CRFEM for the Stokes Problem

Pascal Huber

June, 30, 2014

1 Motivation und Einleitung

1. Was wir bisher gelernt haben
2. Was ich heute machen möchte
3. Was wir dazu benutzen werden

Wir beginnen mit einem kleinen Überblick zu den Stokes Gleichungen.

2 Das Stokes Problem

Schwache Formulierung des Stokes Problems Das Stokes Problem

$$-\Delta u + \nabla p = f \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega \tag{1}$$

dient der Beschreibung von inkompressiblen Flüssigkeiten mit hoher Viskosität (und ist damit eine linearisierte Vereinfachung der Navier-Stokes-Gleichungen).

Im Folgenden betrachten wir als Grundlage für unsere spätere Diskretisierung das Stokes Problem mit homogenen Randbedinungen auf einem zwei dimensionalen Lipschitz-Gebiet:

Modellproblem 1 (Schwache Formulierung des Stokes Problems)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonales Lipschitz-Gebiet und $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Wir definieren die Räume

$$V := H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \text{ und } Q := L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q(x)\, dx = 0\},$$

sowie die Bilinearformen $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ und $b\colon V \times Q \to \mathbb{R}$ durch

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u : \nabla v\, dx \text{ und } b(v,q) := \int_\Omega \operatorname{div} v \cdot q\, dx. \tag{2}$$

Finde $(u,p) \in V \times Q$, sodass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{cases} a(u,v) - b(v,p) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} & \text{für alle } v \in V \\ b(u,q) = 0 & \text{für alle } q \in Q. \end{cases} \tag{3}$$

Gesucht werden also der Geschwindigkeitsvektor $u \in V$ der Flüssigkeit und der dazugehörige Druck $p \in Q$. Die Funktion $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ beschreibt die gegebene äußere Kraftdichte, die auf die Flüssigkeit wirkt.
Wir bemerken, dass es sich im Gegensatz zu den bisherigen Vorträgen um ein vektorwertiges Problem handelt.

Ein Problem von der Form (3) wird als Sattelpunktproblem bezeichnet. Dabei wird die Gleichung $b(u, q) = 0$ als Nebenbedinung zur eigentlichen Minimisierungsaufgabe verstanden.

Existenz und Eindeutigkeit für Lösungen von Sattelpunktproblemen Bevor wir zur Diskretisierung des Problems mit Hilfe von Crouzeix-Raviart Elementen übergehen, widmen wir uns kurz der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $(u, p) \in V \times Q$ für das Modellproblem 1.
Da es sich hier um ein "gemischtes Problem" handelt, ist der gewöhnliche Ansatz für den Existenzbeweis mit Hilfe des Lemmas von Lax-Milgram nicht möglich. Stattdessen verwenden wir das Splitting-Theorem von Brezzi, das notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer eindeutigen Lösung liefert. Dazu betrachten wir eine etwas allgemeinere Fassung unseres Modellproblems.

Modellproblem 2 (Sattelpunktproblem)**.** Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(Q, \|\cdot\|_Q)$ zwei Hilbert-Räume und

$$a \colon V \times V \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad b \colon V \times Q \to \mathbb{R}$$

zwei stetige Bilinearformen. Wir nehmen an, dass $a(\cdot, \cdot)$ symmetrisch ist und definieren den abgeschlossenen Unterraum

$$Z := \{v \in V : b(v, q) = 0 \text{ for all } q \in Q\}\,. \tag{4}$$

Weiter seien $F \in V'$ und $G \in Q'$
Finde $(u, p) \in V \times Q$, sodass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{cases} a(u, v) - b(v, p) = F(v) & \text{für alle } v \in V \\ b(u, q) = G(q) & \text{für alle } q \in Q. \end{cases} \tag{5}$$

Der folgende Satz garantiert Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für Modellproblem 2.

Theorem 1 (Brezzis Splitting-Theorem)**.** *Die Abbildung $L \colon V \times Q \to V' \times Q'$, die jedem Paar $(u, p) \in V \times Q$ gemäß dem Sattelpunktproblem (5) das Paar $(F, G) \in V' \times Q'$ zuordnet, ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ ist Z-elliptisch:

$$\exists \alpha > 0 : \forall z \in Z : a(z, z) \geq \alpha \, \|z\|_V^2\,. \tag{6}$$

(ii) Die Bilinearform $b(\cdot,\cdot)$ erfüllt die inf-sup-Bedingung:

$$\exists \beta > 0 : \inf_{q \in Q} \sup_{v \in V} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V \|q\|_Q} \geq \beta. \tag{7}$$

Der Beweis dieses Satzes nutzt das *closed range theorem* und wird hier nicht angegeben. Wir bemerken, dass wir statt der Elliptizität der Bilinearform $b(\cdot,\cdot)$ die inf-sup-Bedingung für Satz 1 fordern müssen. Desweiteren weisen wir darauf hin, dass die Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ nur auf dem Unterraum Z gefordert wird.

Existenz von Lösungen für das Stokes Problem Zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für das Stokes Problem 1 müssen wir also nach Theorem 1 die Z-Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ und die inf-sup-Bedingung für $b(\cdot,\cdot)$ nachweisen.

1. Normen von V und Q angeben?
2. Definition von $A : B$ angeben?
3. Was genau bedeuted die inf-sup-Bedingung?