1 Das Stokes Problem

Notation

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränktes polygonales Lipschitz-Gebiet, $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$
- $V \coloneqq H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ mit Norm $\|\cdot\|_V \coloneqq \|\cdot\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)}$
  $Q \coloneqq L_0^2(\Omega) \coloneqq \left\{q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q\,dx = 0\right\}$ mit Norm $\|\cdot\| \coloneqq \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$
- $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ Bilinearform definiert durch $(u,v) \mapsto \int_\Omega \nabla u : \nabla v\,dx$
  (mit $A : B = \sum_{i,j=1}^2 A_{ij}B_{ij}$ für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$)
- $b\colon V \times Q \to \mathbb{R}$ Bilinearform definiert durch $(v,q) \mapsto \int_\Omega q \operatorname{div} v\,dx$

Problem 1 (Schwache Formulierung)**.** Finde $(u,p) \in V \times Q$, sodass

$$\begin{cases} a\,(u,v) - b\,(v,p) = \langle f, v\rangle_{L^2} & \text{für alle } v \in V, \\ b\,(u,q) = 0 & \text{für alle } q \in Q. \end{cases} \tag{1}$$

Satz (Brezzis Splitting-Theorem)**.** *Ein Problem der Form (1) hat genau dann eine eindeutige Lösung $(u,p) \in V \times Q$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) Die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ ist elliptisch auf $Z \coloneqq \{v \in V : \forall q \in Q : b\,(v,q) = 0\}$.

(ii) Die Bilinearform $b\,(\cdot,\cdot)$ erfüllt die inf-sup-Bedingung*:*

$$\exists\,\beta > 0 : \inf_{q\in Q} \sup_{v\in V} \frac{b\,(v,q)}{\|v\|_V \,\|q\|} \geq \beta.$$

2 CRFEM für das Stokes Problem

Notation

- $\mathcal{T}_h$ quasi-uniforme Triangulierung von Ω, $h \coloneqq \max\{\operatorname{diam}(T)\colon T \in \mathcal{T}_h\}$
- $\mathcal{E}_h, (\mathcal{E}_h^i/\mathcal{E}_h^b)$ Menge aller (inneren/äußeren) Kanten von $\mathcal{T}_h$
  analog $\mathcal{N}_h, (\mathcal{N}_h^i/\mathcal{N}_h^b)$ für die Knoten von $\mathcal{T}_h$
- $\operatorname{mid}(E)$ Mittelpunkt von $E \in \mathcal{E}_h$, $\operatorname{mid}(\mathcal{E}_h)$ Menge aller Kantenmittelpunkte
- ∇_h stückweiser Gradient: $(\nabla_h v)|_T = \nabla(v|_T)$ für $T \in \mathcal{T}_h$ und geeignetes $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$,
  analog div_h

Crouzeix-Raviart Diskretisierung

Definiere die Räume

- $P_k(\mathcal{T}_h) \coloneqq \left\{v_h \in L^2(\Omega)\colon \forall T \in \mathcal{T}_h\colon v_h|_T \in P_k(T)\right\}$,
  $CR_0^1(\mathcal{T}_h) \coloneqq \left\{v_h \in P_1(\mathcal{T}_h)\colon v_h \text{ stetig in } \operatorname{mid}(\mathcal{E}_h^i), v_h(\operatorname{mid}(\mathcal{E}_h^b)) = \{0\}\right\}$,
- $V_h \coloneqq \left(CR_0^1(\mathcal{T}_h)\right)^2$ mit Norm $\|v\|_h \coloneqq \|\nabla_h v\|$ für $v \in V + V_h$,
  $Q_h \coloneqq P_0(\mathcal{T}_h) \cap L_0^2(\Omega)$ mit Norm $\|\cdot\|$,

und die Bilinarformen $a_h\colon V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ und $b_h\colon V_h \times Q_h \to \mathbb{R}$ durch

$$a_h(u_h,v_h) \coloneqq \int_\Omega \nabla_h u_h : \nabla_h v_h\,dx \quad \text{und} \quad b_h(v_h,q_h) \coloneqq \int_\Omega q_h \operatorname{div}_h v_h\,dx.$$

Problem 2 (Diskretes Problem)**.** Finde $(u_h,p_h) \in V_h \times Q_h$, sodass

$$\begin{cases} a_h(u_h,v_h) - b_h(v_h,p_h) = \langle f, v_h\rangle_{L^2} & \text{für alle } v_h \in V_h, \\ b_h(u_h,q_h) = 0 & \text{für alle } q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{2}$$

Stabilität der CRFEM

Definition 1 (Nicht-konformer Interpolationsoperator und L^2-Projektion)**.** Wir definieren

(i) den *nicht-konformen Interpolationsoperator* $I_{NC}\colon V \to V_h$, durch

$$(I_{NC}v)(\mathrm{mid}(E)) := \fint_E v\,ds \quad \text{für } E \in \mathcal{E}_h$$

(ii) die *L^2-Projektion* durch $\Pi_0\colon L^2(\Omega) \to P_0(\mathcal{T}_h)$,

$$(\Pi_0 f)|_T := \fint_T f\,dx \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_h.$$

Lemma 1 (Eigenschaften von I_{NC} und Π_0)**.** *(i) Für alle $v \in V$ und $T \in \mathcal{T}_h$ gilt $\fint_T \nabla v\,dx = \fint_T \nabla_h(I_{NC}v)\,dx$ und*

$$\|v - I_{NC}v\|_h \leq \inf_{w_h \in V_h} \|v - w_h\|_h\,.$$

(ii) Für alle $f \in L^2(\Omega)$ und $T \in \mathcal{T}_h$ gilt $\fint_T f\,dx = \fint_T \Pi_0 f\,dx$ und

$$\|f - \Pi_0 f\| \leq \inf_{g \in P_0(\mathcal{T}_h)} \|f - g\|\,.$$

Satz 1 (Stabilität von CR-NCFEM)**.** *Die Crouzeix-Raviart Diskretisierung des Stokes Problems $V_h \times Q_h$ aus Problem 2 ist stabil, d.h. es gibt $\beta > 0$ unabhängig von h, so dass die* diskrete inf-sup-Bedingung *erfüllt ist:*

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b_h(v_h, q_h)}{\|v_h\|_h \|q_h\|} \geq \beta.$$

3 Fehlerabschätzung der CRFEM

Definition 2 (Konforme Begleitabbildung J_k)**.** Wir definieren die *konformen Begleitabbildungen* $J_k\colon CR^1_0(\mathcal{T}_h) \to P_k(\mathcal{T}_h) \cap C_0(\Omega)$ für $k = 1, 2, 3$ wie folgt für $v_h \in CR^1_0(\mathcal{T}_h)$:

(i) $J_1 v_h := \sum_{z \in \mathcal{N}_h^i} \Big(|\mathcal{T}(z)|^{-1} \sum_{T \in \mathcal{T}(z)} v_h|_T(z) \varphi_z \Big)$

(ii) $J_2 v_h := J_1 v_h + \sum_{E \in \mathcal{E}_h^i} \big(\fint_E (v_h - J_1 v_h)\,ds \big)\, b_E$

(iii) $J_3 v_h := J_2 v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \big(\fint_T (v_h - J_2 v_h)\,dx \big)\, b_T$.

Dabei bezeichnet φ_z die konforme nodale Basisfunktion bzgl. $z \in \mathcal{N}_h$, $b_E := 6\varphi_a\varphi_b$ die Bubble-Funktion bzgl. der Kante $E := \mathrm{conv}\{a, b\} \in \mathcal{E}_h$ und $b_T := 60\varphi_a\varphi_b\varphi_c$ die Bubble-Funktion für das Element $T := \mathrm{conv}\{a, b, c\} \in \mathcal{T}_h$.

Lemma 2 (Eigenschaften von J_3)**.** *Die konforme Begleitabbildung $J_3\colon CR^1_0(\mathcal{T}_h) \to P_3(\mathcal{T}_h) \cap C_0(\Omega)$ hat folgende Eigenschaften:*

(i) $\int_T \nabla_h(v_h - J_3 v_h)\,dx = 0$ *und* $\int_T v_h - J_3 v_h\,dx = 0$ *für* $v_h \in CR^1_0(\mathcal{T}_h)$ *und* $T \in \mathcal{T}_h$,

(ii) $\|\nabla_h(v_h - J_3 v_h)\| \lesssim \big\|h^{-1}(v_h - J_3 v_h)\big\| \lesssim \|\nabla_h v_h\| \quad$ *für alle* $v_h \in CR^1_0(\mathcal{T}_h)$.

Satz 2 (Best-Approximation der CRFEM)**.** *Sei $(u, p) \in V \times Q$ die Lösung von (1) und $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ die Lösung von (2). Dann gilt:*

$$\|u - u_h\|_h + \|p - p_h\| \lesssim \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\| + \mathrm{osc}(f, h), \tag{3}$$

wobei die Oszillation von f durch $\mathrm{osc}(f, h) := \|h(f - \Pi_0 f)\|$ *definiert ist.*