) Welche Pfeile gehören zu demselben Vektor? Gib seine Koordinaten an.



b) Welche Pfeile in der Figur gehören zum Vektor $\overrightarrow{AC}$ $[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{IJ};\ \overrightarrow{CG}]$?



c) Gegeben sind die Punkte $A(5|1|4)$, $B(4|-2|1)$, $C(7|10|8)$, $D(5|7|5)$. Welche Paare dieser Punkte bestimmen denselben Vektor?

2

Betrachte die Punkte P und Q. Bestimme das Bild P′ von P bei einer Punktspiegelung von P an Q.

a) $P(7|-2|1)$, $Q(3|4|-2)$

b) $P(0|0|0)$, $Q(-3|5|2)$

c) $P(0|0|0)$, $Q(q_1|q_2|q_3)$

d) $P(p_1|p_2|p_3)$, $Q(q_1|q_2|q_3)$

3

Berechne den Betrag des gegebenen Vektors.

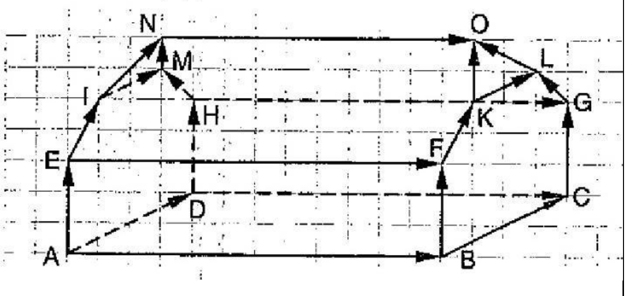
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ \sqrt{44} \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 13\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **e)** $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2{,}7 \\ -3{,}1 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$

4

Ermittle die Länge des Vektors $\vec{v}$.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **e)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ **g)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ **i)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}$

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 3{,}4 \\ 8{,}2 \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **h)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ **j)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

<table>
<tr><td>5</td><td>7. Gegenvektor
Gib den Gegenvektor zu $\vec{v}$ an.
(1) $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ (2) $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ (3) $\vec{v}=\begin{pmatrix}-0{,}3\\4\\2{,}6\end{pmatrix}$ (4) $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-t\\r\end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Berechne:
a) $\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}6\\1\\-8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-3\\6\end{pmatrix}\right)$ c) $\begin{pmatrix}2{,}5\\-3{,}6\\1{,}8\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}3{,}1\\4{,}2\\-5{,}3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1{,}6\\2{,}4\\6{,}2\end{pmatrix}\right)$
b) $\left(\begin{pmatrix}6\\-3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\-1\\-4\end{pmatrix}\right)-\begin{pmatrix}8\\7\\-5\end{pmatrix}$ d) $\left(\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}\right)-\left(\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}\right)$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>5. Vervielfachen von Vektoren
a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Schreibe den Vektor $\vec{v}$ als Vielfaches des Vektors $\vec{w}$, d. h. gib eine reelle Zahl k an, sodass gilt: $\vec{v}=k\cdot\vec{w}$.
(1) $\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}$ $\vec{w}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ (3) $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{w}=\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}$
(2) $\vec{v}=\begin{pmatrix}6\\-6\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{w}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ (4) $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{w}=\begin{pmatrix}6\\6\\-3\end{pmatrix}$
b) Begründe: $\vec{b}$ kann nicht das k-fache ($k\in\mathbb{R}$) des Vektors $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$ sein.
(1) $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}$ (2) $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$ (3) $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ (4) $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\-1\end{pmatrix}$
c) Gibt es zu zwei Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ stets eine reelle Zahl k, so dass $\vec{v}=k\cdot\vec{w}$ gilt? Begründe.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>36 Würfelecke
Die Punkte A = (2 | 3 | 0), B = (6 | 7 | 2), D = (4 | −1 | 4) und E = (−2 | 5 | 4) sind gegeben. Zeigen Sie, dass die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$ die Ecke eines Würfels bilden.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>20 Krüppelwalmdach
Wie viele verschiedene Vektoren bestimmen die Kanten im Krüppelwalmdach?
Welche Vektoren sind jeweils parallel?

</td></tr>
</table>

Bei dem Thema lineare Gleichungssysteme geht es hauptsächlich darum diese zu lösen. Dazu bedient man sich sog. Lösungsverfahren, die dir bei der Ermittlung der Lösung helfen sollen. In der Schule beschäftigt man sich in der Regel mit folgenden Verfahren

- Additionsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Gleichsetzungsverfahren

Jedes Verfahren kann man zum Lösen von Gleichungssystemen nutzen. Jedoch ist das Additionsverfahren das Wichtigste, da für lineare Gleichungssysteme mit drei oder mehr Variablen systematische Lösungsverfahren genutzt werden sollten. Hier ist insbesondere das Gauß-Verfahren zu nennen, das auf dem Additionsverfahren beruht.

Es werden 3 Fälle für die Lösungen von Gleichungssystemen unterschieden:

- eine eindeutige Lösung, wenn z.B. als Lösung $x_1 = 5, x_2 = 4$ herauskommt.
- keine Lösung, wenn z.B. als Lösung $3 = 4$ eine falsche Aussage herauskommt.
- unendlich viele Lösungen, wenn z.B. als Lösung $0 = 0$ eine allgemeingültige Aussage herauskommt.

2.1 Einsetzungsverfahren

Vorgehen:

1. Auflösen einer Gleichung nach einer Variablen.
2. Diesen Term in die andere Gleichung einsetzen.
3. Auflösen der so entstandenen Gleichung nach der enthaltenen Variablen.
4. Einsetzen der Lösung in die Gleichung, die im 1. Schritt berechnet wurde, mit anschließender Berechnung der Variablen.

Beispiel für ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten:

$$\begin{array}{rr} \mathrm{I} & 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ \mathrm{II} & x_1 - x_2 = 1 \end{array}$$

Gleichung II nach x_1 umformen:

$$x_1 = x_2 + 1$$

Nun x_1 in Gleichung I einsetzen und nach der enthaltenden Unbekannten auflösen

$$\begin{aligned} && 2(x_2+1)+3x_2 &= 12 && \mid \text{zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow && 5x_2+2 &= 12 && \mid -2 \\ \Leftrightarrow && 5x_2 &= 10 && \mid :5 \\ \Leftrightarrow && x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Die Lösung $x_2 = 2$ in die umgeformte Gleichung $x_1 = x_2 + 1$ aus dem ersten Schritt einsetzen und so die andere Variable berechnen. Es folgt $x_1 = x_2 + 1 = 2 + 1 = 3$.

2.2 Gleichsetzungsverfahren

Vorgehen:

1. Auflösen beider Gleichungen nach der gleichen Variablen.
2. Gleichsetzen der anderen Seiten der Gleichung.
3. Auflösen der so entstandenen Gleichung nach der enthaltenen Variablen.
4. Einsetzen der Lösung in eine der umgeformten Gleichung aus Schritt 1 mit anschließender Berechnung der Variablen.

Beispiel für ein quadratisches Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ \text{II} \quad x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Beide Gleichungen nach derselben Variable umformen, z.B. x_1.

$$\begin{aligned} \text{Ia} \quad x_1 &= 6 - 1,5x_2 \\ \text{IIa} \quad x_1 &= 1 + x_2 \end{aligned}$$

Nun Gleichung Ia und IIa gleichsetzen, denn es gilt $x_1 = x_1$. Es folgt

$$6 - 1,5x_2 = 1 + x_2$$

Die entstandene Gleichung enthält nur noch eine Unbekannte x_2. Durch Umformen erhalten wir die Lösung:

$$\begin{aligned} && 6 - 1,5x_2 &= 1 + x_2 && \mid +1,5x_2 \ -1 \\ \Leftrightarrow && 5 &= 2,5x_2 && \mid :2,5 \\ \Leftrightarrow && 2 &= x_2 \end{aligned}$$

Abschließend noch die Lösung in eine der umgeformten Gleichungen aus dem ersten Schritt (also in Ia oder IIa) einsetzen und die andere Variable berechnen. Wir setzen $x_2 = 2$ in IIa ein und erhalten: $x_1 = 6 - 1,5 \cdot 2 = 3$.

2.3 Additionsverfahren

Vorgehen:

1. Entscheide, welche Unbekannte du eliminieren willst.
2. Überlege, was du tun musst, damit die Unbekannte wegfällt.
3. Berechne die Unbekannten.

Beispiel für ein quadratisches Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ \mathrm{II} & \quad x_1 - x_2 = 1 \end{array}$$

Entscheide, welche Unbekannten eliminiert werden soll!

- Möglichkeit 1: x_1 eliminieren, dass schaffen wir indem wir I−2·II rechnen.
- Möglichkeit 2: x_2 eliminieren, dass schaffen wir indem wir I+3·II rechnen.

Hier zeigen wir euch Möglichkeit 1:

$$\begin{array}{lrll} \mathrm{I} & 2x_1 + 3x_2 & = 12 & \\ \mathrm{II} & x_1 - x_2 & = 1 & | \cdot (-2) \\ & & & \\ \mathrm{I} & 2x_1 + 3x_2 & = 12 & \\ \mathrm{IIa} & -2x_1 + 2x_2 & = -2 & |\mathrm{I} + \mathrm{IIa} \\ & & & \\ \mathrm{I} & 2x_1 + 3x_2 & = 12 & \\ \mathrm{IIb} & 5x_2 & = 10 & \Rightarrow x_2 = 2 \end{array}$$

Zuletzt setzen wir $x_2 = 2$ in eine der beiden ursprünglichen Zeilen (also I oder II) ein, um x_1 zu berechnen. Wir setzen in II ein und erhalten:

$$\begin{array}{lrll} & x_1 - x_2 & = 1 & \text{mit } x_1 = 3 \\ \Rightarrow & x_1 - 2 & = 1 & | + 2 \\ \Leftrightarrow & x_1 & = 3 & \end{array}$$

2.4 Gauß-Algorithmus

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0 \\ \text{II} & -2x_1 + x_2 - 6x_3 & = 0 \\ \text{III} & x_1 - 2x_3 & = 3 \end{array}$$

Unter dem „Lösen linearer Gleichungssysteme"versteht man die Berechnung von Unbekannten - in diesem Fall von x_1, x_2 und x_3. Da zum Lösen eines Gleichungssystems meist mehrere Schritte notwendig sind, wird es irgendwann lästig, bei jedem Schritt das ganze Gleichungssystem nochmal abzuschreiben. Aus diesem Grund lassen wir die Unbekannten (x_1,x_2,x_3) weg und schreiben nur die Koeffizienten auf.

Statt

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0 \\ \text{II} & -2x_1 + x_2 - 6x_3 & = 0 \\ \text{III} & x_1 - 2x_3 & = 3 \end{array}$$

schreiben wir

$$\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}$$

Dabei steht „$r.S.$" für die rechte Seite des Gleichungssystems, also der Teil rechts von dem Gleichheitszeichen. Wir erhalten die Koeffizientenschreibweise des LGS.

Ziel des Gauß-Algorithmus ist es, mit Hilfe von zeilenweisen Umformungen (dazu gleich mehr) unter der Hauptdiagonalen Nullen zu erzeugen. Was zunächst sehr abstrakt klingt, ist eigentlich gar nicht so schwierig. Nach einigen Umformungen sieht das Gleichungssystem so aus:

$$\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{array}$$

Doch was hat uns diese Umformung gebracht? Erst wenn wir wieder unsere Unbekannten einfügen, wird deutlich, was uns diese Nullen bringen.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Ist das Gleichungssystem so umgeformt, dass unter der Hauptdiagonalen nur noch Nullen sind, kann man die Unbekannten ganz leicht berechnen.

Wie komme ich aber auf die Nullen? Um die Nullen zu berechnen, darf man Zeilen

- vertauschen
- mit einer Zahl multiplizieren
- durch eine Zahl dividieren
- addieren
- subtrahieren

Hier die schrittweise Lösung unseres Beispiels: Um in der 3. Zeile und in der 1. Spalte die Null zu erhalten, betrachten wir zunächst unser Ausgangsgleichungssystem.

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}$$

Scharfes Hinsehen verrät, dass wir unsere dritte Zeile von der ersten Zeile abziehen müssen. Ausführlich:

$$\begin{array}{rrr|ll} 1 & 0 & -2 & 3 & \text{3. Zeile} \\ 1 & -1 & 2 & 0 & \text{1. Zeile} \\ \hline 0 & 1 & -4 & 3 & \text{3. Zeile - 1. Zeile = 3. Zeile*} \end{array}$$

Unser Gleichungssystem sieht nach dem ersten Schritt also wie folgt aus:

$$\begin{array}{rrr|ll} 1 & -1 & 2 & 0 & \text{1. Zeile} \\ -2 & 1 & -6 & 0 & \text{2. Zeile} \\ 0 & 1 & -4 & 3 & \text{3. Zeile*} \end{array}$$

Das $*$ zeigt uns, das es sich um eine neue Zeile handelt. Um die Null in der 2. Zeile und 1. Spalte zu erhalten, addieren wir zu der 2. Zeile zweimal die 1. Zeile:

$$\begin{array}{rrr|ll} -2 & 1 & -6 & 0 & \text{2. Zeile} \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 2\cdot \text{ 1. Zeile} \\ \hline 0 & -1 & -2 & 0 & \text{2. Zeile} + 2\cdot \text{ 1. Zeile} = \text{2. Zeile*} \end{array}$$

Unser Gleichungssystem sieht nach dem zweiten Schritt also wie folgt aus:

$$\begin{array}{rrr|ll} 1 & -1 & 2 & 0 & \text{1. Zeile} \\ 0 & -1 & -2 & 0 & \text{2. Zeile*} \\ 0 & 1 & -4 & 3 & \text{3. Zeile} \end{array}$$

Um die Null in der 3. Zeile und 2. Spalte zu erhalten, addieren wir zu der 3. Zeile die 2. Zeile und es folgt

$$\begin{array}{rrr|ll} 1 & -1 & 2 & 0 & \text{1. Zeile} \\ & -1 & -2 & 0 & \text{2. Zeile} \\ & & -6 & 3 & \text{3. Zeile*} \end{array}$$

Da die Nullen unter der Hauptdiagonalen berechnet sind, haben wir unser Ziel erreicht. Wie man jetzt die Unbekannten berechnet, wurde bereits oben erklärt.

Merke:

- Reihenfolge bei der Berechnung der Nullen spielt eine wichtige Rolle.
- Zuerst muss man die beiden Nullen in der ersten Spalte berechnen - welche der beiden Nullen man zuerst berechnet, ist jedoch egal. Anschließend berechnet man die verbleibende Null in der zweiten Spalte.
- Falls in der ersten Zeile (der ersten Spalte!) bereits eine Null vorliegt, lohnt es sich die Zeilen entsprechend zu vertauschen, um sich die Berechnung einer Null zu sparen.

Übungsaufgaben

1

Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems (1).
Zeige, dass die zusätzliche Gleichung in (2) keine Einschränkung der Lösung darstellt.
Mache die Probe.

a) (1) $\left|\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=1\\ 2x_1+x_2-x_3&=-1\\ -x_1+2x_2+2x_3&=1\end{aligned}\right|$

c) (1) $\left|\begin{aligned} 4x_1+3x_2+x_3&=5\\ 2x_1-5x_2+3x_3&=1\\ 7x_1-x_2-2x_3&=-5\end{aligned}\right|$

b) (1) $\left|\begin{aligned} x_1+4x_2+2x_3&=2\\ x_1+x_2-x_3&=-1\\ -x_1+4x_2+4x_3&=2\end{aligned}\right|$

d) (1) $\left|\begin{aligned} 4x_1-x_2-2x_3&=2\\ 3x_1+2x_2+4x_3&=7\\ 5x_1+3x_2+2x_3&=1\end{aligned}\right|$

2

Löse das Gleichungssystem.

a) $\left|\begin{aligned} 2x_1-3x_2-4x_3&=8\\ 3x_1+5x_2+x_3&=10\\ -4x_1+x_2-3x_3&=7\end{aligned}\right|$

b) $\left|\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=2\\ x_1+x_3+x_4&=0\\ x_1+x_2+x_4&=-5\\ x_2+x_3+x_4&=-3\end{aligned}\right|$

3

Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungsverfahrens.

a) $\left|\begin{aligned} 5x_1+6x_2-2x_3&=-9\\ x_1-4x_2+3x_3&=7\\ 4x_1+x_2-7x_3&=10\\ 2x_1-5x_2+4x_3&=9\end{aligned}\right|$

c) $\left|\begin{aligned} x_1+3x_2-2x_3&=1\\ 2x_1-x_2+5x_3&=15\\ 4x_1+5x_2+x_3&=10\end{aligned}\right|$

e) $\left|\begin{aligned} x_1-x_2&=5\\ 2x_1+2x_2&=0\\ 3x_1+x_2&=2\end{aligned}\right|$

b) $\left|\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3&=6\\ x_1-x_2+3x_3&=2\\ 7x_1+3x_2+7x_3&=18\end{aligned}\right|$

d) $\left|\begin{aligned} 2x_1+x_2+3x_3&=1\\ 4x_1+2x_2+x_3&=9\\ 3x_1-x_2-2x_3&=4\end{aligned}\right|$

f) $\left|\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3&=0\\ 2x_1+x_2-x_3&=2\end{aligned}\right|$

4

8.

a) $\left|\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=5\\ 2x_1+x_2+x_3&=10\\ x_1+x_2+2x_3&=9\end{aligned}\right|$

b) $\left|\begin{aligned} 3x_1+x_2&=4\\ -x_2+5x_3&=2\end{aligned}\right|$

c) $\left|\begin{aligned} 6x_1+2x_2-5x_3&=13\\ 4x_1+x_2+4x_3&=15\\ 7x_1-x_2+x_3&=12\\ 3x_1-4x_2-x_3&=-7\end{aligned}\right|$

d) $\left|\begin{aligned} 4x_1-3x_2-x_3&=3\\ 5x_1+x_2+x_3&=1\end{aligned}\right|$