Klassische Theoretische Physik I

KIT (WS 2014/2015)

Lösungen zu den Übungaufgaben

---

gelöst von Pascal Knodel

pascal.knodel@mail.de

Für Fehler oder Nicht-Vollständigkeit
übernehme ich keine Verantwortung.

14. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

Hinweis:

Viele der hier ausgeführten Zwischenschritte sind nicht für die Praxis (schriftliche Prüfung) geeignet.

Übungsaufgaben

1

1.1

a)
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\, x^{\alpha}\, sin\ x \\
&= \left(\frac{d}{dx}\, x^{\alpha}\right) sin\ x \ +\ x^{\alpha} \left(\frac{d}{dx}\, sin\ x\right) \\
&= \alpha\, x^{\alpha\, -\, 1}\, sin\ x \ +\ x^{\alpha}\, cos\ x
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\, sin\ x^{\alpha} \\
&= \frac{d}{dx}\, sin\,(x^{\alpha}) \\
&= \left(\frac{d}{d\ (x^{\alpha})}\, sin\ x^{\alpha}\right) \left(\frac{d}{dx}\, x^{\alpha}\right) \\
&= cos\ x^{\alpha}\ \alpha\ x^{\alpha\, -\, 1}
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\, sin^{\alpha}\ x \\
&= \frac{d}{dx}\, (sin\ x)^{\alpha} \\
&= \left(\frac{d}{d\,(sin\ x)}\, (sin\ x)^{\alpha}\right) \left(\frac{d}{dx}\, sin\ x\right) \\
&= \alpha\ (sin\ x)^{\alpha\, -\, 1}\, cos\ x
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\ x^{\alpha}\ sin\ \frac{1}{x} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\ x^{\alpha}\right)\ sin\ \frac{1}{x}\ +\ x^{\alpha}\ \left(\frac{d}{dx}\ sin\ \frac{1}{x}\right) \\
&= \alpha\ x^{\alpha\ -\ 1}\ sin\ \frac{1}{x}\ +\ x^{\alpha}\ \left(\left(\frac{d}{d\ \left(sin\ \frac{1}{x}\right)}\ sin\ \frac{1}{x}\right)\ \left(\frac{d}{dx}\ \frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \alpha\ x^{\alpha\ -\ 1}\ sin\ \frac{1}{x}\ +\ x^{\alpha}\ cos\ \frac{1}{x}\ \left(\frac{d}{dx}\ x^{-1}\right) \\
&= \alpha\ x^{\alpha\ -\ 1}\ sin\ \frac{1}{x}\ +\ x^{\alpha}\ cos\ \frac{1}{x}\ (-1)\ x^{-2}
\end{aligned}
$$

Bestimmung der Grenzwerte aus Teilaufgabe 1, d) von $f(x)$ und $f'(x) = \frac{df}{dx}$:

d) $f(x) = x^\alpha \, sin \, \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \left[x^\alpha \, sin \, \frac{1}{x} \right] \neq \lim_{x \to 0} [x^\alpha] \lim_{x \to 0} \left[sin \, \frac{1}{x} \right] = 0 \lim_{x \to \infty} [sin \, x] = 0 \, ? \; = \, ?$$

D.h., wir wissen noch nichts über den Grenzwert.

Möglichkeit: Abschätzen und danach einschließen.

$$x^\alpha \, sin \, \frac{1}{x} \in [\, x^\alpha \cdot [-1, \, 1] \,]$$

$$\Leftrightarrow \; -x^\alpha \leq f(x) \leq x^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \; \lim_{x \to 0} [-x^\alpha] \leq f(x) \leq \lim_{x \to 0} [x^\alpha]$$

$$\Leftrightarrow \; 0 \leq f(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \; \lim_{x \to 0} \left[x^\alpha \, sin \, \frac{1}{x} \right] = 0$$

d) $\frac{df}{dx} = \lim_{x \to 0} \left[\alpha \, x^{\alpha - 1} \, sin \, \frac{1}{x} - x^{\alpha - 2} \, cos \, \frac{1}{x} \right]$

$$\lim_{x \to 0} \left[\alpha \; x^{\alpha - 1} \; sin \; \frac{1}{x} \; - \; x^{\alpha - 2} \; cos \; \frac{1}{x}\right]$$

$$\neq \; \lim_{x \to 0} \left[\alpha \; x^{\alpha - 1} \; sin \; \frac{1}{x}\right] \; - \; \lim_{x \to 0} \left[x^{\alpha} \; cos \; \frac{1}{x} \; x^{-2}\right]$$

$$= \; 0 \; - \; \lim_{x \to 0} \left[x^{\alpha} \; cos \; \frac{1}{x} \; x^{-2}\right]$$

$$= \; - \lim_{x \to 0} \left[x^{\alpha - 2} \; cos \; \frac{1}{x}\right]$$

$$= \begin{cases} a > 2: \quad 0 \\[2ex] a = 2: \quad \lim\limits_{x \to 0} \; cos \; \frac{1}{x} \; = \; \lim\limits_{x \to \infty} \; cos \; x \; = ? \\[2ex] ... \end{cases}$$

D.h., wir wissen auch hier noch nichts über den Grenzwert.

Möglichkeit: Abschätzen und danach einschließen.

$$x^{\alpha - 1} \left(a \; sin \; \frac{1}{x} \; - \; \frac{1}{x} \; cos \; \frac{1}{x}\right) \; \in \; x^{\alpha - 1} \; \left[\; a \; [-1, \; 1] \; - \; \frac{1}{x} \; [-1, \; 1] \;\right]$$

$$\in \; x^{\alpha - 1} \; \left[\; -a \; - \; \frac{1}{x}, \; a \; + \; \frac{1}{x} \;\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{\alpha - 1} \left(-\alpha - \frac{1}{x} \right) \leq \frac{df}{dx} \leq x^{\alpha - 1} \left(\alpha + \frac{1}{x} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\alpha\, x^{\alpha - 1} - x^{\alpha - 2} \leq \frac{df}{dx} \leq \alpha\, x^{\alpha - 1} + x^{\alpha - 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 0} \left[-\alpha\, x^{\alpha - 1} - x^{\alpha - 2} \right] \leq \lim_{x \to 0} \frac{df}{dx} \leq \lim_{x \to 0} \left[\alpha\, x^{\alpha - 1} + x^{\alpha - 2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > 2: \quad \lim_{x \to 0} \frac{df}{dx} = 0 \\ \\ a = 2: \quad -1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{df}{dx} \leq 1 \\ \\ \ldots \end{cases}$$

D.h. wir wissen auch hier noch nichts über den Grenzwert für $\alpha \leq 2$.

"*Besser*" abschätzen und noch Mal einschließen:

$$-\alpha\, x^{\alpha - 1} - x^{\alpha - 2} \leq \frac{df}{dx} \leq \alpha\, x^{\alpha - 1} + x^{\alpha - 2}$$

$$\Rightarrow \quad -\alpha\, x^{\alpha - 1} - x^{\alpha} \leq \frac{df}{dx} \leq \alpha\, x^{\alpha - 1} + x^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 0} \left[-\alpha\, x^{\alpha - 1} - x^{\alpha} \right] \leq \lim_{x \to 0} \frac{df}{dx} \leq \lim_{x \to 0} \left[\alpha\, x^{\alpha - 1} + x^{\alpha} \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \lim_{x \to 0} \frac{df}{dx} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{df}{dx} = 0$$

1.2

1. $$F(x) = \int dx\ x^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha + 1}\, x^{\alpha + 1} + C \qquad , \quad C \in \mathbb{K}$$

2. $$F(x) = \int dx\ \underbrace{x^2}_{:\int}\ \underbrace{cos\ x}_{:\frac{d}{dx}}$$

$$= x^2 \int dx\ cos\ x - \int dx \left(\frac{d}{dx}\, x^2\right)\left(\int dx\ cos\ x\right)$$

$$= x^2\ sin\ x - 2 \int dx\ \underbrace{x}_{:\int}\ \underbrace{sin\ x}_{:\frac{d}{dx}}$$

$$= x^2\ sin\ x - 2\left(x \int dx\ sin\ x - \int dx \left(\frac{d}{dx}\, x\right)\left(\int dx\ sin\ x\right)\right)$$

$$= x^2\ sin\ x - 2\left(x\ (-cos\ x) - \int dx\ 1\ (-cos\ x)\right)$$

$$= x^2\ sin\ x - 2\ (-x\ cos\ x + sin\ x)$$

c) i)

$$L(x) + L(y) = L(xy)$$

$$\stackrel{1}{\Rightarrow} \quad \frac{d}{dx} L(x) + \frac{d}{dx} L(y) = \frac{d}{dx} L(xy)$$

$$\stackrel{2}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{x} + 0 = \left(\frac{d}{d\ (xy)} L(xy) \right) \left(\frac{d}{dx} xy \right)$$

$$\stackrel{3}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{xy}\ 1\ y$$

$$\stackrel{4}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

■

Dies zeigt die Äquivalenz. Um etwas direkter von $L(x) + L(y)$ nach $L(xy)$ (oder umgekehrt) zu kommen, hilft die in diesem Beweis verwendete Ableitungsregel in einer Gleichungskette ...

Herleitung:

$$
\begin{aligned}
L(x) + L(y) &= L(x) + C \qquad , \ C = L(y) \in \mathbb{K} \\
&= \int dx \ \frac{d}{dx} \ L(x) \\
&= \int dx \ \frac{1}{x} \\
&= \int dx \ \frac{1}{x} \ 1 \\
&= \int dx \ \frac{1}{x} \ \frac{y}{y} \\
&= \int dx \ \frac{1}{xy} \ y \\
&= \int dx \ \left(\frac{d}{d\ (xy)} \ L(xy) \right) \left(\frac{d}{dx} \ xy \right) \\
&= \int dx \ \frac{d}{dx} \ L(xy) \\
&= L(xy) + C \qquad , \ C := 0 \in \mathbb{K} \\
&= L(xy)
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

c) ii)

$$L(x^\alpha) \;=\; \alpha\, L(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\, L(x^\alpha) \;=\; \frac{d}{dx}\, \alpha\, L(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\ (x^\alpha)}\, L(x^\alpha)\, \frac{d}{dx}\, x^\alpha \;=\; \alpha\, \frac{d}{dx}\, L(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^\alpha}\, \alpha\, x^{\alpha\, -\, 1} \;=\; \alpha\, \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha\, \frac{1}{x} \;=\; \alpha\, \frac{1}{x}$$

■

Dies zeigt die Äquivalenz. Um etwas direkter von $L(x^\alpha)$ nach $\alpha\, L(x)$ (oder umgekehrt) zu kommen, hilft die in diesem Beweis verwendete Ableitungsregel in einer Gleichungskette ...

$$
\begin{aligned}
L(x^\alpha) &= \int dx \, \frac{d}{dx} \, L(x^\alpha) \\
&= \int dx \, \frac{d}{d\,(x^\alpha)} \, L(x^\alpha) \, \frac{d}{dx} \, x^\alpha \\
&= \int dx \, \frac{1}{x^\alpha} \, \alpha \, x^{\alpha \,-\, 1} \\
&= \alpha \int dx \, \frac{1}{x} \\
&= \alpha \int dx \, \frac{d}{dx} \, L(x) \\
&= \alpha \, L(x) \, + \, C \qquad , \quad C \, := \, 0 \, \in \, \mathbb{K} \\
&= a \, L(x)
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

c) iii)

Spielchen: Finde mindestens zwei Fehler in ...

$$\frac{df^{-1}}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dy}}$$

$$\stackrel{1}{\Rightarrow} \frac{df^{-1}}{dy} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\ f(x)}$$

$$\stackrel{2}{\Rightarrow} \frac{df^{-1}}{dy} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\ y}$$

$$\stackrel{3}{\Rightarrow} \frac{d}{dy}\ f^{-1}(y) = 1$$

$$\stackrel{4}{\Rightarrow} \frac{d}{dy}\ x = 1$$

$$\stackrel{5}{\Rightarrow} 0 = 1$$

<u>Fehler:</u>

1. Gleichung falsch übernommen.

2. In ^{4} sind x und y abhängig, y ist ja als Funktion von x definiert, $y = f(x)$. Die Abhängigkeit hilft in einem richtigen Beweis ...

$$\frac{df^{-1}}{dy} \quad = \quad \frac{1}{\frac{df}{dx}}$$

$$\stackrel{1}{\Rightarrow} \qquad \frac{d}{dy}\ f^{-}1(y) \quad = \quad \frac{1}{\frac{d}{dx}\ f(x)}$$

$$\stackrel{2}{\Rightarrow} \qquad \left(\frac{d}{dy}\ f^{-}1(y)\right)\ \left(\frac{d}{dx}\ f(x)\right) \quad = \quad 1$$

$$\stackrel{3}{\Rightarrow} \qquad \frac{d}{dx}\ f^{-}1\,(\ f(x)\ ) \quad = \quad 1$$

$$\stackrel{4}{\Rightarrow} \qquad \frac{d}{dx}\ x \quad = \quad 1$$

$$\stackrel{5}{\Rightarrow} \qquad 1 \quad = \quad 1$$

$\blacksquare$

Dies zeigt die Äquivalenz. Um etwas direkter von $\frac{df^{-1}}{dy}$ nach $\frac{1}{\frac{df}{dx}}$ zu kommen, oder umgekehrt, hilft das neutrale Produkt und der neutrale Quotient 1 , unter der gegebenen Bedingung, dass $\frac{df}{dx} \neq 0$ ...

$$
\begin{aligned}
\frac{df^{-1}}{dy} &= \frac{d}{dy}\ f^{-1}(y) \\[2ex]
&= \frac{d}{dy}\ f^{-1}(y)\ 1 \\[2ex]
&= \left(\frac{d}{dy}\ f^{-1}(y)\right)\ \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dx}} \\[2ex]
&= \frac{\left(\frac{d}{dy}\ f^{-1}(y)\right)\ \frac{df}{dx}}{\frac{df}{dx}} \\[2ex]
&= \frac{\left(\frac{d}{dy}\ f^{-1}(y)\right)\ \left(\frac{d}{dx}\ f(x)\right)}{\frac{df}{dx}} \\[2ex]
&= \frac{\frac{d}{dx}\ f^{-1}\left(\ f(x)\ \right)}{\frac{df}{dx}} \\[2ex]
&= \frac{\frac{d}{dx}\ x}{\frac{df}{dx}} \\[2ex]
&= \frac{1}{\frac{df}{dx}}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

c) iv)

$$\begin{aligned}
\frac{dL^{-1}}{dy} &= \frac{1}{\frac{dL}{dx}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{x}} \\
&= x \\
&= L^{-1}(\ L(x)\ ) \\
&= L^{-1}(y)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

2

Fragen zu den Aufgaben oder Allgemeinem:

1. Was sind die Stammfunktionen von $\frac{1}{x}$?

   - $\int dy \, \frac{1}{x} \quad = \quad ln \; |x| \; + \; C \qquad , \quad C \; \in \; \mathbb{K}$

2. Welche Beziehung gilt bei genau einer beliebigen stetigen Funktion die keine Nullstellen hat zwischen Vorzeichen von (mindestens zwei) ihrer beliebigen Parametrisierungen?

   - Sei $\underline{\mathrm{sf}}(x)$ die beschriebene stetige Funktion und seien $\underline{\mathrm{sf}}\,(\; p_{\;i} \;)$ Parametrisierungen mit $i \; \in \; \{i_1, \; i_2\} \subset \; \mathbb{N}$. So gilt:

     $sgn \;\; \underline{\mathrm{sf}}\,(\; p_{\;i_1} \;) \quad = \quad sgn \;\; \underline{\mathrm{sf}}\,(\; p_{\;i_2} \;) \quad .$

3. Was ist zu tun, wenn in der Aufgabe steht: “ *Drücken Sie* F_1 *durch* F_2 *aus.* ” ?

   - Eine Gleichung ... F_2 ... $=$ ... in die Form $F_1 \;=\;$ ... F_2 ... bringen.

4. Warum ist $ln\ |x|$ die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$?

    - (TODO: Antwort)

5. Ist dieser Beweis richtig ...

Behauptung: $F(x)$ ist eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)\, y(x)$.

$$(*) \ := \ \begin{cases} F(x) & := \ \int_{x_0}^{x_1} dx\ f(x) \\ \\ y(x) & := \ F(x) \end{cases}$$

$$(*) \ \Rightarrow \ \int_{x_0}^{x_1} dx\ \frac{1}{y(x)}\ \frac{dy}{dx} \ = \ \int_{x_0}^{x_1} dx\ f(x)$$

$$\Leftrightarrow \ \int_{x_0}^{x_1} dx\ \frac{1}{F(x)}\ \frac{dF}{dx} \ = \ F(x)$$

$$\Leftrightarrow \ \int_{x_0}^{x_1} dx\ \frac{1}{F(x)}\ f(x) \ = \ F(x)$$

$$\Leftrightarrow \ \int_{x_0}^{x_1} dx\ \frac{1}{F(x)}\ f(x) \ = \ \int_{x_0}^{x_1} dx\ f(x)$$

$$\Leftrightarrow \ \int_{x_0}^{x_1} dx\ \frac{1}{F(x)}\ f(x) \ = \ \int_{x_0}^{x_1} dx\ 1\ f(x)$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{1}{F(x)} \ = \ 1$$

$$\Leftrightarrow \ F(x) \ = \ 1$$

$$\Leftrightarrow \ y(x) \ = \ 1$$

Probe: $y(x) \;=\; 1 \quad :$

$$\frac{d}{dx}\, y(x) \quad = \quad f(x)\; y(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\, 1 \quad = \quad f(x)\; 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \quad = \quad f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad wahr$$

...?

- (TODO: Antwort)

2.1

a)

Forderung: Anwendung von partieller Integration.

Bekannt: $\frac{d}{dy}\, e^y \;=\; e^y.$

$$
\begin{aligned}
I_0(x) \;&=\; \int_0^x dy\; y^0\; e^y \\
&=\; \int_0^x dy\; 1\; e^y \\
&=\; \int_0^x dy\; \underbrace{1}_{\int}\; \underbrace{e^y}_{\frac{d}{dy}} \\
&=\; \left[\, 1\, \left(\frac{d}{dy}\, e^y\right) \right]_0^x \;-\; \int_0^x dy\, \left(\frac{d}{dy}\, 1\right)\; e^y \\
&=\; [\; e^y\;]_0^x \;-\; \int_0^x dy\; 0\; e^y \\
&=\; e^x \;-\; e^0 \;-\; \int_0^x dy\; 0 \\
&=\; e^x \;-\; 1 \;-\; 0 \\
&=\; e^x \;-\; 1
\end{aligned}
$$

b)

$$I_n(x) \;=\; \int_0^x \; dy \; y^n \; e^y \quad \xLeftrightarrow{\text{Partielle Integration}} \quad \int_0^x \; dy \; y^{\;n\;-\;1} \; e^y \;=\; I_{\;(n\;-\;1)}(x)$$

$$\begin{aligned}
I_n(x) \;&=\; \int_0^x \; dy \; \underbrace{y^n}_{\int} \; \underbrace{e^y}_{\frac{d}{dy}} \\
&=\; \left[y^n \; \left(\frac{d}{dy} \; e^y \right) \right]_0^x \;-\; \int_0^x \; dy \; \left(\frac{d}{dy} \; y^n \right) \; e^y \\
&=\; [\; y^n \; e^y \;]_0^x \;-\; \int_0^x \; dy \; n \; y^{\;n\;-\;1} \; e^y \\
&=\; x^n \; e^x \;-\; 0 \;... \;-\; n \; \underbrace{\int_0^x \; dy \; y^{\;n\;-\;1} \; e^y}_{I_{\;(n\;-\;1)}\;(x)} \\
&=\; x^n \; e^x \;-\; n \; I_{\;(n\;-\;1)} \; (x)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
I_1(x) \;&=\; x \; e^x \;-\; 1 \; I_{\;(1\;-\;1)} \; (x) \\
&=\; x \; e^x \;-\; I_0(x) \\
&=\; x \; e^x \;-\; I_0(x) \\
&=\; x \; e^x \;-\; (e^x \;-\; 1) \\
&=\; x \; e^x \;-\; e^x \;+\; 1 \\
&=\; (x \;-1) \; e^x \;+\; 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2(x) &= x^2\, e^x \; - \; 2\, I_{\,(2\;-\;1)}\,(x) \\
&= x^2\, e^x \; - \; 2\, I_1(x) \\
&= x^2\, e^x \; - \; 2\; (\;(x\; - 1)\; e^x \; + \; 1\;) \\
&= x^2\, e^x \; - \; 2\; (x\; - 1)\; e^x \; - \; 2 \\
&= \big(\, x^2 \; - \; 2\; (x\; - 1)\,\big)\; e^x \; - \; 2 \\
&= \big(\, x^2 \; - \; 2\, x\; + 2\,\big)\; e^x \; - \; 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3(x) &= x^3\, e^x \; - \; 3\, I_{\,(3\;-\;1)}\,(x) \\
&= x^3\, e^x \; - \; 3\, I_2(x) \\
&= x^3\, e^x \; - \; 3\; \big(\,\big(\, x^2 \; - \; 2\, x\; + 2\,\big)\; e^x \; - \; 2\,\big) \\
&= x^3\, e^x \; - \; 3\; \big(\, x^2 \; - \; 2\, x\; + 2\,\big)\; e^x \; + \; 6 \\
&= \big(\, x^3 \; - \; 3\; \big(\, x^2 \; - \; 2\, x\; + 2\,\big)\,\big)\; e^x \; + \; 6 \\
&= \big(\, x^3 \; - \; 3\, x^2 \; + \; 6\, x\; - 6\,\big)\; e^x \; + \; 6
\end{aligned}
$$

d) Nach Aufgabe c) ist bereits ein Teilmuster: $I_n(x) = (\dots) \, e^x + (-1)^{\cdots} \, n!$ zu vermuten.

Pochhammer-Symbol:

$$(a)_0 := 1$$

$$(a)_n := a \, (a + 1) \, (a + 2) \dots (a + n - 1)$$

$$(a)_1 = a$$

$$(a)_2 = a \, (a + 1)$$

$$(a)_3 = a \, (a + 1) \, (a + 2)$$

$$(a)_4 = a \, (a + 1) \, (a + 2) \, (a + 3)$$

...

D.h. wir brauchen einen Index (z.B. von einem Summen-, Produkt- oder einem anderen -Zeichen mit Index). Stellt sich die Frage: Wie können wir $I_n(x)$ als Summe schreiben? Probieren wir die Beispiele $I_0, \; I_1, \; I_2, \; I_3$ so zu schreiben, dass sich vielleicht ein Muster zeigt ...

$$\left(\sum_{k = 1}^{\cdots} \dots \right) e^x + (-1)^{\cdots} \, n!$$

$$
\begin{aligned}
I_0(x) &= e^x - 1 \\
&= \big(1\, x^0 \big)\, e^x - 1 \\
&= \big((-0)_0\, x^{\,1-1} \big)\, e^x + (-1)^{\,0+1}\, 0!
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1(x) &= (x - 1)\, e^x + 1 \\
&= \big(x^1 - 1\, x^0 \big)\, e^x + (1)\, 1 \\
&= \big((-1)_0\, x^{\,2-1} + (-1)_1\, x^{\,1-1} \big)\, e^x + (-1)^{\,1+1}\, 1!
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2(x) &= \big(x^2 - 2\, x + 2 \big)\, e^x - 2 \\
&= \big(x^2 - 2\, x^1 + 2\, x^0 \big)\, e^x + (-1)\, 2 \\
&= \big((-2)_0\, x^{\,3-1} + (-2)_1\, x^{\,2-1} + (-2)_2\, x^{\,1-1} \big)\, e^x + (-1)^{\,2+1}\, 2!
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3(x) &= \big(x^3 - 3\, x^2 + 6\, x - 6 \big)\, e^x + (1)\, 6 \\
&= \big(x^3 - 3\, x^2 + 6\, x^1 - 6\, x^0 \big)\, e^x + (1)\, 6 \\
&= \big((-3)_0\, x^{\,4-1} + (-3)_1\, x^{\,3-1} + (-3)_2\, x^{\,2-1} + (-3)_3\, x^{\,1-1} \big) \\
&\quad \cdot\, e^x + (-1)^{\,3+1}\, 3!
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4(x) &= x^4\ e^x\ -\ 4\ I_{\,4-1}\ (x) \\
&= x^4\ e^x\ -\ 4\ I_3(x) \\
&= x^4\ e^x\ -\ 4\ \big(\ x^3\ -\ 3\ x^2\ +\ 6\ x\ -6\ \big) \\
&= x^4\ e^x\ -\ 4\ \big(\ \big(\ x^3\ -\ 3\ x^2\ +\ 6\ x\ -6\ \big)\ e^x\ -\ 6\ \big) \\
&= x^4\ e^x\ -\ 4\ \big(\ x^3\ -\ 3\ x^2\ +\ 6\ x\ -6\ \big)\ e^x\ +\ 24 \\
&= \big(\ x^4\ -\ 4\ \big(\ x^3\ -\ 3\ x^2\ +\ 6\ x\ -6\ \big)\ \big)\ e^x\ +\ 24 \\
&= \big(\ x^4\ -\ 4\ x^3\ -\ 12\ x^2\ -\ 24\ x\ +24\ \big)\ e^x\ +\ 24 \\
&= \big(\ x^4\ -\ 4\ x^3\ -\ 12\ x^2\ -\ 24\ x^1\ +24\ x^0\ \big)\ e^x\ +\ 24
\end{aligned}
$$

Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; I_{(n-1)}(x) = e^x \sum_{k=1}^{n} (-n+1)_{(n-k)} \, x^{k-1} + (-1)^n (n-1)!$$

Beweis durch vollständige Induktion.

Hinweis: Ich werde den Beweis ohne Voraussetzungen führen. Denn, wer ihn oder die Eigenschaften des *Pochhammer-Symbols* kennt, wird vielleicht *tricksen*.

I.A.:

$n = 1$: $\quad I_{(1-1)}(x)$

$$= I_0(x)$$

$$= e^x - 1$$

$$\stackrel{?}{=} e^x \sum_{k=1}^{1} (-1+1)_{(1-k)} \, x^{k-1} + (-1)^1 (1-1)!$$

$$= e^x \, (0)_{(0)} \, x^0 - 0!$$

$$= e^x - 1$$

$\square$

$$n = 2: \qquad I_{(2-1)}(x)$$

$$= I_1(x)$$

$$= (-1 + x)\, e^x + 1$$

$$\stackrel{?}{=} e^x \sum_{k=1}^{2} (-2+1)_{(2-k)}\, x^{k-1} + (-1)^2 (2-1)!$$

$$= e^x \sum_{k=1}^{2} (-1)_{(2-k)}\, x^{k-1} + 1!$$

$$= e^x \Big((-1)_{(2-1)}\, x^{1-1} + (-1)_{(2-2)}\, x^{2-1} \Big) + 1$$

$$= e^x \Big((-1)_{(1)}\, x^{0} + (-1)_{(0)}\, x^{1} \Big) + 1$$

$$= e^x (-1 + x) + 1$$

$\square$

I.H.:

$$\exists n \in \mathbb{N}: \; I_{(n-1)}(x) = e^x \sum_{k=1}^{n} (-n+1)_{(n-k)}\, x^{k-1} + (-1)^n (n-1)!$$

I.S.:

$$I_{(\,(n+1)-1\,)}(x) = e^x \sum_{k=1}^{n+1} \left(-(n+1)+1 \right)_{(\,(n+1)-k\,)} x^{k-1}$$

$$+ (-1)^{(n+1)} \left((n+1) - 1 \right)!$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \qquad I_n(x) = e^x \sum_{k=1}^{n+1} (-n)_{(\,n+1-k\,)} x^{k-1}$$

$$+ (-1)^{(n+1)} n!$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} \qquad x^n e^x - n\, I_{(n-1)}(x) = e^x \sum_{k=1}^{n+1} (-n)_{(\,n+1-k\,)} x^{k-1}$$

$$+ (-1)^{(n+1)} n!$$

$$\overset{3}{\Rightarrow} \qquad 0 = e^x \sum_{k=1}^{n+1} (-n)_{(\,n+1-k\,)} x^{k-1}$$

$$- x^n e^x + n\, I_{(n-1)}(x)$$

$$+ (-1)^{(n+1)} n!$$

$$\overset{4}{\Rightarrow} \quad 0 = e^x \left((-(n + 1))_{(n + 1 -(n + 1))} + \sum_{k = 1}^{n} (-n)_{(n + 1 - k)} x^{k - 1} \right)$$

$$- x^n e^x + n I_{(n - 1)} (x)$$

$$+ (-1)^{(n + 1)} n!$$

$$\overset{5}{\Rightarrow} \quad 0 = e^x \left(x^n + \sum_{k = 1}^{n} (-n)_{(n + 1 - k)} x^{k - 1} \right)$$

$$- x^n e^x + n I_{(n - 1)} (x)$$

$$+ (-1)^{(n + 1)} n!$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} \quad 0 = e^x x^n + e^x \sum_{k = 1}^{n} (-n)_{(n + 1 - k)} x^{k - 1}$$

$$- x^n e^x + n I_{(n - 1)} (x)$$

$$+ (-1)^{(n + 1)} n!$$

$$\overset{7}{\Rightarrow} \quad 0 = e^x \sum_{k = 1}^{n} (-n)_{(n + 1 - k)} x^{k - 1}$$

$$+ n I_{(n - 1)} (x)$$

$$+ (-1)^{(n + 1)} n!$$

$$\overset{8}{\Rightarrow} \quad 0 = e^x \sum_{k=1}^{n} (-n)_{(n+1-k)} \, x^{k-1}$$

$$+ \, n \left(e^x \sum_{k=1}^{n} (-n+1)_{(n-k)} \, x^{k-1} + (-1)^n (n-1)! \right)$$

$$+ \, (-1)^{(n+1)} \, n!$$

$$\overset{9}{\Rightarrow} \quad 0 = e^x \sum_{k=1}^{n} (-n)_{(n+1-k)} \, x^{k-1}$$

$$+ \, e^x \sum_{k=1}^{n} n \, (-n+1)_{(n-k)} \, x^{k-1} + (-1)^n (n-1)! \, n$$

$$+ \, (-1)^{(n+1)} \, n!$$

$$\overset{10}{\Rightarrow} \quad 0 = e^x \sum_{k=1}^{n} (-n)_{(n+1-k)} \, x^{k-1}$$

$$+ \, e^x \sum_{k=1}^{n} n \, (-n+1)_{(n-k)} \, x^{k-1} + (-1)^n \, n!$$

$$+ \, (-1)^{(n+1)} \, n!$$

$$\overset{11}{\Rightarrow} \quad 0 = e^x \sum_{k=1}^{n} (-n)_{(n+1-k)} \, x^{k-1}$$

$$+ \, e^x \sum_{k=1}^{n} n \, (-n+1)_{(n-k)} \, x^{k-1} + (-1)(-1)^{(n-1)} \, n!$$

$$+ \, (-1)^{(n+1)} \, n!$$

$$\overset{12}{\Rightarrow} \quad 0 = e^x \sum_{k=1}^{n} (-n)_{(n+1-k)}\, x^{k-1} + e^x \sum_{k=1}^{n} n\, (-n+1)_{(n-k)}\, x^{k-1}$$

$$\overset{13}{\Rightarrow} \quad 0 = e^x \left(\sum_{k=1}^{n} (-n)_{(n+1-k)}\, x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} n\, (-n+1)_{(n-k)}\, x^{k-1} \right)$$

$$\overset{14}{\Rightarrow} \quad 0 = e^x \left(\sum_{k=1}^{n} (-n)_{(n+1-k)}\, x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(-n)\, (-n+1)_{(n-k)}}_{?}\, x^{k-1} \right)$$

$$\overset{15}{\Rightarrow} \quad 0 = e^x \left(\sum_{k=1}^{n} (-n)_{(n+1-k)}\, x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} (-n)_{(n+1-k)}\, x^{k-1} \right)$$

$$\overset{16}{\Rightarrow} \quad 0 = 0$$

Bemerkung:

$$(-n)\, (-n+1)_{(n-k)} = (-n)_{(n+1-k)}$$

$$\overset{1}{\Leftrightarrow} \quad -n \prod_{i=0}^{n-k-1} -n+1+i = \prod_{i=0}^{n-k-1+1=n-k} -n+i$$

■

Übrigens: Das Pochhammersymbol wird 0, sobald der Index vom Argument abhängt, diesen um mindestens 1 übersteigt und die Vorzeichen unterschiedlich sind, ist eine 0 im Produkt. Wenn es das noch nicht gibt, könnte man dazu Pochhammer-Null sagen.

Notiz/Gedanken: Hier zeigt sich wieder einmal die Gefahr der Pünktchen- und Kurzschreibweisen. Vielleicht vom Aufgabensteller gut gemeint, oder frech (?) ist die Beschreibung des Pochhammer-Symbols. Zunächst denkt man nicht weiter darüber nach, als sich in etwa Vorzustellen, wie die endlichen Produkte aussehen. Am Ende der Induktion bemerkt man, dass sich der Beweis nicht sauber lösen lässt, wenn man sich nicht eine saubere Definition des Pochhammer-Symbols überlegt und zeigt, dass die Differenz 0 ergibt. Man hat gar nichts von der Kurzschreibweise, da man im letzten Schritt genauso viel Zeit verbraucht darüber nachzudenken, wie wenn man gleich ein Produktzeichen eingeführt hätte! Im allgemeinen lohnen sich natürlich Kurzschreibweisen, nur hier in der Aufgabe eben nicht. Was ja auch Teil der Aufgabe gewesen sein kann.

2.2

a)
$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} dx\ f(x) &= \int_{x_0}^{x_1} dx\ \frac{1}{y(x)}\ \frac{dy}{dx} \\
&= \Big\{\ u\ :=\ y(x) \quad : \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx\ \frac{1}{u}\ \frac{du}{dx} \\
&= \Big\{\ du\ =\ dx\ \tfrac{du}{dx} \quad : \qquad \int_{x_0}^{x_1} du\ \frac{1}{u} \\
&= \big[ln\ \mid u \mid\big]_{y(x_0)}^{y(x_1)} \\
&= ln\ \mid y(x_1) \mid\ -\ ln\ \mid y(x_0) \mid \\
&= ln\ \frac{\mid y(x_1) \mid}{\mid y(x_0) \mid} \qquad ,\ \ \text{da}\ \ y(x_0)\ \neq\ 0 \\
&= ln\ \left| \frac{y(x_1)}{y(x_0)} \right| \\
&= \Big\{\ sgn\ \ y(x_0)\ =\ sgn\ \ y(x_1) \quad \Rightarrow \qquad ln\ \frac{y(x_1)}{y(x_0)}
\end{aligned}
$$

b) $$\int_{x_0}^{x_1} f(x) \quad = \quad ln \; \frac{y\,(x_1)}{y\,(x_0)}$$

$$\stackrel{1}{\Rightarrow} \quad F\,(x)\,|_{x_0}^{x_1} \quad = \quad ln \; \frac{y\,(x_1)}{y\,(x_0)}$$

$$\stackrel{2}{\Rightarrow} \quad F(x_1) \; - \; F(x_0) \quad = \quad ln \; \frac{y\,(x_1)}{y\,(x_0)}$$

$$\stackrel{3}{\Rightarrow} \quad e^{\;F(x_1) \; - \; F(x_0)} \quad = \quad e^{\;ln \; \frac{y(x_1)}{y(x_0)}}$$

$$\stackrel{4}{\Rightarrow} \quad e^{\;F(x_1) \; - \; F(x_0)} \quad = \quad \frac{y\,(x_1)}{y\,(x_0)}$$

$$\stackrel{5}{\Rightarrow} \quad y\,(x_0) \;\; e^{\;F(x_1) \; - \; F(x_0)} \quad = \quad y\,(x_1)$$

1, **2** Definition: bestimmtes Integral.

3, **4** Anwendung: Exponentialfunktion.

5 $y\,(x_0)$ nach links.

6 ...?

c) $\quad y(x) = 0 \quad : \quad \frac{d}{dy} 0 = \lambda \, x^{\alpha} \, 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \, x^{\alpha} \, y(x)$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \left\{ y(x) \neq 0 \quad : \qquad \frac{dy}{dx} \frac{1}{y(x)} = \lambda \, x^{\alpha} \right.$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} \int dx \, \frac{dy}{dx} \frac{1}{y(x)} = \lambda \int dx \, x^{\alpha}$$

$$\overset{3}{\Rightarrow} \left\{ u := y(x) \quad : \qquad \int dx \, \frac{du}{dx} \frac{1}{u} = \lambda \int dx \, x^{\alpha} \right.$$

$$\overset{4}{\Rightarrow} \left\{ du = dx \, \tfrac{du}{dx} \quad : \qquad \int du \, \frac{1}{u} = \lambda \int dx \, x^{\alpha} \right.$$

$$\overset{5}{\Rightarrow} \; ln \mid u \mid + C_1 = \lambda \int dx \, x^{\alpha} \qquad , \; C_1 \in \mathbb{K}$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} \; ln \mid y(x) \mid + C_1 = \lambda \int dx \, x^{\alpha}$$

$$\overset{7}{\Rightarrow} \; ln \mid y(x) \mid + C_1 = \lambda \left(\frac{x^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} + C_2 \right) \qquad , \; C_2 \in \mathbb{K} \; , \; \alpha \neq -1$$

$$\overset{8}{\Rightarrow} \; ln \mid y(x) \mid = \lambda \frac{x^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} + \lambda \, C_2 - C_1$$

$$\overset{9}{\Rightarrow} \left\{ C_{(1)}(\lambda) := \lambda \, C_2 - C_1 \in \mathbb{K} \quad : \qquad ln \mid y(x) \mid = \lambda \frac{x^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} + C_{(1)}(\lambda) \right.$$

$$\overset{10}{\Rightarrow} \; e^{\, ln \mid y(x) \mid} = e^{\lambda \, \frac{x^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} + C_{(1)}(\lambda)}$$

$$\overset{11}{\Rightarrow} \; \mid y(x) \mid = e^{\, \lambda \, \frac{x^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} + C_{(1)}(\lambda)}$$

$$\overset{12}{\Rightarrow} \quad y(x) \;=\; \pm\, e^{\,\lambda\, \frac{x^{\alpha \,+\, 1}}{\alpha \,+\, 1} \,+\, C_{(1)}(\lambda)}$$

$$\overset{13}{\Rightarrow} \quad y(x) \;=\; \pm\, e^{\,\lambda\, \frac{x^{\alpha \,+\, 1}}{\alpha \,+\, 1}} \; e^{C_{(1)}(\lambda)}$$

$$\overset{14}{\Rightarrow} \quad \Big\{\; C_{(2)}(\lambda) \;:=\; e^{C_{(1)}(\lambda)} \quad \in\; \mathbb{K} \quad : \qquad y(x) \;=\; \pm\, e^{\,\lambda\, \frac{x^{\alpha \,+\, 1}}{\alpha \,+\, 1}} \; C_{(2)}(\lambda)$$

$$\overset{15}{\Rightarrow} \quad y(x) \;=\; \pm\, C_{(2)}(\lambda)\; e^{\,\lambda\, \frac{x^{\alpha \,+\, 1}}{\alpha \,+\, 1}}$$

$$\overset{16}{\Rightarrow} \quad \Big\{\; \alpha \;=\; -1 \quad : \qquad ln\; |\; y(x)\; | \;+\; C_1 \;=\; \lambda \int dx\; \frac{1}{x}$$

$$\overset{17}{\Rightarrow} \quad \Big\{\; x \;>\; 0 \quad : \qquad ln\; |\; y(x)\; | \;+\; C_1 \;=\; \lambda\; (\; ln\; x \;+\; C_3\;) \qquad ,\;\; C_3 \;\in\; \mathbb{K}$$

$$\overset{18}{\Rightarrow} \quad ln\; |\; y(x)\; | \;+\; C_1 \;=\; \lambda\;\; ln\; x \;+\; \lambda\, C_3$$

$$\overset{19}{\Rightarrow} \quad ln\; |\; y(x)\; | \;=\; \lambda\;\; ln\; x \;+\; \lambda\, C_3 \;-\; C_1$$

$$\overset{20}{\Rightarrow} \quad \Big\{\; C_{(3)}(\lambda) \;:=\; \lambda\, C_3 \;-\; C_1 \quad \in\; \mathbb{K} \quad : \qquad ln\; |\; y(x)\; | \;=\; \lambda\;\; ln\; x \;+\; C_{(3)}(\lambda)$$

$$\overset{21}{\Rightarrow} \quad e^{\,ln\; |\; y(x)\; |} \;=\; e^{\,\lambda\;\; ln\; x \;+\; C_{(3)}(\lambda)}$$

$$\overset{22}{\Rightarrow} \quad |\; y(x)\; | \;=\; e^{\,\lambda\;\; ln\; x \;+\; C_{(3)}(\lambda)}$$

$$\overset{23}{\Rightarrow} \quad y(x) \;=\; \pm\, e^{\,\lambda\;\; ln\; x \;+\; C_{(3)}(\lambda)}$$

$$\overset{24}{\Rightarrow} \quad y(x) \;=\; \pm\, e^{\,\lambda\;\; ln\; x}\; e^{\,C_{(3)}(\lambda)}$$

$$\overset{25}{\Rightarrow} \quad y(x) \;=\; \pm\, x^{\,\lambda}\; e^{\,C_{(3)}(\lambda)}$$

$$\overset{26}{\Rightarrow} \quad \Big\{\; C_{(4)}(\lambda) \;:=\; e^{\,C_{(3)}(\lambda)} \quad \in\; \mathbb{K} \quad : \qquad y(x) \;=\; \pm\, x^{\,\lambda}\, C_{(4)}(\lambda)$$

$$\overset{27}{\Rightarrow} \quad y(x) \;=\; \pm\, C_{(4)}(\lambda)\; x^{\,\lambda}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} \;=\; \lambda\, x^{\alpha}\, y(x)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} y\,(x) \;\neq\; 0 \;:\;\; y\,(x) \;=\; \begin{cases} \alpha \;\neq\; 0 \;:\;\; \pm\, C\, e^{\,\lambda\, \frac{x^{\alpha \,+\, 1}}{\alpha \,+\, 1}} \\[2ex] \alpha \;=\; 0 \;:\;\; \pm\, C\, x^{\,\lambda} \end{cases} \qquad\qquad , \;\; C \;\in\; \mathbb{K} \\[6ex] y\,(x) \;=\; 0 \end{cases}$$

Hinweis: Konstanten in Zukunft ohne Abhängigkeiten schreiben (unsauber, schneller, eigtl. will man ja auch nicht mehr, als auszudrücken, dass da eine Körperkonstante gewählt werden darf). TODO: Gilt die Rückrichtung?

(TODO: Proben)

1 Trennung der Variablen $y(x)$ und x.

2 ...

Ich lasse hier $\frac{dy}{dx}$ so stehen und schreibe nicht $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\, y(x)$ aus.
Diese Kurzschreibweise lohnt sich. Gibt es Fälle, wo es nicht so ist?

Um die Merkregel der Integral-Substitution gleich sehen zu können, ist es besser, beim Trennen der Symbole y und x den Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ neben dx des Integrals für die später folgende Integration zu schreiben. Daher: Variable, hier $\frac{1}{y(x)}$ gleich von rechts dran multiplizieren. Stimmt das immer?

d) $y(x) \; = \; 0 \quad : \quad \frac{d}{dy} \, 0 \; = \; exp(\alpha \; x) \; 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \; = \; 0$

$$\frac{dy}{dx} \; = \; exp(\alpha \; x) \; y(x)$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \; \Big\{ \; y(x) \; \neq \; 0 \quad : \qquad \frac{dy}{dx} \, \frac{1}{y(x)} \; = \; e^{\; \alpha \; x}$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} \; \int dx \; \frac{dy}{dx} \, \frac{1}{y(x)} \; = \; \int dx \; e^{\; \alpha \; x}$$

$$\overset{3}{\Rightarrow} \; \Big\{ \; u \; := \; y(x) \quad : \qquad \int dx \; \frac{du}{dx} \, \frac{1}{u} \; = \; \int dx \; e^{\; \alpha \; x}$$

$$\overset{4}{\Rightarrow} \; \Big\{ \; du \; = \; dx \; \tfrac{du}{dx} \quad : \qquad \int du \; \frac{1}{u} \; = \; \int dx \; e^{\; \alpha \; x}$$

$$\overset{5}{\Rightarrow} \; ln| \; u \; | \; + \; C_1 \; = \; \int dx \; e^{\; \alpha \; x} \qquad , \; C_1 \; \in \; \mathbb{K}$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} \; \Big\{ \; \alpha \; \neq \; 0 \quad : \qquad ln| \; y(x) \; | \; + \; C_1 \; = \; \frac{e^{\; \alpha \; x}}{\alpha} \; + \; \frac{C_2}{\alpha} \qquad , \; C_2 \; \in \; \mathbb{K}$$

$$\overset{7}{\Rightarrow} \; ln| \; y(x) \; | \; = \; \frac{e^{\; \alpha \; x}}{\alpha} \; + \; \frac{C_2}{\alpha} \; - \; C_1$$

$$\overset{8}{\Rightarrow} \; \Big\{ \; C_{(1)} \, (\alpha) \; := \; C_2 \; - \; C_1 \; \in \; \mathbb{K} \quad : \qquad ln| \; y(x) \; | \; = \; \frac{e^{\; \alpha \; x}}{\alpha} \; + \; C_{(1)} \, (\alpha)$$

$$\overset{9}{\Rightarrow} \; e^{\; ln| \; y(x) \; |} \; = \; e^{\; \frac{e^{\; \alpha \; x}}{\alpha} \; + \; C_{(1)}(\alpha)}$$

$$\overset{10}{\Rightarrow} \; | \; y(x) \; | \; = \; e^{\; \frac{e^{\; \alpha \; x}}{\alpha} \; + \; C_{(1)}(\alpha)}$$

$$\overset{11}{\Rightarrow} \; y(x) \; = \; \pm \; e^{\; \frac{e^{\; \alpha \; x}}{\alpha} \; + \; C_{(1)}(\alpha)}$$

$$\overset{12}{\Rightarrow} \quad y(x) \;=\; \pm\, e^{\,\frac{e^{\,\alpha\, x}}{\alpha}}\; e^{\,C_{(1)}(\alpha)}$$

$$\overset{13}{\Rightarrow} \quad \Big\{\; C_{(2)}\,(\alpha) \;:=\; e^{C_{(1)}(\alpha)} \;\in\; \mathbb{K} \quad : \qquad y(x) \;=\; \pm\, e^{\,\frac{e^{\,\alpha\, x}}{\alpha}}\; C_{(2)}\,(\alpha)$$

$$\overset{14}{\Rightarrow} \quad y(x) \;=\; \pm\, C_{(2)}\,(\alpha)\; e^{\,\frac{e^{\,\alpha\, x}}{\alpha}}$$

$$\overset{15}{\Rightarrow} \quad \Big\{\; \alpha \;=\; 0 \quad : \qquad ln\; |\; y(x)\; | \;=\; \int dx\; 1$$

$$\overset{16}{\Rightarrow} \quad ln\; |\; y(x)\; | \;+\; C_1 \;=\; x \;+\; C_3 \qquad ,\; C_3 \;\in\; \mathbb{K}$$

$$\overset{17}{\Rightarrow} \quad ln\; |\; y(x)\; | \;=\; x \;+\; C_3 \;-\; C_1$$

$$\overset{18}{\Rightarrow} \quad \Big\{\; C_4 \;:=\; C_3 \;-\; C_1 \;\in\; \mathbb{K} \quad : \qquad ln\; |\; y(x)\; | \;=\; x \;+\; C_4$$

$$\overset{19}{\Rightarrow} \quad e^{\,ln\; |\; y(x)\; |} \;=\; e^{\,x\; +\; C_4}$$

$$\overset{20}{\Rightarrow} \quad |\; y(x)\; | \;=\; e^{\,x\; +\; C_4}$$

$$\overset{21}{\Rightarrow} \quad y(x) \;=\; \pm\, e^{\,x\; +\; C_4}$$

$$\overset{22}{\Rightarrow} \quad y(x) \;=\; \pm\, e^{\,x}\; e^{\,C_4}$$

$$\overset{23}{\Rightarrow} \quad \Big\{\; C_5 \;:=\; e^{C_4} \;\in\; \mathbb{K} \quad : \qquad y(x) \;=\; \pm\, e^{\,x}\; C_5$$

$$\overset{24}{\Rightarrow} \quad y(x) \;=\; \pm\, C_5\; e^{\,x}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} \;=\; e^{\,\alpha\;x}\; y(x)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} y\,(x) \;\neq\; 0 \;: \quad y\,(x) \;=\; \begin{cases} \alpha \;\neq\; 0 \;: \quad \pm\, C\; e^{\,\frac{e\;\alpha\;x}{\alpha}} \\[2ex] \alpha \;=\; 0 \;: \quad \pm\, C\; e^{\,x} \end{cases} \qquad , \quad C \;\in\; \mathbb{K} \\[6ex] y\,(x) \;=\; 0 \end{cases}$$

1 Trennung der Variablen $y(x)$ und x.

2 ...

(TODO) Probe: $y(x) \;=\; \pm \,...\;\;:$

$$\frac{d}{dx}\, y(x) \;\; ...$$

Notiz: Es macht Sinn, Integrationskonstanten immer so lange wie möglich zu behalten? Ein Teil der Aufgabe(n) hat wohl eindringlich darauf abgezielt, daran zu erinnern, dass beim Integrieren auf Sonderfälle von gegebenen Parametern geachtet werden muss!

3

3.1

a) Eine Ameise befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $x_0 \geq 0$ eines Gummibandes, das bei $x = 0$ eingespannt ist. Die Länge des Gummibandes ist $L(t) = L_0 + v_G\, t$, d.h. es wird mit der (konstanten) Geschwindigkeit v_G gedehnt. Die Ameise läuft mit Geschwindigkeit v_A auf das Ende des Gummibandes zu. Sonstige Parameter, wie z.B. die Lebensdauer der Ameise oder die Zerreißlänge des Gummibandes werden auf ∞ gesetzt.

a) Verifizieren Sie, dass der im Intervall $[t,\, t + dt]$ zurückgelegte Weg der Ameise $dx = v_A\, dt + v_G \frac{x(t)}{L(t)}\, dt$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie $r(t) = \frac{x(t)}{L(t)}$ und drücken Sie $\dot{r}$ durch $L_0,\, v_G$ und v_A aus.

b) Berechnen Sie $r(t)$. Achten Sie dabei auf die Anfangsbedingung $r(0) = \frac{x_0}{L_0}$. Geben Sie die Zeit T an, zu der die Ameise den Endpunkt $x = L$ erreicht hat.

c) ...

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{d}{dt}\,\frac{x(t)}{L(t)} \\
&= \frac{\frac{d}{dt}\,x(t)\;L(t)\;-\;x(t)\;\frac{d}{dt}\;L(t)}{L(t)^2} \\
&= \frac{\dot{x}\;L(t)\;-\;x(t)\;\frac{d}{dt}\;(L_0 + v_G\;t)}{L(t)^2} \\
&= \frac{\dot{x}\;L(t)\;-\;x(t)\;v_G}{L(t)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\Rightarrow} \qquad \dot{r}\;L(t)^2 &= \dot{x}\;L(t)\;-\;x(t)\;v_G \\
\overset{2}{\Rightarrow} \qquad \dot{r}\;L(t)^2\;+\;x(t)\;v_G &= \dot{x}\;L(t) \\
\overset{3}{\Rightarrow} \qquad \dot{r}\;L(t)\;+\;\frac{x(t)}{L(t)}\;v_G &= \dot{x} \\
\overset{4}{\Rightarrow} \qquad \dot{r}\;L(t)\;+\;r(t)\;v_G &= \dot{x} \\
\overset{5}{\Rightarrow} \qquad \dot{r}\;L_0\;+\;\dot{r}\;v_G\;t\;+\;r(t)\;v_G &= \dot{x}
\end{aligned}$$

3.2

a)

$$\frac{1}{\alpha\ v\ +\ \beta\ v^2} \overset{1}{=} \frac{1}{(\alpha\ +\ \beta\ v)\ v}$$

$$\overset{2}{=} \frac{1}{(\alpha\ +\ \beta\ v)\ v}$$

$$\overset{3}{=} \frac{1}{\beta\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\ +\ v\right)\ v} \qquad ,\quad \beta\ \neq\ 0$$

$$\overset{4}{=} \frac{1}{\beta\ \left(\ v\ -\ \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\ \right)\ (v\ -\ 0)}$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \qquad \frac{1}{\beta\ \left(\ v\ +\ \frac{\alpha}{\beta}\ \right)\ v} = \frac{K_1}{v} + \frac{K_2}{v\ +\ \frac{\alpha}{\beta}} \qquad ,\quad K_1,\ K_2\ \in \mathbb{R}$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} \qquad 1 = K_1\ \beta\ \left(v\ +\ \frac{\alpha}{\beta}\right)\ +\ K_2\ \beta\ v$$

$$\overset{3}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} v \;=\; 0: & 1 \;=\; K_1 \; \beta \; \dfrac{\alpha}{\beta} \;+\; 0 \\[2ex] \qquad \overset{3.1}{\Rightarrow} & 1 \;=\; K_1 \; \alpha \\[2ex] \qquad \overset{3.2}{\Rightarrow} & \Big\{ \alpha \;\neq\; 0 \quad : \quad \dfrac{1}{\alpha} \;=\; K_1 \end{cases}$$

$$\overset{4}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} v \;=\; -\dfrac{\alpha}{\beta}: & 1 \;=\; 0 \;+\; K_2 \; \beta \; \left(-\dfrac{\alpha}{\beta}\right) \\[2ex] \qquad \overset{4.1}{\Rightarrow} & 1 \;=\; K_2 \; (-\alpha) \\[2ex] \qquad \overset{4.2}{\Rightarrow} & \Big\{ \alpha \;\neq\; 0 \quad : \quad -\dfrac{1}{\alpha} \;=\; K_2 \end{cases}$$

$$\overset{5}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{\alpha \; v \;+\; \beta \; v^2} \;=\; \frac{1}{\alpha} \; \frac{1}{v} \;-\; \frac{1}{\alpha} \; \frac{1}{v \;+\; \frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} \quad \;=\; \frac{1}{\alpha \; v} \;-\; \frac{1}{\alpha \; \left(v \;+\; \frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

$$\overset{7}{\Rightarrow} \quad \;=\; \Big\{ \beta \;=\; 0 \quad : \quad \frac{1}{\alpha \; v \;+\; \beta \; v^2} \;=\; \frac{1}{\alpha \; v}$$

Probe:

$$\overset{1}{\Rightarrow} \qquad \frac{1}{\alpha\ v\ +\ \beta\ v^2} \;=\; \frac{1}{\alpha\ v} - \frac{1}{\alpha\ \left(v\ +\ \frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{l} HN\ :=\ \left(\alpha\ v\ +\ \beta\ v^2\right)\ \alpha\ v\ \left(v\ +\ \dfrac{\alpha}{\beta}\right)\ : \\[2ex] \qquad \dfrac{\alpha\ \left(v\ +\ \frac{\alpha}{\beta}\right)\ v}{HN} \;=\; \dfrac{\alpha\ \left(v\ +\ \frac{\alpha}{\beta}\right)\ v}{HN} + \dfrac{v\ \left(\alpha\ v\ +\ \beta\ v^2\right)}{HN} \\[2ex] \overset{2.3}{\Rightarrow} \qquad 0 \;=\; \alpha\ \left(v\ +\ \dfrac{\alpha}{\beta}\right)\ v \\[2ex] \qquad\qquad +\ v\ \left(\alpha\ v\ +\ \beta\ v^2\right) \\[2ex] \qquad\qquad -\ \alpha\ \left(v\ +\ \dfrac{\alpha}{\beta}\right)\ v \\[2ex] \overset{2.4}{\Rightarrow} \qquad 0 \;=\; \alpha\ v^2\ +\ \dfrac{\alpha^2\ v}{\beta}\ +\ \beta\ v^3\ +\ \alpha^2\ v \\[2ex] \qquad\qquad -\ \alpha^2\ v\ -\ \beta\ v^3 \\[2ex] \qquad\qquad -\ \alpha\ v^2\ -\ \dfrac{\alpha^2\ v}{\beta} \\[2ex] \overset{2.5}{\Rightarrow} \qquad 0 \;=\; 0 \end{array} \right.$$

b)

$$\dot{v} \;=\; -\alpha\, v \;-\; \beta\, v^2$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \quad \dot{v}\, \frac{1}{\alpha\, v \;+\; \beta\, v^2} \;=\; -1$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} \quad \dot{v} \left(\frac{1}{\alpha\, v} \;-\; \frac{1}{\alpha \left(v \;+\; \frac{\alpha}{\beta} \right)} \right) \;=\; -1$$

$$\overset{3}{\Rightarrow} \quad \dot{v}\, \frac{1}{\alpha\, v} \;-\; \dot{v}\, \frac{1}{\alpha \left(v \;+\; \frac{\alpha}{\beta} \right)} \;=\; -1$$

$$\overset{4}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{\alpha} \left(\dot{v}\, \frac{1}{v} \;-\; \dot{v}\, \frac{1}{v \;+\; \frac{\alpha}{\beta}} \right) \;=\; -1$$

$$\overset{5}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{\alpha} \left(\int dt\, \dot{v}\, \frac{1}{v} \;-\; \int dt\, \dot{v}\, \frac{1}{v \;+\; \frac{\alpha}{\beta}} \right) \;=\; \int dt\, (-1)$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{\alpha} \left(ln\, \mid v \mid \;+\; C_1 \;-\; ln \left| v \;+\; \frac{\alpha}{\beta} \right| \;+\; C_2 \right) \;=\; -t \;+\; C_3$$

$$\overset{7}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{\alpha} \left(ln \left| \frac{v}{v \;+\; \frac{\alpha}{\beta}} \right| \;+\; C_4 \right) \;=\; -t \;+\; C_3$$

$$\overset{8}{\Rightarrow} \quad ln \left| \frac{v}{v \;+\; \frac{\alpha}{\beta}} \right| \;+\; C_4 \;=\; -\,\alpha\, t \;+\; C_5$$

$$\overset{9}{\Rightarrow} \quad ln \left| \frac{v}{v \;+\; \frac{\alpha}{\beta}} \right| \;=\; -\,\alpha\, t \;+\; C_6$$

$$\overset{10}{\Rightarrow} \quad e^{ln \left| \frac{v}{v \,+\, \frac{\alpha}{\beta}} \right|} \;=\; e^{-\,\alpha\, t \,+\, C_6}$$

$$\overset{11}{\Rightarrow} \qquad \left| \frac{v}{v + \frac{\alpha}{\beta}} \right| = e^{-\alpha t + C_6}$$

$$\overset{12}{\Rightarrow} \qquad \frac{v}{v + \frac{\alpha}{\beta}} = \pm e^{-\alpha t + C_6}$$

Weiter? Vermutlich habe ich mich verrechnet. Allerdings ist mir auch unklar, ab wann ich die Integrationskonstante und welche ich durch v_0 ersetzen soll (oder alle zusammenfassen und das Resultat ersetzen?). Wie weit vereinfachen? Ich würde es so machen: in dem Moment wo links $v(t)$ steht wird noch ersetzt und fertig. Wie ist das mit dem Zeichnen? Ich nehme an von Hand. Mit e ist das eben nicht ganz so einfach. Wie darf ich runden (3?)? Ich könnte jetzt noch eine v-P-Division machen und bekäme 1 plus den Rest. Danach stört mich leider der Ausdruck mit t.
Zudem ist mir der Lösungsansatz (Mitschrieb) unklar. Da in dieser nur ein Summand angegeben ist. Ich wollte diese Formel eigtl. verwenden.

c)

Fragen zu den Aufgaben oder Allgemeinem:

1. Wann macht es Sinn, (eine) Integrationskonstante(n) erst zum Schluss zu wählen?

    - ...

2. Wann und wo macht es Sinn, (eine) Integrationskonstante(n) nicht erst zum Schluss zu wählen?

    - ...

3. Wann sind Fragen nach einem Ausdruck, z.B. $y(x)$, durch dessen explizite Angabe, bzw. durch dessen implizite Angabe zu beantworten?

    - ...

4

4.1

a)

$$\dot{v} \;=\; \gamma - \alpha\, v - \beta\, v^2 \qquad\qquad \equiv: (1)$$

$$\dot{v} \;=\; F\left(v^2 , v , t \right) + \gamma$$

$$F\left(\dot{v} , v^2 , v , t \right) \;\neq\; 0$$

Gegeben ist eine gewöhnliche, nicht-lineare, nicht-homogene DGL von erster Ordnung und mit konstanten Koeffizienten in expliziter Form.

“gewöhnliche”

Es gibt genau eine Variable t , nach der abgeleitet wird.

“nicht-lineare”

Es kommt eine nicht-lineare Funktion in v , hier v^2 vor.

“nicht-homogene”

Der von t unabhängige Ausdruck ist nicht 0 .

“von erster Ordnung”

Von allen Ableitungen der durch v beschriebenen Funktion ist hier $\dot{v}$ die höchste und die Anzahl ihrer Ableitungen ist 1.

“mit konstanten Koeffiziebten”

Die Koeffizienten vor den durch v beschriebenen Funktionen sind alle konstant.

“in expliziter Form”

Auf einer Seite der Differentialgleichung steht die höchste Ableitung.

4.2

Präsenzübungen

1

1.1

1.2

2

2.1

2.2

Präsenzübung 3

Aufgabe 1

1, a)

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} dt\ \frac{\dot{y}}{y} \ = \ ln\ \mid y(x_1) \mid \ - \ ln\ \mid y(x_0) \mid}$$

$$\dot{v} \ = \ -f(t)\ v$$

$$\stackrel{1}{\Rightarrow} \qquad \frac{\dot{v}}{v} \ = \ -f(t)$$

$$\stackrel{2}{\Rightarrow} \qquad \int_0^t dt\ \frac{\dot{v}}{v} \ = \ \underbrace{-\int_0^t dt\ f(t)}_{=:\ -F(t)}$$

$$\stackrel{3}{\Rightarrow} \qquad ln\ \mid v(t) \mid \ - \ ln\ \mid v(0) \mid \ = \ -F(t)$$

$$\stackrel{4}{\Rightarrow} \qquad ln \left| \frac{v(t)}{v(0)} \right| \ = \ -F(t)$$

$$\overset{5}{\Rightarrow} \qquad e^{\,ln \left| \frac{v(t)}{v(0)} \right|} = e^{\,-F(t)}$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} \qquad \left| \frac{v(t)}{v(0)} \right| = e^{\,-F(t)}$$

$$\overset{7}{\Rightarrow} \qquad \frac{v(t)}{v(0)} = \pm\, e^{\,-F(t)}$$

$$\overset{8}{\Rightarrow} \qquad v(t) = \pm\, e^{\,-F(t)}\, v(0)$$

$$\overset{9}{\Rightarrow} \qquad v(t) - v(0) = \pm\, e^{\,-F(t)}\, v(0) - v(0)$$

$$\overset{10}{\Rightarrow} \qquad v(t) - v(0) = \pm \left(e^{\,-F(t)} - 1 \right) C_1 \qquad , \quad C_1 := v(0) \in \mathbb{K}$$

1, b)

$$\Big\{ \; f(t) = \alpha \quad : \qquad v(t) - v(0) = \pm \left(e^{\,-\int_0^t \; dt \; \alpha} - 1 \right) C_1$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \qquad v(t) - v(0) = \pm \left(e^{\,-\alpha \; [t]_0^t} - 1 \right) C_1$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} \qquad v(t) - v(0) = \pm \left(e^{\,-\alpha\; t} - 1 \right) C_1$$

$$\overset{3}{\Rightarrow} \qquad v(t) = C_2 \qquad , \quad C_2 \in \mathbb{K}$$

1, c)

Gegeben ist eine gewöhnliche, nicht-lineare, homogene DGL, von erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten in expliziter Form.

$$\frac{dy}{dx} \;=\; a\,y^2 \;+\; b\,y$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \qquad \frac{dy}{dx}\,\frac{1}{a\,y^2 \;+\; b\,y} \;=\; 1$$

Präsenzübung 4

Fragen zu den Aufgaben oder Allgemeinem:

1. Ist eine Integration über 0 von der Integrationsvariable unabhängig, d.h. $\int 0$ ist für alle Integrationsvariablen aus beliebigen Mengen definiert? Unter welcher Einschränkung gilt es?

    - ...

2. Wenn $\int 0$ nicht für alle Integrationsvariablen aus beliebigen Mengen definiert ist, unter welcher Einschränkung ist es definiert?

    - ...

    Notizen: Das müsste stimmen, wenn der Quantor frei wird. Einfach Mal die Def. aufschreiben.

3. Gibt es eine einfache Merkhilfe für Hyperbolicus-Funktionen, wie z.B. $cosh\ \varphi$ oder $sinh\ \varphi$?

    - ...

4. Wie ist der ∇-Operator ohne Pünktchen definiert?

    - ...

Aufgabe 1

1, a)

Annahme: $\dot{\vec{r}}(t) \in \mathbb{R}^{\,n}$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix}$$

$$v(t) = \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| = \sqrt{v_x^2 + (-g\ t)^2} = \sqrt{v_x^2 + g^2\ t^2}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$a(t) = \left|\ddot{\vec{r}}(t)\right| = \sqrt{(-g)^2} = \sqrt{g^2} = |g|$$

1, b)

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left| \dot{\vec{r}}(t) \right|$$

$$= \frac{d}{dt} \sqrt{\underbrace{v_x^2 + g^2 t^2}_{=: t'}}$$

$$= \frac{d}{d t'} (t')^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \left(v_x^2 + g^2 t^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} (v_x^2 + g^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} g^2 2 t$$

$$= \frac{g^2 t}{\sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}}$$

$$\vec{a}_{\|}(t) = \dot{\vec{r}} \frac{a(t)}{v(t)}$$

$$\vec{a}_{\perp}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) - a_{\|}(t)$$

$$| \vec{a}_{\|}(t) | = \left| \dot{\vec{r}} \frac{a(t)}{v(t)} \right|$$

$$| \vec{a}_{\perp}(t) | = \left| \ddot{\vec{r}}(t) - a_{\|}(t) \right|$$

$$\vec{a}_{\parallel}(t) \;\cdot\; \vec{a}_{\perp}(t)$$

$$\stackrel{1}{=} \left\{ \quad f \;:=\; \tfrac{g^2\ t}{\sqrt{v_x^2\ +\ g^2\ t^2}} \quad : \qquad \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix} f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix} f \right) \right.$$

$$\stackrel{2}{=} f \left(g^2\ t \ - \ \underbrace{\left(v_x^2\ +\ g^2\ t^2\right)\ f}_{=\ g^2\ t} \right)$$

$$\stackrel{3}{=} f\ 0$$

$$\stackrel{4}{=} 0$$

Aufgabe 1

2, a)

$$\ddot{x} = \omega\, \dot{y}$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \quad \int dt\, \frac{d}{dt}\, \dot{x} = \omega \int dt\, \frac{d}{dt}\, y$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} \quad \dot{x} + C_1 = \omega\, (\, y + C_2\,) \qquad , \; C_1,\, C_2 \in \mathbb{K}$$

$$\overset{3}{\Rightarrow} \quad \dot{x} = \omega\, y + C_3 \qquad , \; C_3 \in \mathbb{K}$$

$$\ddot{y} = -\omega\, \dot{x}$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \quad \dot{y} = -\omega\, x + C_3 \qquad , \; C_3 \in \mathbb{K}$$

$$\boxed{\int 0 = C \qquad , \; C \in \mathbb{K}}$$

$$\ddot{z} = 0$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \quad \int dt\, \frac{d}{dt}\, \dot{z} = \int dt\; 0$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} \quad \dot{z} + C_1 = C_2 \qquad , \; C_1, C_2 \in \mathbb{K}$$

$$\overset{3}{\Rightarrow} \quad \dot{z} = C_3 \qquad , \; C_3 \in \mathbb{K}$$

2, b)

Aufgabe 3

3, a)

$$\boxed{cosh\ \varphi \quad = \quad \frac{e^{\ \varphi} \ + \ e^{\ -\varphi}}{2}}$$

$$\boxed{sinh\ \varphi \quad = \quad \frac{e^{\ \varphi} \ - \ e^{\ -\varphi}}{2}}$$

$$cosh\ \varphi \quad = \quad \frac{e^{\ \varphi} \ + \ e^{\ -\varphi}}{2}$$

$$sinh\ \varphi \quad = \quad \frac{e^{\ \varphi} \ - \ e^{\ -\varphi}}{2}$$

3, b)

$$\vec{\nabla} \; | \, \vec{r} \, | \;=\; \vec{\nabla} \; \underbrace{\sqrt{\, x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2}}_{=: \; f}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \; x} \; f \\ \frac{\partial}{\partial \; y} \; f \\ \frac{\partial}{\partial \; z} \; f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \; \left(\, x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2 \, \right)^{\, -\frac{1}{2}} \; 2 \; x \\ ... \\ ... \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{f} \\ \frac{y}{f} \\ \frac{z}{f} \end{pmatrix}$$