Aktuelle Lernförderung

Mathe 32

Der Zufall steht Modell

Liebe Förderlehrer,

bitte arbeitet mit euren Schülerinnen und Schülern hauptsächlich an deren Unterlagen zum aktuellen Schulstoff – also Hausaufgaben erklären, Tests und Klassenarbeiten vorbereiten, sowie das aktuelle Themengebiet erläutern.

Diese Arbeitsblätter sind ausschließlich zu eurer Unterstützung gedacht, falls die SuS einmal nichts dabei haben sollten, keinen Unterricht in Mathe hatten oder noch weitere Übung in einem Themengebiet benötigen.

Danke und viel Erfolg!

2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Zufallsexperiment höchstens einmal „Zahl“ geworfen wird?

Grundlegend drücken wir den Operator höchstens als $\leq$ aus und schreiben aus der Aufgabenstellung raus, was gesucht ist. Daraus folgt:

$$P(X \leq 1)$$

An dieser Stelle muss man sich die Frage stellen, was wirklich kleiner gleich Eins ist. Daraus folgt, dass wirklich kleiner gleich Eins nur $P(X = 0)$ und $P(X = 1)$ sind und die Wahrscheinlichkeiten für beide Zufallsvariablen bekannt sind.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,25 + 0,5 = 0,75$$

Man kann sich hier auch bei der Beantwortung die Verteilungsfunktion zu Nutze machen, da die Verteilungsfunktion die Wahrscheinlichkeit misst, dass die Zufallsvariable X höchstens ($\leq$) den Wert x annimmt! Es folgt

$$P(X \leq 1) = F(X = 1) = 0,75.$$

5.6 Verteilungsparameter einer diskreten Zufallsvariablen

Verteilungsparameter sind Größen, die bestimmte Aspekte einer Verteilung charakterisieren, wie zum Beispiel Lage, Streuung oder Schiefe einer Verteilung.
Wichtige Parameter sind:

Erwartungswert (Lageparameter):

- Der Erwartungswert ist der Schwerpunkt der Verteilung und beschreibt die Zahl, die die Zufallsvariable im Mittel annimmt.
- Der Erwartungswert $E(X)$ wird auch oft als μ bezeichnet.

$$\boxed{\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \underbrace{P(X = x_i)}_{=p_i} = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_k \cdot p_k}$$

Varianz (Streuungsparameter):

- Varianz beschreibt die Streuung einer Zufallsvariablen und hängt nicht vom Zufall ab.
- Die Varianz von der Zufallsvariablen X ist der Erwartungswert der quadrierten Abweichung von ihrem Erwartungswert.

- Oft wird statt $V(X)$ einfach σ^2 geschrieben.

$$\boxed{\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$$

- Der Verschiebungssatz $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$ erleichtert meist die Berechnung der Varianz.

Standardabweichung (Streuungsparameter):

- Die Standardabweichung ist die positive Wurzel aus der Varianz und gibt die Streuung der Werte um den Mittelwert an.
- Damit ist die Standardabweichung ebenfalls ein Maß für die Streuung, nur dass sie etwas langsamer ansteigt als die Varianz. Kennt man die Varianz, dann kann diese leicht in die Standardabweichung umgerechnet werden (und umgekehrt).

$$\boxed{\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}}$$

Grundaufgaben

- Erwartungswert und Standardabweichung berechnen und interpretieren.
- Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass die Zufallsvariable Werte annimmt, die um vorgegebene Werte vom Erwartungswert abweichen.

Beispiel

Ein Lehrer möchte wissen, wie gut seine Schüler abschneiden und wie sehr die guten bzw. schlechten Schüler vom Schnitt abweichen. Folgende Tabelle zeigt die Notenverteilung:

x_i (Note)	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,15	0,5	0,2	0	0,05

Der Erwartungswert berechnet sich wie folgt:

$$\mu = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0,05 = 3$$

Interpretation: Der Notendurchschnitt der Klasse beträgt somit 3.

Die Standardabweichung berechnen wir über die Varianz:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (1-3)^2 \cdot 0,1 + (2-3)^2 \cdot 0,15 + (3-3)^2 \cdot 0,5 + (4-3)^2 \cdot 0,2 \\ &\quad + (5-3)^2 \cdot 0 + (6-3)^2 \cdot 0,05 = 1,2 \\ \Rightarrow \quad \sigma &= \sqrt{1,2} \approx 1,09 \end{aligned}$$

Die Streuung um den Notendurchschnitt ist gering. Ein Stabdiagramm würde das weiter verdeutlichen. Bei solchen Aufgaben müsst ihr oft mehrere Szenarien vergleichen und sagen, welches Szenario mehr streut.

5.7 Bernoulliverteilung

Ein Zufallsexperiment, bei dem man sich nur dafür interessiert, ob ein Ereignis A eintritt oder nicht, nennt man ein Bernoulli-Experiment. Es wird also nur *Erfolg* oder *nicht Erfolg* betrachtet. Die Bernoulli-Verteilung ist stets diskret!

Dann heißt X bernoulliverteilt mit Parameter p. Man schreibt $X \sim B(1,p)$.

Es sei $p = P(A)$ die Eintritts- oder Erfolgswahrscheinlichkeit. Die Zufallsvariable X kann nun folgende Werte annehmen

$$X = \begin{cases} 1, & \text{falls A eintritt} \\ 0, & \text{falls A nicht eintritt} \end{cases}$$

und beschreibt die Anzahl der Erfolge bei $n = 1$ Versuchen.

Bemerkungen

Sei $X \sim B(1,p)$. Dann ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = 1) = p \quad \text{und} \quad P(X = 0) = 1 - p \quad \text{als Gegenwahrscheinlichkeit}$$

Daraus ergeben sich folgende Lage- und Streuungsmaße:

1. Erwartungswert: $\mu = E(X) = p$
   - Erwartungswert ist hier die Eintrittswahrscheinlichkeit.
2. Varianz: $\sigma^2 = V(X) = p \cdot (1 - p)$
3. Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{p \cdot (1 - p)}$
   - Zur Erinnerung: Die Standardabweichung misst, wie schwer es ist, diese Wahrscheinlichkeit zu schätzen.

Beispiele: Geburt (Mädchen/Junge), Münzwurf (Kopf/Zahl)

5.8 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung („mit Zurücklegen-Verteilung“) ist eine der wichtigsten diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Eine Binomialverteilung ist die n-malige Wiederholung eines Bernoulli-Experiments.

Dann heißt X binomialverteilt mit Parametern n und p. Man schreibt $X \sim B(n,p)$.

Bemerkungen

- Die einzelnen Wiederholungen sind stochastisch unabhängig.
- Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist bei allen Wiederholungen p:

$$\text{genau } k \text{ Treffer: } P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\text{höchstens } k \text{ Treffer: } P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

- Was ist eigentlich das n, p und k?
  - n = Anzahl der Ziehungen
  - p = Wahrscheinlichkeit
  - k = Anzahl der Treffer
- Berechnung für genau k Treffer mit GTR/CAS: `binompdf`(n, p, k)
- Berechnung für höchstens k Treffer mit GTR/CAS: `binomcdf`(n, p, k)
- Den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ ermittelt man
  - mit der `nCr`-Taste des Taschenrechners
  - mit der Formel $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten muss wieder 1 ergeben.
- Wichtig: Immer anwendbar beim „Ziehen mit Zurücklegen“. Bei Ziehen ohne Zurücklegen nicht (in diesem Fall ist die Pfadregel hilfreich).

Daraus ergeben sich folgende Lage- und Streuungsmaße:

1. Erwartungswert: $\mu = E(X) = n \cdot p$
2. Varianz: $\sigma^2 = V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$
3. Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Beispiel

Eine Urne enthält 6 schwarze und 4 rote Kugeln. Es werden 5 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Grundlegend muss man herausfinden, um welche Verteilung es sich handelt. In der Aufgabenstellung steht, dass die Kugeln „mit Zurücklegen“ gezogen werden und daraus folgt, dass es sich um die Binomialverteilung handeln muss.

$$X \sim B(n, p)$$

Jetzt müssen die Parameter n und p identifiziert werden, die zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten für die Binomialverteilung benötigt werden.

- „es wird fünf mal gezogen“: daraus folgt $n = 5$.
- p: Laplace Wahrscheinlichkeit, also der Quotient aus den günstigen Ereignissen und den möglichen Ereignissen. Daraus folgt: $p = 4/10 = 0,4$.

Wir fassen zusammen:

- Für rote Kugeln gilt $X \sim B(5; 0,4)$.
- für schwarze Kugeln gilt $X \sim B(5; 0,6)$.

Es werden die nachstehenden Aufgaben bearbeitet.

1. Berechne den Erwartungswert der roten Kugeln: $\mu = n \cdot p = 5 \cdot 0,4 = 2$
2. Berechne die Varianz der roten Kugeln:
$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 5 \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,4) = 1,2$$
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit genau drei rote Kugeln zu ziehen?

   Hier gilt also $X \sim B(5; 0,4)$ mit $k = 3$:
$$P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot 0,4^3 \cdot (1-0,4)^{5-3} = 0,2304$$
   oder mit TR und dem Befehl `binompdf`$(5; 0,4; 3)$. Die Wahrscheinlichkeit für genau drei rote Kugeln beträgt 23,04 %.
4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit höchstens zwei rote Kugeln zu ziehen?

   Hier gilt also $X \sim B(5; 0,4)$ mit $k \leq 2$:
$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= \binom{5}{0} \cdot 0,4^0 \cdot (1-0,4)^{5-0} + \binom{5}{1} \cdot 0,4^1 \cdot (1-0,4)^{5-1} \\ &+ \binom{5}{2} \cdot 0,4^2 \cdot (1-0,4)^{5-2} = 0,68256 \approx 68,26\% \end{aligned}$$
   oder mit TR und dem Befehl `binomcdf`$(5; 0,4; 2)$.

5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens zwei schwarze Kugel zu ziehen?

   Hier gilt also $X \sim B(5; 0,6)$ mit $k \geq 2$. Für die Lösung gibt es zwei Möglichkeiten, wobei die zweite Alternative (II) sehr viel Zeit spart und aus diesem Grund auch gewählt werden sollte!

$$\begin{array}{rl} (I) & P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\ (II) & P(X \geq 2) = 1 - ((P(X=0) + P(X=1)) \end{array}$$

   Nach Einsetzen der gegebenen Werte ergibt sich die Wahrscheinlichkeit mindestens zwei schwarze Kugeln zu ziehen: $P(X \geq 2) = 0,91296$.

5.8.1 Typische Binomialrechnungen

Eine Stichprobe besteht aus $n = 100$ Schrauben und die Wahrscheinlichkeit einer defekten Schraube liegt bei $p = 0,1$.

1. Gesucht sei die Wahrscheinlichkeit, dass genau 12 Schrauben defekt sind:

$$P(X = 12) = \binom{100}{12} \cdot 0,1^{12} \cdot 0,9^{100-12}$$

2. Gesucht sei die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 12 Schrauben defekt sind:

Also alle Wahrscheinlichkeiten von 0 bis 12 aufsummieren:

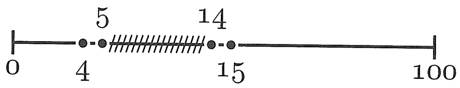
$$P(X \leq 12) = P(X=0) + P(X=1) + ... + P(X=12)$$

3. Gesucht sei die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12 Schrauben defekt sind:

Also alle Wahrscheinlichkeiten von 12 bis 100 aufsummieren oder mit der Gegenwahrscheinlichkeit rechnen:

$$P(X \geq 12) = \underbrace{1}_{\text{Alles}} - \underbrace{P(X \leq 11)}_{0-11}$$

4. Gesucht sei die Wahrscheinlichkeit für <u>mehr</u> als 4, aber <u>weniger</u> als 15 defekte Schrauben:



Also alle Wahrscheinlichkeiten zwischen 5 und 14 aufsummieren oder clever mit Gegenwahrscheinlichkeiten:

$$P(5 \leq X \leq 14) = \underbrace{P(X \leq 14)}_{\text{Alles bis 14}} - \underbrace{P(X \leq 4)}_{\text{Alles bis 4}}$$

5.8.2 Übersicht typischer Fragestellungen

$$\begin{aligned}
\text{genau } k \text{ Treffer}: &\ P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
\text{höchstens } k \text{ Treffer}: &\ P(X \le k) \\
\text{weniger als } k \text{ Treffer}: &\ P(X < k) = P(x \le k-1) \\
\text{mindestens } k \text{ Treffer}: &\ P(X \ge k) = 1 - P(x \le k-1) \\
\text{mehr als } k \text{ Treffer}: &\ P(X > k) = 1 - P(x \le k) \\
\text{mind. } k, \text{ aber höchst. } h \text{ Treffer}: &\ P(k \le X \le h) = P(X \le h) - P(X \le k-1)
\end{aligned}$$

5.8.3 Aufgabentyp: Anzahl Ziehungen ermitteln

Oft wird auch nach der Anzahl der Ziehungen/Wiederholungen n gefragt. Dabei gibt es einige Dinge zu beachten. Machen wir uns das Ganze anhand eines Beispiels klar:

Wie viele Bälle müsste man mindestens kontrollieren, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% wenigstens einen fehlerhaften Ball zu finden? X sei binomialverteilt mit $p = 0,1$. Gesucht ist demnach n. Es gilt:

$$\begin{array}{lrcll}
 & P(X \ge 1) & \ge & 0,95 & \\
\Leftrightarrow & 1 - P(X=0) & \ge & 0,95 & \mid + P(X=0) \mid - 0,95 \\
\Leftrightarrow & 0,05 & \ge & P(X=0) & \\
\Leftrightarrow & P(X=0) & \le & 0,05 & \mid \text{Formel einsetzen} \\
\Leftrightarrow & \binom{n}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^n & \le & 0,05 & \mid \text{bel. Zahl hoch 0 ist immer 1} \\
\Leftrightarrow & 0,9^n & \le & 0,05 & \mid \text{beide Seiten logarithmieren} \\
\Leftrightarrow & \ln(0,9^n) & \le & \ln(0,05) & \mid \text{Logarithmengesetze} \\
\Leftrightarrow & n \cdot \ln(0,9) & \le & \ln(0,05) & \mid \ln(0{,}9) \text{ negativ, daher Vorzeichenumkehr} \\
\Leftrightarrow & n & \ge & \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,9)} \approx 28,43 &
\end{array}$$

Es müssten somit mindestens 29 Bälle kontrolliert werden, um wenigstens einen fehlerhaften Ball zu finden.

Beachtet: Bei mal oder durch (-1) dreht sich das größer oder kleiner Zeichen. Wenn wir durch den ln teilen, müsst ihr aufpassen ob der ln eventuell negativ ist, dann dreht sich das Zeichen wieder.

Übungsaufgaben

1	**2** X sei binomialverteilt. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten. **a)** $n=10;\ p=0{,}1;\ P(X=2)$ **b)** $n=10;\ p=0{,}2;\ P(1\le X\le 2)$ **c)** $n=10;\ p=0{,}3;\ P(X\ge 2)$ **d)** $n=50;\ p=0{,}1;\ P(X=10)$ **e)** $n=50;\ p=0{,}2;\ P(5\le X\le 10)$ **f)** $n=50;\ p=0{,}3;\ P(X\ge 10)$
2	**5** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim viermaligen Werfen einer Laplacemünze in den ersten drei Würfen Zahl und im letzten Wurf Wappen fällt.
3	**4** Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit dem Erwartungswert $E(X)=3$ und der Standardabweichung $\sigma=\sqrt{2}$. Berechnen Sie n und p.
4	**6** Wie oft muss man einen Laplacewürfel wenigstens werfen, um mit der Wahrscheinlichkeit von 0,9 mindestens einmal eine „6“ zu erhalten?
5	**8** Bei einem Multiple-Choice-Test mit 50 Fragen werden 4 Antwortmöglichkeiten pro Frage vorgegeben, von denen genau eine richtig ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man **a)** mehr als die Hälfte, **b)** mehr als 20, **c)** mindestens 15 und höchstens 25, **d)** weniger als 10 der Fragen durch zufälliges Ankreuzen richtig beantwortet?
6	**9** Ein Fragebogen enthält 10 Fragen; zu jeder sind eine richtige und drei falsche Antworten vorgegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kreuzt eine völlig ahnungslose Person mindestens 6 Antworten richtig an?
7	**11** In einer Zeitung wird ein Schlankheitsmittel angeboten, welches erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % zum Erfolg führt. 10 Personen testen dieses Mittel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt mindestens die Hälfte der Testpersonen ab?

8	**14** Hühnereier werden in Schachteln mit 10 Stück geliefert. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ei beschädigt ist, beträgt 3 %. **a)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Schachtel nur unbeschädigte Eier? **b)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Schachtel mehr als ein beschädigtes Ei? **c)** 10 Schachteln werden in einen Karton verpackt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darin 2 Schachteln mit unbeschädigten Eiern?
9	Von den 100 Beschäftigten eines Betriebes kommen durchschnittlich 40% mit einem eigenen Auto zur Arbeit. **a)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit genügt ein Parkplatz mit 50 Plätzen? **b)** Wie viele Plätze müssen zur Verfügung stehen, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% ausreichen?
10	**13** Die Symptome einer Krankheit werden von einem Arzt mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % richtig beurteilt. Die Zufallsgröße X bezeichnet die Anzahl der falschen Entscheidungen des Arztes bei 100 Patienten. **a)** Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Standardabweichung σ von X. **b)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der falsch diagnostizierten Patienten im Intervall $[E(X)-\sigma; E(X)+\sigma]$?

6.2 Verteilungsparameter stetiger Zufallsvariablen

Verteilungsparameter sind Größen, die bestimmte Aspekte einer Verteilung charakterisieren, wie zum Beispiel Lage, Streuung oder Schiefe einer Verteilung. Wichtige Parameter sind:

Erwartungswert (Lageparameter):

- Der Erwartungswert ist der Schwerpunkt der Verteilung und beschreibt die Zahl, die die Zufallsvariable im Mittel annimmt.
- Ist die Zufallsvariable X stetig, so ist die Verteilung durch die Dichte $f(x)$ bestimmt. Die Randwerte von $-\infty$ bis ∞ bedeuten, dass über den gesamten definierten Bereich integriert wird.
- Der Erwartungswert wird auch oft als μ bezeichnet.

$$\boxed{\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Varianz (Streuungsparameter)

- Varianz beschreibt die Streuung einer ZV.
- Die Varianz von der stetigen ZV X ist der Erwartungswert der quadrierten Abweichung von ihrem Erwartungswert:

$$\boxed{\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \mu)^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}$$

- Der Verschiebungssatz $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \mu^2$ erleichtert meist die Berechnung der Varianz.

Standardabweichung (Streuungsparameter)

- Die Standardabweichung ist die positive Wurzel aus der Varianz und gibt die Streuung der Werte um den Mittelwert an.
- Damit ist die Standardabweichung ebenfalls ein Maß für die Streuung, nur dass sie etwas langsamer ansteigt als die Varianz. Kennt man die Varianz, dann kann diese leicht in die Standardabweichung umgerechnet werden (und umgekehrt).

$$\boxed{\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}}$$

Beispiel

An einem Uni-Tag, falls dieser Tag nicht Freitag ist, geht Daniel zwischen 10:00 Uhr und 10:36 Uhr zur Bushaltestelle. Seine dortige Wartezeit auf den Bus beträgt zwischen 0 und 12 Minuten. Es sei zudem die Dichtefunktion der Wartezeit bekannt mit $f(x) = 1/12$ für $x \in [0, 12]$ und 0 sonst.

1. Berechne Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.

Hierbei handelt sich um eine stetige Zufallsvariable, da die Wartezeit immer weiter unterteilt werden kann (Minuten, Sekunden, Millisekunden). Aus diesem Grund sind die Formeln der stetigen Zufallsvariablen zu wählen.

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \int_0^{12} x \cdot f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{12} \frac{1}{12}\, x\, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{24}\, x^2\right]_0^{12} = \frac{1}{24} \cdot 12^2 - \frac{1}{24} \cdot 0^2 = 6\end{aligned}$$

Die erwartete Wartezeit beträgt 6 Minuten.

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V(X) &= \int_0^{12} x^2 \cdot f(x)\, \mathrm{d}x - \mu^2 = \int_0^{12} \frac{1}{12}\, x^2\, \mathrm{d}x - 6^2 \\ &= \left[\frac{1}{36}\, x^3\right]_0^{12} = \left(\frac{1}{36} \cdot 12^3 - \frac{1}{36} \cdot 0^3\right) - 36 = 12\end{aligned}$$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen 5 Minuten und 8 Minuten warten muss?

$$\begin{aligned}P(X \leq x) &= \int_5^{8} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_5^{8} \frac{1}{12}\, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{12}\, x^3\right]_5^{8} = \frac{1}{12} \cdot 8 - \frac{1}{12} \cdot 0^5 = 0,25\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen 5 Minuten und 8 Minuten warten muss, beträgt 25 %.

6.3 Normalverteilung

Die Normal- oder Gauß-Verteilung (oder Glockenkurve) ist die wichtigste stetige Verteilung.

X heißt normalverteilt oder Gauß-verteilt mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$, kurz $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, wenn X folgende Dichte hat

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}}$$

Gucken wir uns kurz die Formel genau an.

- $\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}$: Der Vorfaktor normiert alle Funktionswerte, so dass diese zwischen 0 und 1 liegen.
- $e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$: Dieser Faktor gibt die Häufigkeit von x an.

Verteilungsparameter:

- Erwartungswert: $E(x) = \mu$, beschreibt x mit der größten Häufigkeit (Hochpunkt der Glocke)
- Varianz: $V(x) = \sigma^2$
- Standardabweichung: σ, gibt Breite der Kurve an

6.3.1 Standardisieren von normalverteilten Zufallsvariablen

Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung kann man nicht mit einer Formel im Taschenrechner berechnen. Das Integral über der Dichtefunktion lässt sich nämlich nicht mit Stift und Papier lösen:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{t-\mu}{\sigma})^2} \, dt, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Wir nehmen dafür eine Verteilungstabelle mit der man Werte $F(x)$ der Verteilungsfunktion jeder beliebigen Normalverteilung bestimmen kann. Allerdings gibt es unendlich viele Normalverteilungen, sodass wir ausschließlich eine Tabelle für Standardnormalverteilungen $X \sim N(0, 1)$ mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ verwenden. Wir müssen also die normalverteilten Zufallsvariablen standardisieren und dann deren Wert anhand der Verteilungstabelle bestimmen! Es gilt:

$$\boxed{P(X \leq x) = P(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(z)}$$

mit der standardisierten Zufallsvariable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Die Standardnormalverteilung wird dabei statt $F(x)$ mit $\Phi(z)$ notiert, um Verwechslungen mit der unstandardisierten Verteilungsfunktion zu vermeiden.

Übungsaufgaben

1	**14** Laut Brockhaus sind 4 % der männlichen Bundesbürger Linkshänder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 800 Schülern einer Schule zwischen 30 und 40 Linkshänder sind?
2	**15** Bei der Produktion von DVDs hat eine Firma einen Ausschuss von 2 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 1000 DVDs höchstens (mindestens) 25 DVDs defekt sind?
3	**11** Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt ist 0,514. Berechnen Sie die erwartete Anzahl der Knaben unter 636 000 Geburten und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Zahl mindestens (höchstens) um 1000 Knaben übertroffen wird.
4	**10** In einer Urne liegen 5000 Kugeln, von denen 1000 rot sind. Es sollen 100 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden. Bestimmt werden soll die Wahrscheinlichkeit, mindestens 35 und höchstens 45 rote Kugeln zu ziehen. **a)** Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit exakt. Welche Schwierigkeiten entstehen bei der Berechnung? **b)** Ermitteln Sie das Ergebnis, welches sich bei einer Approximation durch die Binomialverteilung ergibt. **c)** Approximieren Sie die Binomialverteilung aus **b)** durch die Normalverteilung und berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit und ohne Stetigkeitskorrektur.
5	**12** Bei einem Multiple-Choice-Test muss ein Kandidat 50 (100) Fragen beantworten, wobei für jede Frage 4 Antworten vorgegeben sind, von denen genau eine richtig ist. Man will 98 % der Kandidaten, die ihre Antworten rein zufällig geben, aussondern. Wie viel richtige Antworten sind notwendig, damit ein Kandidat die Prüfung besteht?
6	**13** Türschlösser und Schlüssel werden in zwei unabhängigen Arbeitsgängen mit einem Ausschuss von 5 % bzw. 3 % hergestellt. Eine Schließanlage ist einwandfrei, wenn beide Einzelteile einwandfrei sind. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 1000 Schließanlagen mindestens (genau; höchstens) 940 in Ordnung sind?

Aufgabe 1:

Im schriftlichen Fachabitur Mathematik wurden im Anna-Zillken-Berufskolleg im Schuljahr 2009/10 die folgenden Ergebnisse erzielt.

Notenstufe	1	2	3	4	5	6
Anzahl	7	10	12	5	14	2

a) Erklären Sie die Begriffe *Merkmal, Merkmalsträger, Stichprobenumfang* im Bezug zur oben dargestellten Situation.

b) Zeichnen Sie ein Säulendiagramm mit folgenden Vorgaben:
x-Achse: Notenstufen in aufsteigender Reihenfolge
y-Achse: Die absolute Häufigkeit einer Notenstufe

c) Warum heißt diese Art von Notenverteilung auch „Anna-Zillken-Kamel“? Warum mögen die Mathelehrer des AZB das „Anna-Zillken-Kamel“ nicht?

d) Finden Sie das arithmetische Mittel und den Median der Notenverteilung.

e) Berechnen Sie die folgenden Streuungsmaße:
mittlerer absoluter Fehler A, Varianz V und Standardabweichung s_x

f) Wie viele Prozent der Stichproben liegen in dem Intervall $I = [\overline{x} - s_x; \overline{x} + s_x]$?
Liegen wirklich die erwarteten 66,6% in diesem Intervall?