CRFEM for the Stokes Problem

Pascal Huber

June, 30, 2014

1 Motivation und Einleitung

1. Was wir bisher gelernt haben
2. Was ich heute machen möchte
3. Was wir dazu benutzen werden

Wir beginnen mit einem kleinen Überblick zu den Stokes Gleichungen.

2 Das Stokes Problem

Schwache Formulierung des Stokes Problems Das Stokes Problem

$$-\Delta u + \nabla p = f \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega \tag{1}$$

dient der Beschreibung von inkompressiblen Flüssigkeiten mit hoher Viskosität (und ist damit eine linearisierte Vereinfachung der Navier-Stokes-Gleichungen).

Im Folgenden betrachten wir als Grundlage für unsere spätere Diskretisierung das Stokes Problem mit homogenen Randbedinungen auf einem zwei dimensionalen Lipschitz-Gebiet:

Modellproblem 1 (Schwache Formulierung des Stokes Problems)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonales beschränktes Lipschitz-Gebiet und $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Wir definieren die Räume

$$V := H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2) \text{ und } Q := L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q(x)\,dx = 0\},$$

sowie die Bilinearformen $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ und $b\colon V \times Q \to \mathbb{R}$ durch

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u : \nabla v\,dx \text{ und } b(v,q) := \int_\Omega \operatorname{div} v \cdot q\,dx. \tag{2}$$

Finde $(u,p) \in V \times Q$, sodass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{cases} a(u,v) - b(v,p) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} & \text{für alle } v \in V \\ b(u,q) = 0 & \text{für alle } q \in Q. \end{cases} \tag{3}$$

Gesucht werden also der Geschwindigkeitsvektor $u \in V$ der Flüssigkeit und der dazugehörige Druck $p \in Q$. Die Funktion $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ beschreibt die gegebene äußere Kraftdichte, die auf die Flüssigkeit wirkt.
Wir bemerken, dass es sich im Gegensatz zu den bisherigen Vorträgen um ein vektorwertiges Problem handelt.

Ein Problem von der Form (3) wird als Sattelpunktproblem bezeichnet. Dabei wird die Gleichung $b(u, q) = 0$ als Nebenbedinung zur eigentlichen Minimisierungsaufgabe verstanden.

Existenz und Eindeutigkeit für Lösungen von Sattelpunktproblemen Bevor wir zur Diskretisierung des Problems mit Hilfe von Crouzeix-Raviart Elementen übergehen, widmen wir uns kurz der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $(u, p) \in V \times Q$ für das Modellproblem 1.
Da es sich hier um ein "gemischtes Problem" handelt, ist der gewöhnliche Ansatz für den Existenzbeweis mit Hilfe des Lemmas von Lax-Milgram nicht möglich. Stattdessen verwenden wir das Splitting-Theorem von Brezzi, das notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer eindeutigen Lösung liefert. Dazu betrachten wir eine etwas allgemeinere Fassung unseres Modellproblems.

Modellproblem 2 (Sattelpunktproblem)**.** Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(Q, \|\cdot\|_Q)$ zwei Hilbert-Räume und

$$a \colon V \times V \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad b \colon V \times Q \to \mathbb{R}$$

zwei stetige Bilinearformen. Wir nehmen an, dass $a(\cdot, \cdot)$ symmetrisch ist und definieren den abgeschlossenen Unterraum

$$Z := \{v \in V : b(v, q) = 0 \text{ for all } q \in Q\} . \tag{4}$$

Weiter seien $F \in V'$ und $G \in Q'$
Finde $(u, p) \in V \times Q$, sodass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{cases} a(u, v) - b(v, p) = F(v) & \text{für alle } v \in V \\ b(u, q) = G(q) & \text{für alle } q \in Q. \end{cases} \tag{5}$$

Der folgende Satz garantiert Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für Modellproblem 2.

Theorem 1 (Brezzis Splitting-Theorem)**.** *Die Abbildung $L \colon V \times Q \to V' \times Q'$, die jedem Paar $(u, p) \in V \times Q$ gemäß dem Sattelpunktproblem (5) das Paar $(F, G) \in V' \times Q'$ zuordnet, ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ ist Z-elliptisch:

$$\exists \alpha > 0 : \forall z \in Z : a(z, z) \geq \alpha \|z\|_V^2 . \tag{6}$$

(ii) Die Bilinearform $b(\cdot,\cdot)$ erfüllt die inf-sup-Bedingung:

$$\exists \beta > 0 : \inf_{q \in Q} \sup_{v \in V} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V \|q\|_Q} \geq \beta. \tag{7}$$

Der Beweis dieses Satzes nutzt das *closed range theorem* und wird hier nicht angegeben. Wir bemerken, dass wir statt der Elliptizität der Bilinearform $b(\cdot,\cdot)$ die inf-sup-Bedingung für Satz 1 fordern müssen. Desweiteren weisen wir darauf hin, dass die Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ nur auf dem Unterraum Z gefordert wird.

Existenz von Lösungen für das Stokes Problem Zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für das Stokes Problem 1 genügt es also nach Theorem 1 die Z-Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ und die inf-sup-Bedingung für $b(\cdot,\cdot)$ nachweisen. (Die Stetigkeit der beiden Bilinearformen folgt direkt aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung.)

Wie bereits in den letzten Vorträgen gesehen, folgt die Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ auf ganz $H_0^1(\Omega)$ aus der Friedrichs-Ungleichung.
Zum Beweis der inf-sup-Bedingung benötigen wir ein tiefgreifendes analytisches Resultat, bekannt als Ladyženskaya Abschätzung:

Theorem 2 (Ladyženskaya Ungleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann ist die Abbildung*

$$\operatorname{div}\colon Z^\perp \to L_0^2(\Omega), \quad v \mapsto \operatorname{div} v$$

ein Isomorphismus und es exisitiert ein Konstante $c = c(\Omega) > 0$, so dass gilt:

$$\forall q \in L_0^2(\Omega) \colon \exists v_q \in Z^\perp \colon \operatorname{div} v_q = q \text{ und } \|v_q\|_{H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2)} \leq c \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aus Theorem 2 folgt unmittelbar die inf-sup-Bedingung für $b(\cdot,\cdot)$: Für alle $q \in Q$ gilt:

$$\sup_{v \in V} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V} \geq \frac{b(v_q,q)}{\|v_q\|_V} = \frac{\|q\|_Q^2}{\|v_q\|_V} \geq \frac{1}{c} \|q\|_Q, \tag{8}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die explizite Definition von $b(\cdot,\cdot)$ ausgenutzt haben.

Fragen:

1. Normen von V und Q angeben?
2. Definition von $A : B$ angeben?
3. Was genau bedeuted die inf-sup-Bedingung?
4. Soll ich die Ladyzenskaya Ungleichung rauslassen?

3 Stabilität der CRFEM für das Stokes Problem

3.1 Motivation

1. Was ist die generelle Schwierigkeit bei der Diskretisierung des Stokes-Problems?

2. Warum scheint das CR-Element gut geeignet zu sein? (Das könnte ich auch nach der Definition des diskreten Problems machen...)

3.2 Beschreibung der Diskretisierung

Nachdem wir nun die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für das Stokes Problem sichergestellt haben, wollen wir im Folgenden die Diskretisierung von Modellproblem 1 mit Hilfe des Crouzeix-Raviart Elements beschreiben.

Sei dazu $\mathcal{T}_h$ ein quasi-uniforme Triangulierung von Ω. Zur Beschreibung der Triangulierung benutzen wir folgende Bezeichnungen:

- $h \coloneqq \max\{h_T \colon T \in \mathcal{T}_h\}$ mit $h_T \coloneqq \operatorname{diam}(T)$ für $T \in \mathcal{T}_h$
- $\mathcal{E}$ bezeichnet die Menge aller Kanten von $\mathcal{T}_h$
- $\operatorname{mid}(E)$ bezeichnet den Kantenmittelpunkt von $E \in \mathcal{E}$, $\operatorname{mid}(\mathcal{E})$ die Menge aller Kantenmittelpunkte in $\mathcal{T}_h$

Zur Definitionen der Ansatzräume für die Diskretisierung benötigen wir noch folgende endlich-dimensionalen Funktionenräume:
Es bezeichne

$$P_k(\mathcal{T}_h) \coloneqq \big\{v_h \in L^2(\Omega) \colon \forall T \in \mathcal{T}_h \colon v_h|_T \in P_k(T)\big\}$$

den Raum aller stückweiser Polynome vom Grad höchstens k bezüglich der Triangulierung $\mathcal{T}_h$. Wir definieren den *Crouzeix-Raviart FE-Raum* durch

$$\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h) \coloneqq \{v_h \in P_1(\mathcal{T}_h) \colon v_h \text{ stetig in } \operatorname{mid}(\mathcal{E}), v_h(\operatorname{mid}(E)) = 0 \text{ für } E \in \partial\Omega \cap \mathcal{E}\}\,. \tag{9}$$

Mit Hilfe dieser Definitionen sind wir nun in der Lage die nicht-konforme Crouzeix-Raviart Diskretisierung des Modellproblems 1 anzugeben.

Modellproblem 3 (CR-NCFEM für das Stokes Modellproblem)**.** Wir definieren die Ansatzräume $V_h \coloneqq \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h) \times \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h)$ und $Q_h \coloneqq L_0^2(\Omega) \cap P_0(\mathcal{T}_h)$ zusammen mit den Normen

$$\|q_h\| \coloneqq \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \text{ auf } Q_h \quad \text{ und } \quad \|v_h\|_h \coloneqq \|\nabla_h v_h\| \text{ auf } V_h. \tag{10}$$

Weiter seien die diskreten Bilinearformen $a_h \colon V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ und $b_h \colon V_h \times Q_h \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$a_h(u_h, v_h) \coloneqq \int_\Omega \nabla_h u : \nabla_h v \, dx \quad \text{ und } \quad b_h(v_h, q_h) \coloneqq \int_\Omega q_h \operatorname{div_h} v_h \, dx. \tag{11}$$

Für gegebenes $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ finde $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$, sodass folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) - b_h(v_h, p_h) = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} & \text{für alle } v_h \in V_h \\ b_h(u_h, q_h) = 0 & \text{für alle } q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{12}$$

Fehlende Bemerkungen:

- Definition von ∇_h und $\mathrm{div_h}$.
- $\|\cdot\|_h$ heißt Energienorm und ist tatsächlich eine Norm auf V_h (siehe Benjamins Vortrag).
- Auf $H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ stimmt $\|\cdot\|_h$ mit $\|\cdot\|_{H_0^1}$ überein.
- Die Methode ist nicht-konform, da offensichtlich $V_h \not\subseteq V$.
- Motivation: Warum eigentlich CR-NCFEM? $\Rightarrow$ einfache Struktur, inf-sup-Stabilität, Approximationseigenschaften

3.3 Stabilität der CR-NCFEM

Bevor wir mit der Fehlerabschätzung für die Crouzeix-Raviart-Diskretisierung beginnen können, muss noch gezeigt werden, dass im Modellproblem 3 auch tatsächlich eine eindeutige Lösung (u_h, p_h) exisitiert.

Dazu verwenden wir wie auch schon für das kontinuierliche Problem die Aussage von Theorem 1. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass durch die Wahl der Normen $\|\cdot\|_h$ und $\|\cdot\|$ die Stetigkeit beider Bilinearformen und auch die Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ auf dem Unterraum $Z_h := \{v_h \in V_h \colon \forall q_h \in Q_h \colon b_h(v_h, q_h) = 0\}$ (mit einer von h unabhängingen Konstante) gewährleistet ist.

Also besteht das eigentliche Kriterium für die Existenz einer eindeutigen Lösung wie schon im ursprünglichen Problem in der inf-sup-Bedingung. Auch darüber hinaus spielt die inf-sup-Bedingung in der Praxis für die Stabilität bei der numerischen Berechnung eine wichtige Rolle. Dies motiviert die folgende Defintion:

Definition 1 (Stabilität von FEM für das Stokes Problem)**.** Eine FE-Diskretisierung $V_h \times Q_h$ für das Modellproblem 1 heißt *inf-sup-stabil* (oder einfach nur *stabil*), falls die diskrete inf-sup-Bedingung erfüllt ist, d.h. es existiert $\beta > 0$ (unabhänging von der Gitterweite h), sodass

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b_h(v_h, q_h)}{\|v_h\|_h \|q_h\|} \geq \beta. \tag{13}$$

Im Folgenden wollen wir nun zeigen, dass die Stabilität für die Crouzeix-Raviart-FEM gegeben ist. Dazu verwenden wir das sogenannte *Fortin-Kriterium*, indem wir einen geeigneten nicht-konformen Interpolationsoperator definieren. (Diesen werden wir auch noch im Laufe der Medius-Analyse benötigen...)

Definition 2 (Nicht-konformer Interpolationsoperator und L^2-Projektion). *(i)* Der nicht-konformen Interpolationsoperator $\mathrm{I}_{\mathrm{NC}} \colon H_0^1(\Omega) \to \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h)$ ist definiert durch

$$(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v)(\mathrm{mid}(E)) := \fint_E v\, ds \qquad \text{für } E \in \mathcal{E}. \tag{14}$$

(ii) Wir definieren $\Pi_0 \colon L^2(\Omega) \to P_0(\mathcal{T}_h)$ durch

$$(\Pi_0\, f)|_T := \fint_T f\, dx \qquad \text{für } T \in \mathcal{T}_h. \tag{15}$$

Die Besonderheit von I_{NC} und Π_0 liegt vor allem darin, dass sie jeweils die Bestapproximation ihres Arguments im Bildraum darstellen:

Lemma 1 (Eigenschaften von I_{NC} und Π_0). *(i) Es gelten die folgenden Mittelwerteigenschaften für alle $T \in \mathcal{T}_h$ und $v \in V$, $f \in L^2(\Omega)$:*

$$\fint_T \nabla v\, dx = \fint_T \nabla(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v)\, dx \quad \textit{und} \quad \fint_T f\, dx = \fint_T \Pi_0\, f\, dx \tag{16}$$

(ii) Seien $v \in V$ und $f \in L^2(\Omega)$ gegeben. Dann gilt für alle $w \in P_0(\mathcal{T}_h)^2$ und alle $g \in P_0(\mathcal{T}_h)$:

$$\|\nabla_h(v - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v)\| \le \|\nabla v - w\| \quad \textit{und} \quad \|f - \Pi_0\, f\| \le \|f - g\|\,. \tag{17}$$

Beweis. *(i)* Die Gleichheit der Mittelwerte in (16) folgt für Π_0 direkt aus der Definition. Für I_{NC} erhält man die Aussage mit Hilfe von partieller Integration (bemerke, dass wir hier den Spursatz verwenden).

(ii) Wir zeigen die Approximationseigenschaft für I_{NC}: Sei $v \in V$, $w \in P_0(\mathcal{T}_h)^2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\nabla v - w\|^2 &= \int_\Omega (\nabla_h(v - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v))^2 + (\nabla_h \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v - w)^2\, dx \\ &\quad + \int_\Omega (\nabla_h(v - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v)) \cdot (\nabla_h \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v - w)\, dx.\end{aligned}$$

Da aber $(\nabla_h \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v - w)$ stückweise konstant ist, folgt mit der Mittelwerteigenschaft von (16) die Behauptung.
Die Ungleichung für Π_0 geht analog.

□

- Erwähne dass für vektorwertige Funktionen die Anwendung komponentenweise geschieht.
- Was ist mit dem Beweis von Lemma 1?

Wir können nun den nicht-konformen Interpolationsoperator I_{NC} verwenden, um die Stabilität der Crouzeix-Raviart FE-Räume zu zeigen.

Theorem 3 (Stabilität von CR-NCFEM)**.** *Die Crouzeix-Raviart Diskretisierung des Stokes Problems* $V_h \times Q_h = \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \times (L_0^2(\Omega) \cap P_0(\mathcal{T}_h))$ *aus Modellproblem 3 ist stabil.*

Beweis. Für den Beweis zeigen, wir dass der nicht-konforme Interpolationsoperator ein *Fortin-Operator* ist, d.h. wir zeigen:

$$\begin{aligned} &(i) \quad \exists c > 0 \text{ (unabhängig von } h\text{)}\colon \; \|\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v\|_h \leq c\,\|v\|_V \; \text{ für alle } v \in V \\ &(ii) \quad \forall v \in V, \forall q_h \in Q_h \colon b_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v, q_h) = b(v, q_h) \end{aligned}$$

Daraus folgt dann die inf-sup-Bedingung.
Da $\nabla_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v)$ stückweise konstant ist, folgt mit (16)

$$\int_\Omega \nabla_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v) : \nabla_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v)\, dx = \int_\Omega \nabla v : \nabla_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v)\, dx \leq \|\nabla v\|\, \|\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v\|_h \tag{18}$$

und damit *(i)*. Analog folgt *(ii)* auch aus der Mittelwerteigenschaft, da $q_h \in Q_h$ stückweise konstant ist.
Sei nun $q_h \in Q_h$ beliebig. Dann erhält man aus der inf-sup-Bedingung von $b(\cdot,\cdot)$ und *(i), (ii)*:

$$\beta\,\|q_h\| \leq \sup_{v \in V} \frac{b(v,q_h)}{\|v\|_V} \overset{(ii)}{=} \sup_{v \in V} \frac{b_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v, q_h)}{\|v\|_V} \overset{(i)}{\leq} \sup_{v \in V} \frac{b_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v, q_h)}{\|\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v\|_h} \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{b_h(v_h, q_h)}{\|v_h\|_h}.$$

□

Bemerkung. Wir haben gesehen, dass die Ungleichung in *(i)* mit der bestmöglichen Konstante $c = 1$ für den nicht-konformen Interpolationsoperator I_{NC} gilt. Dies ist auch Hinweis darauf, dass das CR-Element sehr gut für das Stokes-Problem geeignet ist.