Eine CRFEM für das Stokes Problem

Pascal Huber

30. Juni 2014

1 Motivation und Einleitung

Nachdem wir in den letzten Vorträgen die nicht-konforme Crouzeix-Raviart Diskretisierung für die Poissongleichung näher beleuchtet haben, wollen wir in diesem Vortrag das Crouzeix-Raviart Element zur numerischen Lösung der Stokes Gleichung

$$-\Delta u + \nabla p = f \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega \tag{1}$$

verwenden. Im Gegensatz zur Poissongleichung ist für die Stokes Gleichung eine Diskretisierung mit Hilfe von konformen P_1 Elementen nicht möglich, sodass eine einfache nicht-konforme Methode durchaus ihre Daseinsberechtigung hat.

Im Folgenden wollen wir zunächst die schwache Formulierung des Stokes Problems, sowie die Bedingungen zur eindeutigen Existenz von Lösungen wiederholen.
Anschließend definieren wir eine Finite Elemente Methode (FEM) für das Problem mit Hilfe von nicht-konformen Crouzeix-Raviart Elementen und zeigen, dass diese so definierte Diskretisierung stabil ist, d.h. eine bestimmte *inf-sup-Bedingung* erfüllt ist.
Dies ermöglicht uns dann auch im letzten Teil eine Fehlerabschätzung zur Bestapproximation dieser FEM mittels *Medius Analyse* durchzuführen.

2 Das Stokes Problem

Schwache Formulierung des Stokes Problems Das Stokes Problem beschreibt den Druck und das Geschwindigkeitsfeld von inkompressiblen Flüssigkeiten mit hoher Viskosität (und ist damit eine linearisierte Vereinfachung der Navier-Stokes-Gleichungen).

Die schwache Formulierung des Stokes Problem führt mathematisch zu einem Sattelpunktproblem. Wir betrachten das folgende Modellproblem:

Modellproblem 1 (Schwache Formulierung)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonales beschränktes Lipschitz-Gebiet und

$$V := H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^2) \text{ und } Q := L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q(x)\,dx = 0\}.$$

Wir definieren die Bilinearformen $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ und $b\colon V \times Q \to \mathbb{R}$ durch

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u : \nabla v \, dx \text{ und } b(v,q) := \int_\Omega \operatorname{div} v \cdot q \, dx$$

und die Normen $\|\cdot\|_V := \|\cdot\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ und $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.
Für $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ finde $(u,p) \in V \times Q$, sodass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{cases} a(u,v) - b(v,p) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} & \text{für alle } v \in V \\ b(u,q) = 0 & \text{für alle } q \in Q. \end{cases} \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet $u \in V$ das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit und $p \in Q$ deren Druck. In der Definition von $a(\cdot,\cdot)$ bezeichnet $A : B$ das Skalarprodukt für Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A : B := \sum_{i,j=1}^{2} A_{i,j} B_{i,j}.$$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Stokes Problems Bevor wir uns der Diskretisierung des Problems zuwenden, bleibt noch die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Problem 1 zu klären.

Da es sich hier um ein "gemischtes Problem" mit zwei Unbekannten handelt, ist der gewöhnliche Ansatz für den Existenzbeweis mit dem Lemma von Lax-Milgram nicht möglich. Stattdessen verwendet man das *Splitting-Theorem von Brezzi*, das die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für allgemeine Sattelpunktprobleme liefert.
Dazu muss gezeigt werden, dass zum einen die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ auf dem Unterraum

$$Z := \{v \in V : \forall q \in Q : b(v,q) = 0\} \tag{3}$$

elliptisch ist und dass $b(\cdot,\cdot)$ die folgende inf-sup-Bedingung erfüllt:

$$\exists \beta > 0 : \qquad \inf_{q\in Q} \sup_{v \in V} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V \, \|q\|} \geq \beta. \tag{4}$$

Im Fall der Stokes Gleichung sind beide Bedingungen erfüllt, was die eindeutige Existenz der Lösung $(u,p) \in V \times Q$ liefert.

3 CR-Diskretisierung und Stabilität

3.1 Motivation

Die Schwierigkeiten bei der Wahl geeigneter FE-Räume für das Stokes Problem bestehen nicht nur darin gute Konvergenzraten der diskreten Lösung zu erreichen, sondern auch schon in der Frage nach der eindeutigen Existenz dieser Lösungen.

Wie schon bei der Untersuchung der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für das kontinuierliche Stokes Problem müssen bei der Diskretisierung zwei Unbekannte bestimmt werden. Dies erfordert zum einen die Wahl von gemischen Finiten Elementen und zum anderen muss für diese FE-Räume wieder eine (diskrete) inf-sup-Bedingung erfüllt sein, um die eindeutige Existenz der Approximation sicherzustellen. Man spricht dabei auch von *inf-sup-Stabilität*.

Es stellt sich zum Beispiel heraus, dass die Diskretisierung des Stokes Problems mit Hilfe von konformen P_1-Elementen für die Geschwindigkeit und P_0-Elementen für den Druck nicht inf-sup-stabil sind. Stattdessen erhält man durch das Hinzufügen von sog. *bubble*-Funktionen zum Geschwindigkeitsraum das strukturell einfachste konforme FE-Paar.

Aus diesem Grund ist die Frage nach einfachen nicht-konformen FEM für das Stokes Problem durchaus berechtigt. Einen Hinweis darauf, dass Crouzeix-Raviart-Elemente (CRFEM) zusammen mit stückweise konstanten Druckfunktionen das Stokes Problem gut diskretisieren gibt die Tatsache, dass das diskrete Analogon zur Menge Z in (3)

$$Z_h := \{v_h \in V_h \colon \forall q_h \in Q_h \colon b_h(v_h, q_h) = 0\} \tag{5}$$

im Fall der CRFEM nicht trivial ist (im Gegensatz zur konformen P_1-P_0-Diskretisierung). Die Lösungsräume V_h und Q_h scheinen also für das Crouzeix-Raviart Element gut ausgewogen zu sein.

3.2 Beschreibung der Diskretisierung

Zur Diskretisierung von Modellproblem 1 verwenden wir eine quasi-uniforme Triangulierung $\mathcal{T}_h$ des Gebiets Ω und führen die folgenden Bezeichungen ein:

- $h := \max\{h_T \colon T \in \mathcal{T}_h\}$ mit $h_T := \operatorname{diam}(T)$ für $T \in \mathcal{T}_h$
- $\mathcal{E}$ und $\mathcal{N}$: Menge aller Kanten bzw. Knoten von $\mathcal{T}_h$
- $\operatorname{mid}(E)$: Kantenmittelpunkt von $E \in \mathcal{E}$, analog $\operatorname{mid}(\mathcal{E})$
- ∇_h und $\mathrm{div_h}$: Elementweiser Gradient bzw. Divergenz

Desweiteren definieren wir die Funktionenräume

$$P_k(\mathcal{T}_h) := \big\{v_h \in L^2(\Omega) \colon \forall T \in \mathcal{T}_h \colon v_h|_T \in P_k(T)\big\} \tag{6}$$

$$\mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h) := \{v_h \in P_1(\mathcal{T}_h) \colon v_h \text{ stetig in } \operatorname{mid}(\mathcal{E}), v_h(\operatorname{mid}(E)) = 0 \text{ für } E \in \partial\Omega \cap \mathcal{E}\} \tag{7}$$

und die Normen

$$\|f\| := \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad \|v\|_h := \|\nabla_h v\| \tag{8}$$

für $f \in L^2(\Omega)$ und $v \in \mathrm{CR}_0^1(\Omega) + H_0^1(\Omega)$. (Analog für vektorwertige Funktionen.)
Mit diesen Bezeichnungen können wir nun das diskrete Modellproblem zu (2) formulieren:

Modellproblem 2 (CR-Diskretisierung)**.** Seien $Q_h := L_0^2(\Omega) \cap P_0(\mathcal{T}_h)$ und $V_h := \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h) \times \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h)$. Weiter seien die diskreten Bilinearformen $a_h\colon V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ und $b_h\colon V_h \times Q_h \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$a_h(u_h, v_h) := \int_\Omega \nabla_h u : \nabla_h v \, dx \quad \text{und} \quad b_h(v_h, q_h) := \int_\Omega q_h \operatorname{div_h} v_h \, dx. \tag{9}$$

Für gegebenes $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ finde $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$, sodass

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) - b_h(v_h, p_h) = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} & \text{für alle } v_h \in V_h \\ b_h(u_h, q_h) = 0 & \text{für alle } q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{10}$$

Die Methode ist offensichtlich nicht-konform, da offensichtlich $V_h \not\subseteq V$.

3.3 Stabilität der CR-NCFEM

Wie bereits erwähnt, zeigt man die Existenz und Eindeutigkeit der diskreten Lösung (u_h, p_h) in Modellproblem 2 wieder mit Hilfe des Brezzi-Splitting Theorems.

Die Definition der Normen $\|\cdot\|_h$ und $\|\cdot\|_h$ stellt die Stetigkeit der Bilienarformen, sowie die Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ sicher. Das eigentliche Kriterium für die Existenz und Eindeutigkeit ist also wieder die inf-sup-Bedingung.

Definition 1 (Stabilität von FEM)**.** Eine FE-Diskretisierung $V_h \times Q_h$ für das Modellproblem 1 heißt *(inf-sup-)stabil*, falls $\beta > 0$ unabhänging von h exisitiert, sodass

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b_h(v_h, q_h)}{\|v_h\|_h \, \|q_h\|} \geq \beta. \tag{11}$$

Die inf-sup-Stabilität ist darüber hinaus auch für die Stabilität der numerischen Berechnung wichtig.

Satz 1 (Stabilität von CR-NCFEM)**.** *Die Crouzeix-Raviart Diskretisierung des Stokes Problems $V_h \times Q_h = \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \times (L_0^2(\Omega) \cap P_0(\mathcal{T}_h))$ aus Modellproblem 2 ist stabil.*

Für den Beweis der Stabilität definieren wir einen nicht-konformen Interpolationsoperator, der auch noch später für die Medius Analyse eine Rolle spielen wird.

Definition 2 (Nicht-konformer Interpolationsoperator und L^2-Projektion)**.** Wir definieren:

(i) $\mathrm{I_{NC}}\colon H_0^1(\Omega) \to \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h), \quad (\mathrm{I_{NC}}\, v)(\mathrm{mid}(E)) := \fint_E v \, ds \qquad \text{für } E \in \mathcal{E}.$

(ii) $\Pi_0\colon L^2(\Omega) \to P_0(\mathcal{T}_h), \quad (\Pi_0 f)|_T := \fint_T f \, dx \qquad \text{für } T \in \mathcal{T}_h.$

Die Definition von $\mathrm{I_{NC}}$ und Π_0 können auf natürliche Weise auf vektorwertige Funktionen erweitert werden.

Die Motivation für Definition 2 von $\mathrm{I_{NC}}$ und Π_0 besteht darin, dass sie jeweils eine Bestapproximation ihres Arguments darstellen.

Lemma 1 (Eigenschaften von I_{NC} und Π_0). *(i) Für alle $v \in V$ und $T \in \mathcal{T}_h$ gilt $\fint_T \nabla v \, dx = \fint_T \nabla(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v)\, dx$ und*

$$\|\nabla_h(v - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v)\| \leq \inf_{w \in P_0 \mathcal{T}_h{}^2} \|\nabla_h v - w\| \,. \tag{12}$$

(ii) Für alle $f \in L^2(\Omega$ und $T \in \mathcal{T}_h$ gilt $\fint_T f\, dx = \fint_T \Pi_0 f\, dx$ und

$$\|f - \Pi_0 f\| \leq \inf_{g \in P_0(\mathcal{T}_h)} \|f - g\| \,. \tag{13}$$

Wir können nun den nicht-konformen Interpolationsoperator I_{NC} verwenden, um die Stabilität der Crouzeix-Raviart FE-Räume zu zeigen.

Beweis von Satz 1. Für den Beweis zeigen, wir dass der nicht-konforme Interpolationsoperator ein *Fortin-Operator* ist, d.h. wir zeigen:

(i) $\exists c > 0$ (unabhängig von h): $\|\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v\|_h \leq c\,\|v\|_V$ für alle $v \in V$

(ii) $\forall v \in V, \forall q_h \in Q_h \colon b_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v, q_h) = b(v, q_h)$

Da $\nabla_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v)$ stückweise konstant ist, folgt mit (12)

$$\int_\Omega \nabla_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v) : \nabla_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v)\, dx = \int_\Omega \nabla v : \nabla_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v)\, dx \leq \|\nabla v\|\, \|\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v\|_h \tag{14}$$

und damit *(i)* mit $c = 1$. Auch *(ii)* folgt aus der Mittelwerteigenschaft, da $q_h \in Q_h$ stückweise konstant ist.
Sei nun $q_h \in Q_h$ beliebig. Dann erhält man aus der inf-sup-Bedingung von $b(\cdot,\cdot)$ und *(i)*, *(ii)*:

$$\beta\,\|q_h\| \leq \sup_{v \in V} \frac{b(v, q_h)}{\|v\|_V} \overset{(ii)}{=} \sup_{v \in V} \frac{b_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v, q_h)}{\|v\|_V} \overset{(i)}{\leq} \sup_{v \in V} \frac{b_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v, q_h)}{\|\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, v\|_h} \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{b_h(v_h, q_h)}{\|v_h\|_h} .$$

□

Bemerkung. Wir haben gesehen, dass die Ungleichung in *(i)* mit der bestmöglichen Konstante $c = 1$ für den nicht-konformen Interpolationsoperator I_{NC} gilt.

4 Medius Analyse der CRFEM für das Stokes Problem

In den vorangegangen Abschnitten haben wir gesehen, dass die Crouzeix-Raviart Diskretisierung eine relativ einfache FEM für das Stokes Problem darstellt, die zudem sehr gute Stabilitätseigenschaften aufweist.
Zum Abschluss des Vortrags wollen wir für die Fehleranalyse ein Resultat zur Best-Approximation der Crouzeix-Raviart Diskretisierung angeben und mit Hilfe einer Medius Analyse beweisen.

Satz 2 (Best-Approximation der CRFEM)**.** *Sei* $(u,p) \in V \times Q$ *die Lösung von (2) und* $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ *die Lösung von (10). Dann gilt:*

$$\|u - u_h\|_h + \|p - p_h\| \lesssim \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\| + \operatorname{osc}(f,h), \tag{15}$$

wobei die Oszillation von f *durch* $\operatorname{osc}(f,h) := \|h(f - \Pi_0 f)\|$ *definiert ist.*

Bemerkung. Man beachte, dass für dieses Resultat keine weiteren Regularitätsannahmen an die Lösung (u,p) gemacht werden muss.

4.1 Konforme Begleitabbildungen

Für den Beweis von Satz 2 verwenden wir wie schon im letzten Vortag sogenannte *konforme Begleitabbildungen* der Form

$$J_k \colon \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h) \to P_k(\mathcal{T}_h) \cap \mathrm{C}_0(\Omega).$$

Dadurch können wir einen Zusammenhang zwischen dem nicht-konformen Crouzeix-Raviart FE-Raum und konformen Räumen herstellen.

Wir definieren eine konforme Begleitabbildung von der Ordnung $k = 3$ wie folgt:

Definition 3 (Konforme Begleitabbildung J_3)**.** Wir definieren wir die konformen Begleitabbildungen $J_k \colon \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h) \to P_k(\mathcal{T}_h) \cap \mathrm{C}_0(\Omega)$ für $k = 1,2,3$ wie folgt für $v_h \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h)$:

(i) $J_1 v_h := \sum_{z \in \mathcal{N}(\Omega)} \left(|\mathcal{T}(z)|^{-1} \sum_{T \in \mathcal{T}(z)} v_h|_T(z) \varphi_z \right)$

(ii) $J_2 v_h := J_1 v_h + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} \left(\fint_E (v_h - J_1 v_h)\, ds \right) b_E$

(iii) $J_3 v_h := J_2 v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\fint_T (v_h - J_2 v_h)\, dx \right) b_T$.

Dabei bezeichnen $\mathcal{N}(\Omega)$ und $\mathcal{E}(\Omega)$ die Menge allere inneren Knoten bzw. Kanten und weiter φ_z die konforme nodale Basisfunktion bzgl. $z \in \mathcal{N}$, $b_E := 6\varphi_a\varphi_b$ die Bubble-Funktion bzgl. der Kante $E := \operatorname{conv}\{a,b\} \in \mathcal{E}$ und $b_T := 60\varphi_a\varphi_b\varphi_c$ die Bubble-Funktion für das Element $T := \operatorname{conv}\{a,b,c\} \in \mathcal{T}_h$.

Bemerkung. Auf V_h ist J_k komponentenweise definiert.

Die Motivation für die Definition von J_3 ist im Wesentlichen durch das folgende Lemma gegeben. Es besagt, dass die Begleitabbildung gewisse Mittelwerteigenschaften erfüllen, was wir im Hauptbeweis mehrmals ausnutzen werden.

Lemma 2 (Eigenschaften von J_3)**.** *Die konforme Begleitabbildung* $J_3 \colon \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h) \to P_3(\mathcal{T}_h) \cap \mathrm{C}_0(\Omega)$ *hat folgende Eigenschaften:*

(i) $\int_T \nabla_h (v_h - J_3 v_h)\, dx = 0$ *und* $\int_T v_h - J_3 v_h\, dx = 0$ *für* $v_h \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h)$ *und* $T \in \mathcal{T}_h$,

(ii) $\|\nabla_h (v_h - J_3 v_h)\| \lesssim \|h^{-1}(v_h - J_3 v_h)\| \lesssim \|\nabla_h v_h\|$ *für alle* $v_h \in \mathrm{CR}_0^1(\mathcal{T}_h)$.

Übersicht zu den verwendeten Relationen!

4.2 Beweis der Best-Approximation

Mit Hilfe von Lemma 2 sind wir nun in der Lage Satz 2 in zwei Schritten zu beweisen:

1. Für die Abschätzung von $\|u - u_h\|_h$ nutzen wir die Eigenschaften von J_3 aus.
2. Die Abschätzung des Druckterms $\|p - p_h\|$ leitet sich Wesentlichen aus der Stabilität des Crouzeix-Raviart Elements her.

Beweis von Satz 2.
Teil 1: Abschätzung für die Geschwindigkeit:
Wegen Lemma 1 genügt es

$$\|u - u_h\|_h \lesssim \|u - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u\|_h + \|p - \Pi_0\, p\| + \operatorname{osc}(f, h) \tag{16}$$

zu zeigen. Aus der Definition von $a_h(\cdot, \cdot)$ folgt

$$\|u - u_h\|_h^2 = a_h(u - u_h, u - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u) + a_h(u - u_h, \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u - u_h). \tag{17}$$

Wir schätzen den zweiten Term in (17) ab. Dazu setzen wir $w_h := \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u - u_h \in V_h$. Aus $\operatorname{div} u = 0$ und $\operatorname{div_h} u_h = 0$ erhält man mit der Mittelwerteigenschaft von I_{NC}, dass auch $\operatorname{div_h} w_h = 0$ punktweise gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} &a_h(u - u_h, w_h) \\ &\quad= a_h(u, w_h - J_3 w_h) + a(u, J_3 w_h) - a_h(u_h, w_h) \\ &\quad= a_h(u, w_h - J_3 w_h) + b(J_3 w_h, p) + \langle f, J_3 w_h\rangle_{L^2} - b_h(w_h, p_h) - \langle f, w_h\rangle_{L^2}\,. \end{aligned}$$

Wegen der Mittelwerteigenschaft von J_3 gilt für alle $g \in P_0(\mathcal{T}_h)^{2\times 2}$

$$\int_\Omega g : \nabla_h (w_h - J_3 w_h)\, dx = 0. \tag{18}$$

Mit $\Pi_0 \nabla u = \nabla_h \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u$ erhält man deshalb durch Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\begin{aligned} &a_h(u - u_h, w_h) \\ &\quad= a_h(u - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u, w_h - J_3 w_h) + b(J_3 w_h, p - \Pi_0\, p) + \langle f - \Pi_0\, f, J_3 w_h - w_h\rangle_{L^2} \\ &\quad\le \|u - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u\|_h \,\|w_h - J_3 w_h\|_h + \|p - \Pi_0\, p\|\, \|J_3 w_h\|_h \\ &\qquad + \|h(f - \Pi_0\, f)\|\, \left\|h^{-1}(J_3 w_h - w_h)\right\| \\ &\quad\overset{(ii)}{\lesssim} \left(\|u - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u\|_h + \|p + \Pi_0\, p\| + \operatorname{osc}(f, h)\right) \|w_h\|_h\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Aus der Mittelwerteigenschaft von I_{NC} erhält man

$$\|w_h\|_h = (a_h(\mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u - u_h, w_h))^{1/2} = (a_h(u - u_h, w_h))^{1/2}. \tag{20}$$

Eingesetzt in (19) ergibt das schließlich für den zweiten Summanden aus (17)

$$a_h(u - u_h, \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u - u_h) \lesssim \|u - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u\|_h + \|p - \Pi_0\, p\| + \operatorname{osc}(f, h). \tag{21}$$

Für den ersten Summanden folgt mit der Youngschen Ungleichung

$$a_h(u - u_h, u - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u) \le \frac{1}{2}\left(\|u - u_h\|_h^2 + \|u - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u\|_h^2\right), \tag{22}$$

woraus schließlich zusammen mit (21) die Abschätzung (16) folgt.

Teil 2: Abschätzung für den Druck:
Es genügt wieder nur

$$\|p - p_h\| \lesssim \|u_h - u\|_h + \|p - \Pi_0\, p\| + \operatorname{osc}(f, h) \tag{23}$$

zu zeigen. Dazu verwenden wir die inf-sup-Stabilität des Elementpaares $V_h \times Q_h$. Da $(p_h - \Pi_0\, p) \in Q_h$, gibt es ein Element $v_h \in V_h$ mit $\|v_h\|_h = 1$, so dass

$$\|p_h - \Pi_0\, p\| \lesssim b_h(v_h, p_h - \Pi_0\, p). \tag{24}$$

Da p_h die Lösung des diskreten Problems ist gilt mit $\Pi_0\, v_h = \Pi_0\, J_3 v_h$

$$\|p_h - \Pi_0\, p\| \lesssim a_h(u_h, v_h) - \langle f, v_h\rangle_{L^2} - b_h(J_3 v_h, \Pi_0\, p). \tag{25}$$

Durch Addition von $0 = b(J_3 v_h, p) - a(u, J_3 v_h) + \langle f, J_3 v_h\rangle_{L^2}$ erhält man unter Ausnutzung der Mittelwerteigenschaft von J_3:

$$\begin{aligned}
&\|p_h - \Pi_0\, p\| \\
&\quad\lesssim a_h(u_h, v_h) - a(u, J_3 v_h) + b(J_3 v_h, p - \Pi_0\, p) + \langle f, J_3 v_h - v_h\rangle_{L^2} \\
&\quad= a_h(u_h - u, v_h) - a(u, v_h - J_3 v_h) + b(J_3 v_h, p - \Pi_0\, p) + \langle f, J_3 v_h - v_h\rangle_{L^2} \\
&\quad= a_h(u_h - u, v_h) - a(u - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u, v_h - J_3 v_h) \\
&\qquad+ b(J_3 v_h, p - \Pi_0\, p) + \langle f - \Pi_0\, f, J_3 v_h - v_h\rangle_{L^2}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung und Lemma 2, sowie $\|u - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u\|_h \le \|u - u_h\|_h$ (siehe Lemma 1) erhält man schließlich wegen $\|v_h\|_h = 1$

$$\begin{aligned}
\|p_h - \Pi_0\, p\| &\lesssim \|u_h - u\|_h \|v_h\|_h + \|u - \mathrm{I}_{\mathrm{NC}}\, u\|_h \|v_h - J_3 v_h\|_h \\
&\qquad + \|p - \Pi_0\, p\| \|J_3 v_h\|_h \|h(f - \Pi_0\, f)\| \left\|h^{-1}(J_3 v_h - v_h)\right\|_h \\
&\lesssim (\|u_h - u\|_h + \|p - \Pi_0\, p\| + \operatorname{osc}(f, h)) \|v_h\|_h \\
&\lesssim \|u_h - u\|_h + \|p - \Pi_0\, p\| + \operatorname{osc}(f, h).
\end{aligned} \tag{27}$$

Mit der Dreiecksungleichung erhält man dann die Abschätzung (23) und damit letztendlich die Behauptung von Satz 2. □