Aktuelle Lernförderung

Mathe 25

Von der Änderungsrate zum Bestand

Liebe Förderlehrer,

bitte arbeitet mit euren Schülerinnen und Schülern hauptsächlich an deren Unterlagen zum aktuellen Schulstoff – also Hausaufgaben erklären, Tests und Klassenarbeiten vorbereiten, sowie das aktuelle Themengebiet erläutern.

Diese Arbeitsblätter sind ausschließlich zu eurer Unterstützung gedacht, falls die SuS einmal nichts dabei haben sollten, keinen Unterricht in Mathe hatten oder noch weitere Übung in einem Themengebiet benötigen.

Danke und viel Erfolg!

12 Integralrechnung

Die Integralrechnung ist neben der Differentialrechnung der wichtigste Zweig der mathematischen Disziplin der Analysis. Sie ist aus dem Problem der Flächen- und Volumenberechnung entstanden. Das Integral ist ein Oberbegriff für das unbestimmte und das bestimmte Integral. Die Berechnung von Integralen heißt *Integration*. Zunächst gehen wir nochmal die Grundlagen der Integralrechnung durch. Im Anschluss werden Flächeninhalte bestimmt und schwierigere Integrationsregeln wie z.B. die partielle Integration vorgestellt.

Grundlagen

Die Umkehrung des Ableitens ist das Bilden von Stammfunktionen und wird deshalb auch *Aufleiten* genannt. Wie schon beim Ableiten gibt es auch hier eine *Summenregel* (= Eine Summe wird „summandenweise“ aufgeleitet) und eine *Faktorregel* (= Ein konstanter Faktor bleibt beim Aufleiten erhalten).

$$\begin{array}{lcr} & F(x) & \text{Stammfunktion} \\ \text{integrieren} & \uparrow & \\ & f(x) & \text{Ausgangsfunktion} \\ \text{differenzieren} & \downarrow & \\ & f'(x) & \text{1. Ableitungsfunktion} \\ \text{differenzieren} & \downarrow & \\ & f''(x) & \text{2. Ableitungsfunktion} \end{array}$$

12.1 Übersicht typischer Stammfunktionen

Wenn F eine Stammfunktion von f ist und C eine beliebige reelle Zahl (Konstante), dann ist auch $F(x) + C$ eine Stammfunktion von f. Zum Beispiel sind

$$F(x) = (x^2/2) + 5$$
$$F(x) = (x^2/2) + 10$$
$$F(x) = (x^2/2) - 200$$

alles Stammfunktionen von $f(x) = x$. Grundsätzlich lautet die Stammfunktion für $f(x) = x$ also $F(x) = x^2/2 + C$. Wenn nur eine Stammfunktion gesucht wird, können wir zur Einfachheit $C = 0$ wählen.

Die Stammfunktion zu der Potenzfunktion

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

ermittelt sich allgemein über

$$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

Beim Aufleiten muss der Exponent um 1 erhöht und in den Nenner des Bruchs geschrieben werden! In nebenstehender Tabelle findet ihr weitere Beispiele.

$f(x)$	$F(x)$
1	x
10	$10x$
x	$\frac{1}{2}x^2$
$10x$	$5x^2$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$
$5x^7$	$\frac{5}{8}x^8$
$3x^4 - 2x^3 + 4$	$\frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + 4x$

Wie bereits erwähnt gibt es bei der Integralrechnung auch eine Summenregel, die besagt, dass jeder Summand einzeln integriert wird. Zum Beispiel ist $F(x) = x^2 + 3x$ eine Stammfunktion von $f(x) = 2x + 3$.

e-Funktion

In der nebenstehenden Tabelle finden wir viele Beispiele von aufgeleiteten e-Funktionen.

Merkt euch: Egal ob Nullstellen bestimmen, Ableitung oder Stammfunktion bilden. Achtet auf die Struktur der Funktion! Steht da nur eine Summe oder eine Differenz oder ist ein Produkt aus Term mit einer Variablen mal e hoch irgendwas zu erkennen?

$f(x)$	$F(x)$
e^x	e^x
e^{2x}	$\frac{1}{2}e^{2x}$
e^{3x}	$\frac{1}{3}e^{3x}$
e^{4-2x}	$\frac{-1}{2}e^{4-2x}$
$20e^{10x}$	$2e^{10x}$
$3e^{5-2x}$	$\frac{3}{-2}e^{5-2x}$
e^{x^2}, e^{x^3}	Geht nicht!
$2x \cdot e^{-2x}$	Partielle Integration
$2x \cdot e^{x^2}$	Substitution

12.2 Unbestimmtes Integral

Als unbestimmtes Integral bezeichnet man, wie oben bereits angedeutet, die Gesamtheit aller Stammfunktionen $F(x) + C$ einer Funktion $f(x)$. Die Schreibweise für unbestimmte Integrale lautet

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = F(x) + C$$

Dabei ist $\int$ das Integrationszeichen und $f(x)$ der Integrand. Die Variable x heißt Integrationsvariable und C ist die Integrationskonstante. Hier zwei Beispiele für unbestimmte Integrale:

$$\int 2x \, \mathrm{d}x = x^2 + C$$
$$\int x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C$$

12.3 Bestimmtes Integral

Wenn Integrationsgrenzen angegeben sind, handelt es sich nicht mehr um ein unbestimmtes Integral. Man spricht dann von einem bestimmten Integral, da die Integrationsgrenzen angegeben (folglich bestimmt) sind.

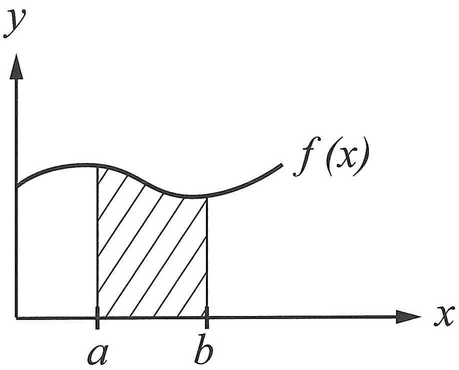
Im Gegensatz zum unbestimmten Integral lässt sich ein bestimmtes Integral mit dem *Hauptsatz der Integralrechnung* lösen!

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = (F(b) - F(a))$$

Als Ergebnis erhält man einen konkreten Zahlenwert.

Beispiel

$$\int_1^3 2x \, \mathrm{d}x = \left[x^2\right]_1^3 = (3^2 - 1^2) = 8$$



12.4 Bestimmung von Flächeninhalten

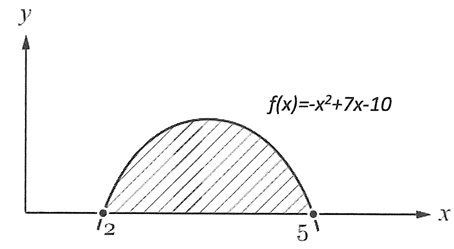
Die Integralrechnung kann zur Berechnung von Flächeninhalten verwendet werden. Wenn Grenzwerte gegeben sind, liegt ein bestimmtes Integral vor. Im Folgenden werden wir euch Beispiele zu verschiedenen Problemstellungen zeigen. Berechnung der Fläche

- <u>zwischen Graph und x-Achse</u>

  Vorgehen:

  - Bestimme die Nullstellen um die Grenzen zu erhalten.
  - Ist die Fläche stets oberhalb der x-Achse, die bestimmt wird, kannst du ganz normal das Integral berechnen.

– Merke: Wenn die Funktion im zu berechnendem Intervall einen Vorzeichenwechsel hat, ist ein Teil der Fläche unterhalb der x-Achse und eine Fläche oberhalb. Die Fläche unterhalb der x-Achse muss dann im Betrag genommen werden.



Beispiel Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 7x - 10$, siehe Abbildung, und es soll die Fläche berechnet werden, die von dem Graph und der x-Achse eingeschlossen wird. Zunächst werden die Nullstellen berechnet: $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$. Das sind gleichzeitig unsere Integrationsgrenzen. Es folgt für die Fläche

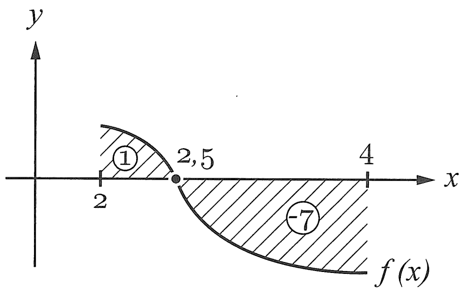
$$\begin{aligned}\int_2^5 -x^2 + 7x - 10 \, dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 10x\right]_2^5 \\ &= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{7 \cdot 5^2}{2} - 10 \cdot 5\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{7 \cdot 2^2}{2} - 10 \cdot 2\right) \\ &= 4,5 \text{ [FE]}\end{aligned}$$

- <u>zwischen Graph und x-Achse im Intervall von $[2, 4]$</u>

Beispiel In der nebenstehenden Abbildung soll die Fläche einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[2, 4]$ bestimmt werden.

$$\int_2^4 f(x) \, dx = -6$$

gibt hierbei nicht den gesuchten Flächeninhalt an, sondern den Integralwert!



Aus diesem Grund ist die Berechnung der Nullstellen wichtig. Da eine Nullstelle bei $x = 2,5$ vorliegt, also innerhalb der angegebenen Integrationsgrenzen, gibt es einen Vorzeichenwechsel und ein Teil des Graphen muss unterhalb der x-Achse liegen. Tipp: Teilfläche A_1 von unterer Grenze zur Nullstelle und Teilfäche A_2 von Nullstelle zu oberer Grenze berechnen. Es folgt mit

$$A_1 = \int_2^{2,5} f(x) \, dx = 1 \text{ [FE]} \quad \text{und} \quad A_2 = \int_{2,5}^4 f(x) \, dx = |-7| = 7 \text{ [FE]}$$

der gesuchte Flächeninhalt $A_{ges} = A_1 + A_2 = 8$ [FE].

- zwischen zwei Graphen

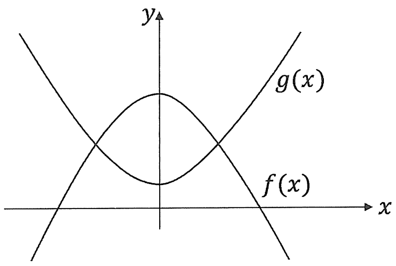
Wenn f und g zwei Funktionen sind, die auf dem Intervall $[a; b]$ stetig sind und $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a; b]$ gilt, dann ist die Fläche, die von beiden Funktionen eingeschlossen wird

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x = [F(x) - G(x)]|_a^b = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)).$$

Beispiel Bestimme den Flächeninhalt, der von den Funktionen

$$f(x) = -\frac{x^2}{12} + 5 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^2}{6} + 1$$

eingeschlossen wird. Hierfür benötigen wir zunächst die Schnittpunkte der beiden Funktionen.



Dazu setzen wir beide Funktionen gleich und erhalten

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -\frac{x^2}{12} + 5 &= \frac{x^2}{6} + 1 \\ x_1 = -4 &\wedge x_2 = 4 \end{aligned}$$

Nun haben wir alle Informationen um die Fläche zwischen den beiden Graphen durch folgendes Integral zu berechnen:

$$\int_{-4}^{4} (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x = \int_{-4}^{4} -\frac{x^2}{12} + 5 - (\frac{x^2}{6} + 1)\ \mathrm{d}x = \int_{-4}^{4} \frac{x^2}{12} + 4\ \mathrm{d}x$$

Zu beachten: Wenn sich zwei Graphen schneiden, wird ab dem Schnittpunkt aus der oberen Funktion die untere. Man würde nun einen negativen Flächeninhalt herausbekommen, also müssen Betragsstriche gesetzt werden.

Vorgehen:

1. Schnittstellen finden
2. Teilintegrale aufstellen und Betragsstriche setzen.

Dann weiter vorgehen wie in dem Beispiel zuvor.

12.5 Partielle Integration und Integration durch Substitution

Durch Umkehrung der Produkt- und Kettenregel lassen sich zwei Integrationsverfahren gewinnen, mit denen sich bisher nicht bestimmbare Stammfunktionen ermitteln lassen. Die **partielle Integration**, auch Produktintegration genannt, ist in der Integralrechnung eine Möglichkeit zur Berechnung bestimmter Integrale und zur Bestimmung von Stammfunktionen. Sie ist quasi das Gegenstück zur Produktregel beim Ableiten.

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\ \mathrm{d}x = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\ \mathrm{d}x$$

Die partielle Integration wird stets bei einem Produkt zweier Funktionen angewendet, wobei von einem Faktor die Stammfunktion bekannt ist ($v'(x)$) und man die Hoffnung hat, dass durch die Ableitung des anderen Faktors ($u(x)$) das Integral einfacher wird. Warum heißt es eigentlich *partielle* Integration? Weil ein Teil des Ingetrals $[u(x) \cdot v(x)]_a^b$ gelöst wird und der andere Teil noch ein Integral $\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\ \mathrm{d}x$ beinhaltet. Die Schwierigkeit ist es zu entscheiden, welcher Teil $u(x)$ ist und welcher $v'(x)$. Unter Umständen kann es nämlich sein, dass das Integral bei falscher Wahl nicht zu lösen ist. Die Frage die wir uns stellen müssen: Die Ableitung welches Faktors vereinfacht das Integral?

Allgemeines Vorgehen:

1. Überlegung: Die Ableitung welchen Faktors vereinfacht das Integral? Danach $u(x)$ und $v'(x)$ festlegen.
2. Ableitung $u'(x)$ bestimmen.
3. Stammfunktion $v(x)$ bestimmen.
4. Ergebnisse in Formel einsetzen.

Beispiel Bestimme das Integral der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ in den Grenzen $[0; 2]$.

Zunächst schreiben wir auf, was wir machen sollen. Das Integral soll schließlich gebildet werden.

$$\int_0^2 (x \cdot e^x)\ \mathrm{d}x = ?$$

Doch an dieser Stelle kommen wir mit unseren einfachen Methoden zur Bildung der Stammfunktion nicht weiter. Die Funktion $f(x)$ ist nämlich ein Produkt der beiden Funktionen x und e^x. Wir wenden also die partielle Integration an, um die Aufgabe zu lösen. Dafür gehen wir die obigen Schritte aus dem Vorgehen ab. 1. Wir überlegen:

Die Ableitung welchen Faktors vereinfacht das Integral? Die Ableitung von x ist 1. Die Ableitung von e^x ist e^x. Da e^x auch einfach integrierbar ist folgt:

$$u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1 \quad \text{und} \quad v'(x) = e^x \longrightarrow v(x) = e^x$$

$$\Rightarrow \int_0^2 (x \cdot e^x)\ \mathrm{d}x = [x \cdot e^x]_0^2 - \int_0^2 (1 \cdot e^x)\ \mathrm{d}x = [x \cdot e^x]_0^2 - [e^x]_0^2 = e^2 + 1$$

Tipp: Wenn die Aufgabe nicht lösbar ist mit der Wahl von u und v', sollte man diese gegeneinander austauschen und erneut probieren. Manchmal hilft zweimaliges partielles Integrieren und Umsortieren. Generell werden Potenzen x^n oder Umkehrfunktionen wie $\ln(x)$ oder $\arcsin(x)$ durch Ableiten einfacher und Funktionen wie e^x oder $\sin(x)$ durch Integrieren nicht komplizierter.

Kommen wir zur **Integration durch Substitution**. Unter Substitution versteht man allgemein das Ersetzen eines Terms durch einen anderen. Und genau das tun wir hier um eine Integration durchzuführen. Durch Einführung einer neuen Integrationsvariablen wird ein Teil des Integranden ersetzt, um das Integral zu vereinfachen und so letztlich auf ein bekanntes oder einfacheres Integral zurückzuführen. Die Kettenregel aus der Differentialrechnung ist die Grundlage der Substitutionsregel.

$$\boxed{\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\ \mathrm{d}u}$$

In Anlehnung an die Kettenregel kann über Integration per Substitution gesagt werden, dass sie immer dort angewendet wird, wo ein Faktor im Integranden die Ableitung eines anderen Teils des Integranden ist; im Prinzip immer dort, wo man auch die Kettenregel anwenden würde. Ist die Ableitung ein konstanter Faktor, so kann dieser aus dem Integral faktorisiert werden.

Allgemeines Vorgehen:

1. Den zu substituierenden Term bestimmen, ableiten und nach $\mathrm{d}x$ umstellen.
2. Substitution durchführen.
3. Integral lösen.
4. Rücksubstitution durchführen.

Beispiel Bestimme das Integral der Funktion $f(x) = (x^2 - 4)^3 \cdot 2x$ im Intervall 4 und 5 und gebe die Menge aller Stammfunktionen an.

Wir schreiben zunächst das Integral auf, welches bestimmt werden soll:

$$\int_4^5 \underbrace{(x^2 - 4)^3}_{f(u(x))} \cdot \underbrace{2x}_{u'(x)}\ \mathrm{d}x$$

Wir erkennen eine Verkettung $(x^2-4)^3$ und stellen fest, dass wir diesen Teil nicht mit den bisher bekannten Methoden integrieren können. Zusätzlich erkennen wir, dass $2x$ die Ableitung der inneren Funktion $u(x) = x^2 - 4$ ist und das ist es, was wir wollen! Also ersetzen (substituieren) wir diesen Teil durch den Parameter u:

$$\text{mit } u = x^2 - 4 \text{ folgt : } \quad \int_4^5 u^3 \cdot 2x \, \mathrm{d}x$$

Da nach u integriert werden soll, muss als nächstes $\mathrm{d}x$ ersetzt werden. Das schaffen wir, indem wir u nach x ableiten, nach $\mathrm{d}x$ umstellen und in das Integral einsetzen:

$$u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x} \;\Rightarrow\; \int_4^5 u^3 \cdot 2x \, \frac{\mathrm{d}u}{2x}$$

Das $2x$ kürzt sich an dieser Stelle raus und der Integrand hängt nur noch von u ab. An dieser Stelle müssen wir noch die Integralgrenzen ersetzen mit $u(4) = 12$ und $u(5) = 21$ und können das Integral bestimmen:

$$\int_{12}^{21} u^3 \, \mathrm{d}u = \left[\frac{1}{4}u^4\right]_{12}^{21} = 43.436,25 \text{ [FE]}$$

Für die Stammfunktion müssen wir u rücksubstituieren: $F(x) = \frac{1}{4}\underbrace{(x^2-4)}_{=u}{}^4 + C$.

Weitere kurze Beispiele:

1)

innere Funktion

$$\int_0^{2\pi} \sin(2x)\, dx \qquad u = 2x$$

äußere Funktion

$$= \int_0^{2\pi} \sin(u)\, dx \qquad u' = 2 = \frac{du}{dx}$$

$$= \int_{u(0)=0}^{u(2\pi)=4\pi} \sin(u)\, \frac{du}{2} \qquad \Leftrightarrow \; dx = \frac{du}{2}$$

Grenzen ersetzen!

$$= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \sin(u)\, du$$

$$= \frac{1}{2}[-\cos(u)]_0^{4\pi}$$

2)

innere Funktion

$$\int_1^2 e^{3x}\, dx \qquad u = 3x$$

äußere Funktion

$$= \int_1^2 e^u\, dx \qquad u' = 3 = \frac{du}{dx}$$

$$= \int_{u(1)=3}^{u(2)=6} e^u\, \frac{du}{3} \qquad \Leftrightarrow \; dx = \frac{du}{3}$$

Grenzen ersetzen!

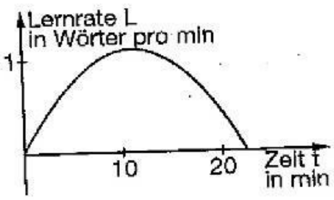
$$= \frac{1}{3}\int_3^6 e^u\, du$$

$$= \frac{1}{3}[\, e^u\,]_3^6$$

Sonderfälle der Substitution:

- Lineare Substitution: $\int_a^b f(mx+n)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{m}\left[F(mx+n)\right]_a^b$
- Logarithmische Integration: $\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}\, \mathrm{d}x = \left[ln|g(x)|\right]_a^b$

Übungsaufgaben

1	**7** *„Aufleiten" und Ableiten* a) Finden Sie Stammfunktionen zu f(x). $f_1(x) = 3$ $f_2(x) = 3x - 2$ $f_3(x) = x(x-1)^2$ $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $f_5(x) = -\frac{4}{x^2}$ $f_6(x) = \cos(x)$ b) Geben Sie zu den folgenden Stammfunktionen F(x) jeweils die Ableitungsfunktion f(x) an. $F_1(x) = x^2$ $F_2(x) = 4x$ $F_3(x) = 2x^3 - \sin(x)$ $F_4(x) = -6x^3 + 0{,}5x^2 - 2x + 3$
2	**15** *Vokabellernen* Beim Auswendiglernen von Vokabeln wird die Lernrate (Anzahl der neu gelernten Wörter pro Minute) durch die Funktionsgleichung $L(t) = -0{,}009\,t^2 + 0{,}2\,t$ beschrieben.  a) Beschreiben Sie den Lernvorgang anhand des Graphen. b) Wie viele Wörter wurden in den ersten 10 Minuten gelernt, wie viele Wörter bis zum Zeitpunkt, an dem die Lernrate auf null gesunken ist?
3	**11** Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f(x) im Intervall [a ; b] mit der x-Achse einschließt. a) $f(x) = x^3 - x$, [−1 ; 2] b) $f(x) = 0{,}5x^3 - x^2 - 4x$, [−2 ; 4]
4	**12** Vergleichen Sie das Integral von f in den Grenzen zwischen a und b mit dem Flächeninhalt unter dem Graphen von f im Intervall [a ; b]. a) $f(x) = x^3$, [−2 ; 2] b) $f(x) = 0{,}25x^4 - x^2$, [−2 ; 0] c) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, [0 ; 4]

5	**13** Welchen Inhalt schließen die Graphen der Funktionen f und g zwischen ihren Schnittstellen ein? a) $f(x) = 6 - x;\ g(x) = x^2 - 6x + 10$ b) $f(x) = 5 - 0{,}5x^2;\ g(x) = x^2 + 3x + 0{,}5$
6	**14** Durch den Wendepunkt des Graphen von $f(x) = x^3 - 3x^2$ wird eine Parallele zur y-Achse gezogen. Diese Parallele zerlegt die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt, in zwei Teilflächen. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der beiden Teilflächen zueinander?
7	**3.** Berechne das Integral und gib jeweils eine Stammfunktion zum Integranden an. **a)** $\int_1^2 (x-2)\cdot e^x\,dx$ **b)** $\int_{-1}^1 (x+1)\,e^x\,dx$ **c)** $\int_0^5 2x\cdot e^{-x}\,dx$ **d)** $\int_1^4 \ln x\cdot x\,dx$ **e)** $\int_0^\pi x\cdot\sin x\,dx$ **f)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\,dx$
8	**4.** Berechne das Integral, indem du das Verfahren der partiellen Integration mehrfach anwendest. **a)** $\int_{-1}^2 (x^2+1)\,e^x\,dx$ **b)** $\int_{-3}^0 (x^2+4x+3)\,e^x\,dx$ **c)** $\int_{-2}^1 (-6x^2+4)\,e^x\,dx$ **d)** $\int_{-2}^4 (x^2-x)\cdot e^{-x}\,dx$ **e)** $\int_0^1 x^3\,e^x\,dx$ **f)** $\int_1^e x\cdot\ln x\,dx$ **g)** $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ **h)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot\cos x\,d$ **i)** $\int_a^\pi \sin x\cdot e^x\,dx$
9	**5.** Ermittle eine Stammfunktion F zu f. **a)** $f(x) = x\,e^{2x}$ **b)** $f(x) = (2x-1)\cdot e^x$ **c)** $f(x) = x\cdot(x-1)^4$ **d)** $f(x) = (2x+5)\cdot(x+2)^8$ **e)** $f(x) = x\cdot\sin x$ **f)** $f(x) = x^2\cdot e^{-x}$ **g)** $f(x) = (x^2-3x+4)\,e$ **h)** $f(x) = x^3\cdot e^{2x}$ **i)** $f(x) = x^2\cdot\ln x$

10

5.
Berechne das Integral und gib eine Stammfunktion zum Integranden an.

a) $\int_{-1}^{1} (2x+1)\cdot 4(x^2+x+2)^3\,dx$ **d)** $\int_{-1}^{0} (-2x)\cdot e^{-x^2}\,dx$ **g)** $\int_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

b) $\int_{0}^{2} 6x^2\cdot 3(2x^3-8)^2\,dx$ **e)** $\int_{1}^{3} -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ **h)** $\int_{0}^{\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)\,dx$

c) $\int_{-2}^{1} 10x(x^2-4)^4\,dx$ **f)** $\int_{1}^{2} \frac{1}{x}\cdot 3(\ln x)^2\,dx$ **i)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x\cdot(\sin x)^3\,dx$

11

6.
Berechne das Integral und gib eine Stammfunktion zum Integranden an.

a) $\int_{0}^{1} x(x^2+3)^4\,dx$ **d)** $\int_{1}^{4} x\sqrt{x^2-1}\,dx$ **g)** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin x\cdot\cos x\,dx$

b) $\int_{1}^{2} x^2(x^3-1)^2\,dx$ **e)** $\int_{-1}^{2} x e^{x^2}\,dx$ **h)** $\int_{-\pi}^{0} \cos x(\sin x)^3\,dx$

c) $\int_{-2}^{0} (x+1)(x^2+2x+2)^3\,dx$ **f)** $\int_{0}^{1} (x-1)e^{x^2-2}\,dx$ **i)** $\int_{0}^{1} \sin x\, e^{\cos x}\,dx$

12

7.
Ermittle eine Stammfunktion F zu f.

a) $f(x)=5(x+2)^4$ **f)** $f(x)=x^2(x^3-2)^5$ **k)** $f(x)=x^2e^{x^3}$

b) $f(x)=15(3x+4)^5$ **g)** $f(x)=2x\cdot e^{x^2}$ **l)** $f(x)=(x+1)e^{x^2+2x}$

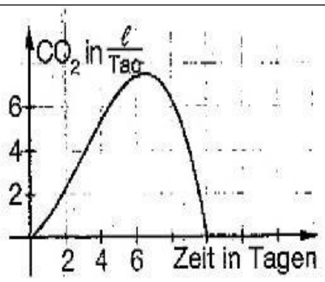
c) $f(x)=10x(x^2+1)^4$ **h)** $f(x)=-4e^{2-4x}$ **m)** $f(x)=4\cdot\cos(4x)$

d) $f(x)=24(4x-1)^5$ **i)** $f(x)=(2x-4)\,e^{x^2-4x+1}$ **n)** $f(x)=-6\,\frac{1}{(2x+1)^4}$

e) $f(x)=x(3-x)^7$ **j)** $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ **o)** $f(x)=-2x\cdot\frac{1}{(1+x^2)^2}$

13

4 *Gärungsprozess*



Der Graph zeigt die Gärungsgeschwindigkeit für Traubenmost (in Liter CO_2 pro Tag). Er kann beschrieben werden durch die Funktion:

$f'(x) = -0{,}04x^3 + 0{,}34x^2 + 0{,}64x$

a) Beschreiben Sie den Gärungsprozess anhand des Graphen.

b) Geben Sie den Funktionsterm und den Graphen der zugehörigen Bestandsfunktion an. Welche Größe wird damit beschrieben?

c) Welche Menge an CO_2 wurde insgesamt in den 10 Tagen produziert?

14

3 *Von der Geschwindigkeit zum Weg*

In der Tabelle ist der Geschwindigkeitsverlauf eines Autos während einer Stunde aufgezeichnet (t in min; v in $\frac{km}{h}$).

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
v	20	65	90	35	95	80	50	60	35	80	90	75	25

a) Schätzen Sie, wie weit das Auto in dieser Stunde ungefähr gefahren ist.

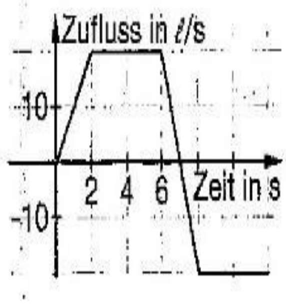
b) Berechnen Sie einen Näherungswert mithilfe der Trapezmethode und vergleichen Sie mit Ihrem Schätzwert.

c) Skizzieren Sie eine „Kurve", die in etwa die Messwerte der Tabelle erfasst. Skizzieren Sie dazu den Graphen der zugehörigen Bestandsfunktion.

15

1 *Zufluss im Wasserbecken*

Die Grafik zeigt Zu- und Abfluss in einem Wasserbecken. Skizzieren Sie die zugehörige Bestandsfunktion. Was beschreibt diese Funktion?



16

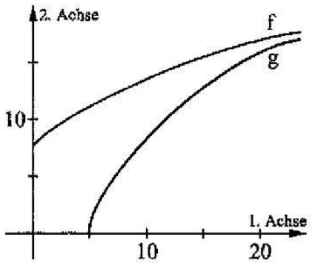
3.

Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f über dem Intervall $[a; b]$ werde um die 1. Achse gedreht. Zeichne die zu drehende Fläche und berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers. **a)** $f(x) = 1 - x^2$, $[-1; 1]$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x}$, $[1; 2]$

17

4.

Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der 1. Achse werde um die 1. Achse gedreht. Zeichne die zu drehende Fläche und berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers. **a)** $f(x) = x^2 - 4$ **b)** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$



5.

Durch Rotation der Graphen der Funktionen f mit $f(x) = \sqrt{10x + 40}$ und g mit $g(x) = \sqrt{15x - 75}$ über den Intervallen $[0; 20]$ bzw. $[5; 20]$ um die 1. Achse entsteht ein schalenförmiger Körper. Berechne sein Volumen. Berechne auch das Fassungsvermögen der Schale.

Gegeben ist eine Funktion der Form $f(x)=\frac{33}{224}x^3-\frac{51}{14}x^2+\frac{1215}{56}x$ die die Umdrehungen im Uhrzeigersinn pro Sekunde eines Fidget Spinners angibt. (x in Sekunden im Intervall I=[0; 15])

a) Interpretiert die Kurve hinsichtlich des Verlaufes. Was geben die Kurvenanteile oberhalb- was unterhalb der x- Achse an?

b) Wie viele Umdrehungen pro Sekunde ist die „Maximalgeschwindigkeit" des Spielzeuges?

c) Wie viele Umdrehungen macht der Spinner in den ersten 8 Sekunden?
Wie viele in der 9. Sekunde?
Stelle einen integralfreien Term auf, der die Umdrehungen des Spinners von der zweiten Sekunde an beschreibt

d) Wie viele Umdrehungen (unabhängig von der Drehrichtung) macht der Spinner insgesamt?

e) Der Spinner hat einen Durchmesser von 8 cm. Wie weit vom Startpunkt würde der Spinner zum Stehen kommen, wenn er von diesem Startpunkt wie ein Rad auf ebenem Untergrund rollen würde?

Aufgabe 4:

Es sei $f(x) = x^3 - 2,5x^2 - 2x + 1,5$ vorgegeben.

a) Zeigen Sie, dass $x_1 = -1$ eine Nullstelle von f ist. Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens der Polynomdivision weitere Nullstellen von f.
b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x- und der y-Achse.
c) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von f.
d) Bestimmen Sie lokale Extrema auf dem Graphen von f.
e) Bestimmen Sie alle Wendepunkte auf dem Graphen von f.
f) Geben Sie eine Stammfunktion von f an.
g) Berechnen Sie $\int_{-1}^{0} f(x)dx$
h) Füllen Sie die Lücken in der nachstehenden Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen von f.

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
f(x)	-4,5		1,75				-3,75		-3,5		6,75

i) Markieren Sie das durch $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ beschriebene Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus 4g.

Aufgabe 2:

Gegeben seien die Parabel g sowie die Geraden h_1 und h_2.

$g(x) = 0,75x^2 - 1,5x - 6 \qquad h_1(x) = 1,5x - 12 \qquad h_2(x) = 1,5x - 2,25$

a) Geben Sie g in Scheitelpunktform an. Bestimmen Sie den Scheitelpunkt von Graph g und machen Sie Aussagen über die Öffnung der Parabel.
b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von Graph g mit der x- und der y-Achse.
c) Ist h_1 (bzw. h_2) eine Sekante, Passante oder Tangente der Parabel g? Berechnen Sie ggf. gemeinsame Punkte von Parabel g mit h_1 und h_2.
d) Für welches $m \in \mathbb{R}$ ist $h_m : y = 1,5x + m$ eine Tangente der Parabel g?
e) Berechnen Sie $I = \int_{-2}^{4} g(x)dx$.

Aufgabe 3:

Es seien $f(x) = x^3 - 2,25x^2 - 7,5x + 2$ und $g(x) = 0,75x^2 - 1,5x - 6$ vorgegeben.

a) Zeigen Sie, dass $x_1 = -2$ eine Nullstelle von f ist. Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens der Polynomdivision weitere Nullstellen von f.
b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x- und der y-Achse.
c) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von f.
d) Bestimmen Sie lokale Extrema auf dem Graphen von f.
e) Bestimmen Sie alle Wendepunkte auf dem Graphen von f.
f) Geben Sie eine Stammfunktion von f an.
g) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen f und g.
h) Berechnen Sie $J = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]dx$
i) Füllen Sie die Lücken in der nachstehenden Wertetabelle und zeichnen Sie die Graphen von f und g.

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$	**-8,9**		**4,81**		**5,06**		**-2,2**			**-14**			**-8,9**		**13,8**

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5
$g(x)$	**5,25**			**-5,06**		**-6,56**		**-6,56**		**-5,06**	**-3,75**		

j) Markieren Sie das Flächenstück J in ihrer Zeichnung der Graphen von f und g.