

CRFEM for the Stokes Problem

Pascal Huber

June, 30, 2014

1 Motivation und Einleitung

1. Was wir bisher gelernt haben
2. Was ich heute machen möchte
3. Was wir dazu benutzen werden

Wir beginnen mit einem kleinen Überblick zu den Stokes Gleichungen.

2 Das Stokes Problem

Schwache Formulierung des Stokes Problems Das Stokes Problem

$$-\Delta u + \nabla p = f \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

dient der Beschreibung von inkompressiblen Flüssigkeiten mit hoher Viskosität (und ist damit eine linearisierte Vereinfachung der Navier-Stokes-Gleichungen).

Im Folgenden betrachten wir als Grundlage für unsere spätere Diskretisierung das Stokes Problem mit homogenen Randbedingungen auf einem zwei dimensional Lipschitz-Gebiet:

Modellproblem 1 (Schwache Formulierung des Stokes Problems). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonales beschränktes Lipschitz-Gebiet und $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Wir definieren die Räume

$$V := H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \text{ und } Q := L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q(x) dx = 0\},$$

sowie die Bilinearformen $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ und $b: V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx \text{ und } b(v, q) := \int_{\Omega} \operatorname{div} v \cdot q dx. \quad (2)$$

Finde $(u, p) \in V \times Q$, sodass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{cases} a(u, v) - b(v, p) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)} & \text{für alle } v \in V \\ b(u, q) = 0 & \text{für alle } q \in Q. \end{cases} \quad (3)$$

Gesucht werden also der Geschwindigkeitsvektor $u \in V$ der Flüssigkeit und der dazugehörige Druck $p \in Q$. Die Funktion $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ beschreibt die gegebene äußere Kraftdichte, die auf die Flüssigkeit wirkt.

Wir bemerken, dass es sich im Gegensatz zu den bisherigen Vorträgen um ein vektorwertiges Problem handelt.

Ein Problem von der Form (3) wird als Sattelpunktproblem bezeichnet. Dabei wird die Gleichung $b(u, q) = 0$ als Nebenbedingung zur eigentlichen Minimierungsaufgabe verstanden.

Existenz und Eindeutigkeit für Lösungen von Sattelpunktproblemen Bevor wir zur Diskretisierung des Problems mit Hilfe von Crouzeix-Raviart Elementen übergehen, widmen wir uns kurz der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $(u, p) \in V \times Q$ für das Modellproblem 1.

Da es sich hier um ein “gemischtes Problem” handelt, ist der gewöhnliche Ansatz für den Existenzbeweis mit Hilfe des Lemmas von Lax-Milgram nicht möglich. Stattdessen verwenden wir das Splitting-Theorem von Brezzi, das notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer eindeutigen Lösung liefert. Dazu betrachten wir eine etwas allgemeinere Fassung unseres Modellproblems.

Modellproblem 2 (Sattelpunktproblem). Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(Q, \|\cdot\|_Q)$ zwei Hilbert-Räume und

$$a: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad b: V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Bilinearformen. Wir nehmen an, dass $a(\cdot, \cdot)$ symmetrisch ist und definieren den abgeschlossenen Unterraum

$$Z := \{v \in V : b(v, q) = 0 \text{ for all } q \in Q\}. \quad (4)$$

Weiter seien $F \in V'$ und $G \in Q'$

Finde $(u, p) \in V \times Q$, sodass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{cases} a(u, v) - b(v, p) = F(v) & \text{für alle } v \in V \\ b(u, q) = G(q) & \text{für alle } q \in Q. \end{cases} \quad (5)$$

Der folgende Satz garantiert Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für Modellproblem 2.

Theorem 1 (Brezzi's Splitting-Theorem). *Die Abbildung $L: V \times Q \rightarrow V' \times Q'$, die jedem Paar $(u, p) \in V \times Q$ gemäß dem Sattelpunktproblem (5) das Paar $(F, G) \in V' \times Q'$ zuordnet, ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ ist Z -elliptisch:*

$$\exists \alpha > 0 : \forall z \in Z : a(z, z) \geq \alpha \|z\|_V^2. \quad (6)$$

(ii) Die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ erfüllt die inf-sup-Bedingung:

$$\exists \beta > 0 : \inf_{q \in Q} \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V \|q\|_Q} \geq \beta. \quad (7)$$

Der Beweis dieses Satzes nutzt das *closed range theorem* und wird hier nicht angegeben. Wir bemerken, dass wir statt der Elliptizität der Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ die inf-sup-Bedingung für Satz 1 fordern müssen. Desweiteren weisen wir darauf hin, dass die Elliptizität von $a(\cdot, \cdot)$ nur auf dem Unterraum Z gefordert wird.

Existenz von Lösungen für das Stokes Problem Zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für das Stokes Problem 1 genügt es also nach Theorem 1 die Z -Elliptizität von $a(\cdot, \cdot)$ und die inf-sup-Bedingung für $b(\cdot, \cdot)$ nachweisen. (Die Stetigkeit der beiden Bilinearformen folgt direkt aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung.)

Wie bereits in den letzten Vorträgen gesehen, folgt die Elliptizität von $a(\cdot, \cdot)$ auf ganz $H_0^1(\Omega)$ aus der Friedrichs-Ungleichung.

Zum Beweis der inf-sup-Bedingung benötigen wir ein tiefgreifendes analytisches Resultat, bekannt als Ladyženskaya Abschätzung:

Theorem 2 (Ladyženskaya Ungleichung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann ist die Abbildung*

$$\operatorname{div}: Z^\perp \rightarrow L_0^2(\Omega), \quad v \mapsto \operatorname{div} v$$

ein Isomorphismus und es existiert eine Konstante $c = c(\Omega) > 0$, so dass gilt:

$$\forall q \in L_0^2(\Omega): \exists v_q \in Z^\perp: \operatorname{div} v_q = q \text{ und } \|v_q\|_{H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2)} \leq c \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aus Theorem 2 folgt unmittelbar die inf-sup-Bedingung für $b(\cdot, \cdot)$: Für alle $q \in Q$ gilt:

$$\sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \geq \frac{b(v_q, q)}{\|v_q\|_V} = \frac{\|q\|_Q^2}{\|v_q\|_V} \geq \frac{1}{c} \|q\|_Q, \quad (8)$$

wobei wir im vorletzten Schritt die explizite Definition von $b(\cdot, \cdot)$ ausgenutzt haben.

Fragen:

1. Normen von V und Q angeben?
2. Definition von $A : B$ angeben?
3. Was genau bedeutet die inf-sup-Bedingung?
4. Soll ich die Ladyženskaya Ungleichung rauslassen?

3 Stabilität der CRFEM für das Stokes Problem

3.1 Motivation

1. Was ist die generelle Schwierigkeit bei der Diskretisierung des Stokes-Problems?
2. Warum scheint das CR-Element gut geeignet zu sein? (Das könnte ich auch nach der Definition des diskreten Problems machen...)

3.2 Beschreibung der Diskretisierung

Nachdem wir nun die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für das Stokes Problem sichergestellt haben, wollen wir im Folgenden die Diskretisierung von Modellproblem 1 mit Hilfe des Crouzeix-Raviart Elements beschreiben.

Sei dazu \mathcal{T}_h ein quasi-uniforme Triangulierung von Ω . Zur Beschreibung der Triangulierung benutzen wir folgende Bezeichnungen:

- $h := \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_h\}$ mit $h_T := \text{diam}(T)$ für $T \in \mathcal{T}_h$
- \mathcal{E} bezeichnet die Menge aller Kanten von \mathcal{T}_h
- $\text{mid}(E)$ bezeichnet den Kantenmittelpunkt von $E \in \mathcal{E}$, $\text{mid}(\mathcal{E})$ die Menge aller Kantenmittelpunkte in \mathcal{T}_h

Zur Definitionen der Ansatzräume für die Diskretisierung benötigen wir noch folgende endlich-dimensionalen Funktionenräume:

Es bezeichne

$$P_k(\mathcal{T}_h) := \{v_h \in L^2(\Omega) : \forall T \in \mathcal{T}_h : v_h|_T \in P_k(T)\}$$

den Raum aller stückweiser Polynome vom Grad höchstens k bezüglich der Triangulierung \mathcal{T}_h . Wir definieren den *Crouzeix-Raviart FE-Raum* durch

$$\text{CR}_0^1(\mathcal{T}_h) := \{v_h \in P_1(\mathcal{T}_h) : v_h \text{ stetig in } \text{mid}(\mathcal{E}), v_h(\text{mid}(E)) = 0 \text{ für } E \in \partial\Omega \cap \mathcal{E}\}. \quad (9)$$

Mit Hilfe dieser Definitionen sind wir nun in der Lage die nicht-konforme Crouzeix-Raviart Diskretisierung des Modellproblems 1 anzugeben.

Modellproblem 3 (CR-NCFEM für das Stokes Modellproblem). Wir definieren die Ansatzräume $V_h := \text{CR}_0^1(\mathcal{T}_h) \times \text{CR}_0^1(\mathcal{T}_h)$ und $Q_h := L_0^2(\Omega) \cap P_0(\mathcal{T}_h)$ zusammen mit den Normen

$$\|q_h\| := \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \text{ auf } Q_h \quad \text{und} \quad \|v_h\|_h := \|\nabla_h v_h\| \text{ auf } V_h. \quad (10)$$

Weiter seien die diskreten Bilinearformen $a_h : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ und $b_h : V_h \times Q_h \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$a_h(u_h, v_h) := \int_{\Omega} \nabla_h u : \nabla_h v \, dx \quad \text{und} \quad b_h(v_h, q_h) := \int_{\Omega} q_h \text{div}_h v_h \, dx. \quad (11)$$

Für gegebenes $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ finde $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$, sodass folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) - b_h(v_h, p_h) = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)} & \text{für alle } v_h \in V_h \\ b_h(u_h, q_h) = 0 & \text{für alle } q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (12)$$

Fehlende Bemerkungen:

- Definition von ∇_h und div_h .
- $\|\cdot\|_h$ heißt Energienorm und ist tatsächlich eine Norm auf V_h (siehe Benjamins Vortrag).
- Auf $H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ stimmt $\|\cdot\|_h$ mit $\|\cdot\|_{H_0^1}$ überein.
- Die Methode ist nicht-konform, da offensichtlich $V_h \not\subseteq V$.
- Motivation: Warum eigentlich CR-NCFEM? \Rightarrow einfache Struktur, inf-sup-Stabilität, Approximationseigenschaften

3.3 Stabilität der CR-NCFEM

Bevor wir mit der Fehlerabschätzung für die Crouzeix-Raviart-Diskretisierung beginnen können, muss noch gezeigt werden, dass im Modellproblem 3 auch tatsächlich eine eindeutige Lösung (u_h, p_h) existiert.

Dazu verwenden wir wie auch schon für das kontinuierliche Problem die Aussage von Theorem 1. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass durch die Wahl der Normen $\|\cdot\|_h$ und $\|\cdot\|$ die Stetigkeit beider Bilinearformen und auch die Elliptizität von $a(\cdot, \cdot)$ auf dem Unterraum $Z_h := \{v_h \in V_h : \forall q_h \in Q_h : b_h(v_h, q_h) = 0\}$ (mit einer von h unabhängigen Konstante) gewährleistet ist.

Also besteht das eigentliche Kriterium für die Existenz einer eindeutigen Lösung wie schon im ursprünglichen Problem in der inf-sup-Bedingung. Auch darüber hinaus spielt die inf-sup-Bedingung in der Praxis für die Stabilität bei der numerischen Berechnung eine wichtige Rolle. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 1 (Stabilität von FEM für das Stokes Problem). Eine FE-Diskretisierung $V_h \times Q_h$ für das Modellproblem 1 heißt *inf-sup-stabil* (oder einfach nur *stabil*), falls die diskrete inf-sup-Bedingung erfüllt ist, d.h. es existiert $\beta > 0$ (unabhängig von der Gitterweite h), sodass

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b_h(v_h, q_h)}{\|v_h\|_h \|q_h\|} \geq \beta. \quad (13)$$

Im Folgenden wollen wir nun zeigen, dass die Stabilität für die Crouzeix-Raviart-FEM gegeben ist. Dazu verwenden wir das sogenannte *Fortin-Kriterium*, indem wir einen geeigneten nicht-konformen Interpolationsoperator definieren. (Diesen werden wir auch noch im Laufe der Medius-Analyse benötigen...)

Definition 2 (Nicht-konformer Interpolationsoperator und L^2 -Projektion). (i) Der nicht-konformen Interpolationsoperator $I_{\text{NC}}: H_0^1(\Omega) \rightarrow \text{CR}_0^1(\mathcal{T}_h)$ ist definiert durch

$$(I_{\text{NC}} v)(\text{mid}(E)) := \oint_E v \, ds \quad \text{für } E \in \mathcal{E}. \quad (14)$$

(ii) Wir definieren $\Pi_0: L^2(\Omega) \rightarrow P_0(\mathcal{T}_h)$ durch

$$(\Pi_0 f)|_T := \oint_T f \, dx \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_h. \quad (15)$$

Die Besonderheit von I_{NC} und Π_0 liegt vor allem darin, dass sie jeweils die Bestapproximation ihres Arguments im Bildraum darstellen:

Lemma 1 (Eigenschaften von I_{NC} und Π_0). (i) Es gelten die folgenden Mittelwerteigenschaften für alle $T \in \mathcal{T}_h$ und $v \in V$, $f \in L^2(\Omega)$:

$$\oint_T \nabla v \, dx = \oint_T \nabla(I_{\text{NC}} v) \, dx \quad \text{und} \quad \oint_T f \, dx = \oint_T L^2 f \, dx \quad (16)$$

(ii) Seien $v \in V$ und $f \in L^2(\Omega)$ gegeben. Dann gilt für alle $w \in P_0(\mathcal{T}_h)^2$ und alle $g \in P_0(\mathcal{T}_h)$:

$$\|\nabla_{\text{h}}(v - I_{\text{NC}} v)\| \leq \|\nabla_{\text{h}} - w\| \quad \text{und} \quad \|f - \Pi_0 f\| \leq \|f - g\|. \quad (17)$$

- Erwähne dass für vektorwertige Funktionen die Anwendung komponentenweise geschieht.
- Was ist mit dem Beweis von Lemma 1