Analyse der Druckberechnung mithilfe einer Zustandsgleichung im Vergleich zur Lösung eines Gleichungssystems in SPH-Flüssigkeitssimulationen

Pascal Hunkler

May 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Abstract

2 Einleitung

3 Grundlagen

3.1 Navier-Stokes-Gleichung und Flüssigkeitssimulationen

3.1.1 Partikelbasierte Simulation

3.1.2 Gitterbasierte Simulation

3.2 SPH

Das Konzept *Smoothed Particle Hydrodynamics* wurde ursprünglich entwickelt, um astrophysikalische Phänomene besser darstellen zu können [GM77], [Luc77].

3.2.1 Diskretisierung mit SPH

Die Inhalte dieses Abschnittes basieren hauptsächlich auf den Arbeiten von Monaghan [Mon05], von Price [Pri12] und von Koshier et al. [KBST20]. Für eine beliebige skalare Variable A gilt die Identität

$$A(\mathbf{x}) = \int A(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\mathbf{x}' \tag{3.1}$$

δ ist hierbei die Dirac'sche Deltafunktion die definiert ist als

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.2}$$

Die Dirac'sche Deltafunktion in Gleichung 3.1 kann mithilfe einer glättenden Kernelfunktion W mit endlicher Breite h approximiert werden.

$$A(\mathbf{x}) = \int A(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)d\mathbf{x}' + O(h^2) \tag{3.3}$$

Damit die Approximation aus Gleichung 3.3 gültig ist, muss W folgende Eigenschaften besitzen:

$$\int_{\mathbb{R}^d} W(\mathbf{r}', h) dv' = 1 \tag{3.4}$$

$$\lim_{h \to 0} W(\mathbf{r}, h) = \delta(\mathbf{r}) \tag{3.5}$$

Weitere wünschenswerte Eigenschaften der Kernelfunktion W sind:

$$W(\mathbf{r}, h) \geq 0 \tag{3.6}$$

$$W(\mathbf{r}, h) = W(-\mathbf{r}, h) \tag{3.7}$$

$$W(\mathbf{r}, h) = 0 \text{ für } \|\mathbf{r}\| \geq \hbar \tag{3.8}$$

3.2.2 SPH in partikelbasierten Simulationen

4 Druckberechnung

4.1 Druckberechnung mit einer Zustandsgleichung

4.2 Druckberechnung mit IISPH

5 Implementierung

5.1 Programmierumgebung

5.2 Architektur der Software

5.3 Kernelfunktion, Kernelgradient

5.4 Nachbarschaftssuche

5.4.1 Uniformes Gitter Aufbau

5.4.2 Bestimmung der Nachbarn mithilfe des uniformen Gitters

5.4.3

5.5 Simulationsschritt

5.5.1 Berechnung der Dichte

5.5.2 Berechnung des Drucks

5.5.3 Berechnung der Druckbeschleunigung

5.5.4 Berechnung der restlichen Beschleunigungen

5.6 Visualisierung

6 Analyse

6.1 Szenarien

6.2 Rechen- und Speicheraufwand

6.3 Einfluss des Zeitschritts

6.4

7 Fazit und Ausblick

8 Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

[GM77] Robert A. Gingold and Joseph J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly notices of the royal astronomical society*, 181(3):375–389, 1977. ISBN: 1365-2966 Publisher: Oxford University Press Oxford, UK.

[KBST20] Dan Koschier, Jan Bender, Barbara Solenthaler, and Matthias Teschner. Smoothed particle hydrodynamics techniques for the physics based simulation of fluids and solids. *arXiv preprint arXiv:2009.06944*, 2020.

[Luc77] L. B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astronomical Journal*, 82:1013, December 1977.

[Mon05] Joe J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on progress in physics*, 68(8):1703, 2005. ISBN: 0034-4885 Publisher: IOP Publishing.

[Pri12] Daniel J. Price. Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 231(3):759–794, February 2012.

Algorithm 1 Simulationsschritt

Determine neighbors of each particle
Compute density ρ_f of each fluid particle using algorithm 2
Compute non-pressure accelerations $\mathbf{a}_f^n$ using algorithm 3
for all fluid particle f **do**
    $\mathbf{v}_f^* \leftarrow \mathbf{v}_f + \Delta t \mathbf{a}_f^n$
end for
Compute pressure p_f of each fluid particle using algorithm 5
Compute pressure accelerations $\mathbf{a}_f^p$ using algorithm 4
for all fluid particle f **do**
    $\mathbf{v}_f \leftarrow \mathbf{v}_f^* + \Delta t \mathbf{a}_f^p$
end for
for all fluid particle f **do**
    $\mathbf{x}_f \leftarrow \mathbf{x}_f + \Delta t \mathbf{v}_f$
end for

Algorithm 2 Berechnung der Dichte der Partikel

for all particle i **do**
  if particle i belongs to the boundary **then**
    continue
  end if
  $\rho_i \leftarrow 0$
  for all neighbor j of particle i **do**
    $\rho_i \leftarrow \rho_i + W_{ij}$
  end for
  $\rho_i \leftarrow \rho_i \cdot m_f$
end for

Algorithm 3 Berechnung der restlichen Beschleunigungen

for all particle i **do**
  if particle i belongs to the boundary **then**
    $\mathbf{a}_i^n \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$
    continue
  end if
  $\mathbf{acc}_g \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & -9.81 \end{pmatrix}^\intercal$
  $\mathbf{acc}_v \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$

  // Viskositätsbeschleunigung an Partikel i
  for all neighbor j of particle i **do**
    if particle j belongs to the boundary **then**
      $\mathbf{acc}_v \leftarrow \mathbf{acc}_v + \frac{1}{\rho_i} \frac{(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + 0.01h^2} \cdot \nabla W_{ij}$
    else
      $\mathbf{acc}_v \leftarrow \mathbf{acc}_v + \frac{1}{\rho_j} \frac{(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + 0.01h^2} \cdot \nabla W_{ij}$
    end if
  end for
  $\mathbf{acc}_v \leftarrow 2\nu m_f \cdot \mathbf{acc}_v$

  $\mathbf{a}_i^n \leftarrow \mathbf{acc}_g + \mathbf{acc}_v$
end for

Algorithm 4 Berechnung der Druckbeschleunigungen

for all particle i **do**
  if particle i belongs to the boundary **then**
    $\mathbf{a}_i^p \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$
    continue
  end if
  $\mathbf{acc}_p \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$

  // Druckbeschleunigung an Partikel i
  for all neighbor j of particle i **do**
    if particle j belongs to the boundary **then**
      $\mathbf{acc}_p \leftarrow \mathbf{acc}_p - \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_i}{\left(\rho_f^0\right)^2} \right) \cdot \nabla W_{ij}$
    else
      $\mathbf{acc}_p \leftarrow \mathbf{acc}_p - \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \cdot \nabla W_{ij}$
    end if
  end for
  $\mathbf{acc}_p \leftarrow \mathbf{acc}_p \cdot m_f$

  $\mathbf{a}_i^p \leftarrow \mathbf{acc}_p$
end for

Algorithm 5 Berechnung des Drucks der Partikel

for all fluid particle f **do**
  $A_{ff} \leftarrow -\Delta t^2 \frac{m_f^2}{\rho_f^2} \cdot \left(\sum_{f_f} \nabla W_{ff_f} \nabla W_{ff_f} + \sum_{f_b} \nabla W_{ff_b} \nabla W_{ff_b} \right)$
  $s_f \leftarrow \rho_f^0 - \rho_f - m_f \Delta t \left(\sum_{f_f} (\mathbf{v}_f^* - \mathbf{v}_{f_f}^*) \nabla W_{ff_f} + \sum_{f_b} \mathbf{v}_f^* \nabla W_{ff_b} \right)$
  $p_f \leftarrow 0$
end for
$e \leftarrow \infty$
while $e \geq 0.001$ **do**
  $e \leftarrow 0$
  Compute pressure accelerations $\mathbf{a}_f^p$ using algorithm 4
  for all fluid particle f **do**
    $(\mathbf{Ap})_f \leftarrow m_f \Delta t^2 \left(\sum_{f_f} (\mathbf{a}_f^p - \mathbf{a}_{f_f}^p) \nabla W_{ff_f} + \sum_{f_b} \mathbf{a}_f^p \nabla W_{ff_b} \right)$
    if f has no neighbors **then**
      $(\mathbf{Ap})_f \leftarrow 0$
    end if
    $p_f \leftarrow \max(p_f + \omega \frac{s_f - (\mathbf{Ap})_f}{\mathbf{A}_{ff}}, 0)$
    $e \leftarrow e + \frac{(\mathbf{Ap})_f - s_f}{\rho_f^0}$
  end for
  $e \leftarrow \frac{e}{n}$
end while