Realizado por: Pedro Schilling
Fuente: *"Probabilidade: Um Curso em Nível Intermedio"*, Barry James"

Apunte Leyes de Grandes Números y Teorema Central del Límite

---

1 Definiciones Básicas

En primer lugar, necesitamos algunas nociones sobre espacios de probabilidad.

1. **Espacio Muestral Ω:** Es el conjunto de resultados posibles, donde se entiende por resultado posible como un resultado elemental e indivisuble del experimento. En otras palabras, sería el conjunto de eventos que entendemos, péro no necesariamente los que queremos medir.

2. **Álgebra de Conjuntos $\mathbb{A}$ de Ω**: Son los eventos que buscamos medir, los que necesariamente deben ser subconjuntos de los conjuntos que entendemos. Deben cumplir una serie de condiciones ($\Omega \in \mathbb{A}, P(\Omega) = 1; A \in \mathbb{A} \Rightarrow A^c \in \mathbb{A}, P(A) = 1 - P(A^c); A, B \in \mathbb{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathbb{A}$)

3. **Medida de Probabilidad P.** Función definida en un $\mathbb{A}$ tal que cumple una serie de axiomas.

Ahora, En esta sección presentaremos una serie de desigualdades y teoremas dados por conocidos para las demostraciones de este capítulo. En algunos casos, se incluirán las demostraciones.

1.1 Definiciones

[Independencia 2 a 2] Eventos aleatorios $A_i,\ i \in I$ (con I un conjunto de índices) son independientes 2 a 2 si $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)\ \forall i, j \in I,\ i \neq j$

1.2 Teoremas

[Desigualdad de Tchebyshev] Sea X una variable aleatoria no-negativa ($X \geq 0$). Para todo $\lambda > 0$, tenemos que

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} EX$$

Sea $Y = \lambda \mathbb{I}(X \geq \lambda)$. Luego, tenemos que $0 \leq Y \leq X$, ya que si $X \geq \lambda \Rightarrow Y = \lambda \Rightarrow 0 \leq Y \leq X$. Si $X < \lambda \Rightarrow Y = 0$, luego $0 = Y \leq X$. Por lo tanto, $E(Y) \leq E(X)$. Como Y es discreta $\Rightarrow E(Y) = 0 \cdot P(X < \lambda) + \lambda \cdot P(X \geq \lambda)$ Finalmente, tenemos que:

$$\lambda P(X \geq \lambda) \leq E(X) \iff P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}$$

Sea X una variable aleatoria y $\phi(x)$ una función real medible. Entonces:

$$E\phi(x) = \int y dF_{\phi(x)}(y) = \int \phi(x) dF_X(x)$$

Donde la existencia de una de las integrales implica la existencia de la otra, y la igualdad entre ellas. (Para $\phi(x) = x^k,\ \forall k \geq 0$) Supongamos k es par (demostración para caso impar es análoga).

$$EX^k = \int_0^\infty P(X^k > t)dt = \int_0^\infty P(X > t^{1/k})dt + \int_0^\infty P(X < -t^{1/k})dt =$$

$$= \int_0^\infty [1 - F(k^{1/k})]dt + \int_0^\infty F[(-k^{1/k})-]dt =$$

Haciendo cambio de variable $t = s^k$ y además notando que $F((-s)-) = F(-s)$ excepto en un número ennumerable de puntos, tenemos

$$\int_0^\infty [1 - F(s)]ks^{k-1}ds + \int_0^\infty F[-s]ks^{k-1}ds =$$

Cambiando nuevamente variables $u = -s$:

$$= k\left[\int_0^\infty [1 - F(s)]s^{k-1}ds - \int_{-\infty}^0 F[u]u^{k-1}du\right]$$

Donde esto último es una descomposición de $\int_{-\infty}^\infty x^k dF(x)$ realizando una integral por partes.

[Teorema de la Convergencia Dominada]

Sea $Y, X, X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias en $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ tales que Y es integrable, $|X_n| \le Y \, \forall n$, y $X_n \to X$ (i.e, $X_n(\omega) \to X(\omega) \, \forall \omega$). Entonces, X_n y X son integrables, y $EX_n \to EX$.

1.3 Lemmas

Sea X una variable aleatoria integrable con función de distribución F. Entonces

$$\sum_{n=1}^\infty \left\{\frac{1}{n^2}\int_{-n}^n x^2 dF(x)\right\} < \infty$$

Usaremos la siguiente desigualdad $\sum_{n=j} \frac{1}{n^2} \le \frac{2}{j}$. Como $\int_{-n}^n x^2 dF(x) = \sum_{j=-n+1}^n \int_{j-1}^j x^2 dF(x)$, tenemos:

$$\sum_{n=1}^\infty \left\{\frac{1}{n^2}\int_{-n}^n x^2 dF(x)\right\} = \sum_{n\ge 1}\sum_{j=-n+1}^n \frac{1}{n^2}\int_{j-1}^j x^2 dF(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^\infty \sum_{n=j}^n \frac{1}{n^2}\int_{j-1}^j x^2 dF(x) + \sum_{j=-\infty}^0 \sum_{n=|j|+1}^n \frac{1}{n^2}\int_{j-1}^j x^2 dF(x)$$

$$\le 2\sum_{j=1}^\infty \int_{j-1}^j \frac{x^2}{j} dF(x) + 2\sum_{j=-\infty}^0 \int_{j-1}^j \frac{x^2}{|j|+1} dF(x)$$

Finalmente como tenemos que $\frac{x^2}{j} \le x, x \in (j-1, j] \; j \ge 1 \; \wedge \; \frac{x^2}{|j|+1} \le |x|, x \in (j-1, j], \forall j \le 0$,

$$\sum_{n=1}^\infty \left\{\frac{1}{n^2}\int_{-n}^n x^2 dF(x)\right\} \le 2\sum_{j=1}^\infty \int_{j-1}^j x dF(x) + 2\sum_{j=-\infty}^0 \int_{j-1}^j |x| dF(x) =$$

$$= 2\sum_{j=-\infty}^\infty \int_{j-1}^j |x| dF(x) = 2\int_{j-1}^j |x| dF(x) = 2E|X| < \infty$$

2 Introducción Ley Fuerte y Débil

En primer lugar, definamos los tipos de convergencia que estudiaremos:

[Convergencia en Probabilidad (P)] Y_n converge para Y **en probabilidad** si para todo $\varepsilon > 0$, $P(|Y_n - Y| > \varepsilon) = 0$ cuando $n \to \infty$.

[Convergencia Casi Segura (CS)] Y_n converge para Y **casi seguramente** si $P(n \to \infty \Rightarrow Y_n \to Y) = 1$.

Note que convergencia casi segura es más que convergencia en probabiliad. De esta forma, tenemos que

$$CS \Rightarrow P, \quad P \nRightarrow CS$$

Probaremos lo anterior. En primer lugar, enunciaremos la proposición, y después la demostraremos.

Si $Y \xrightarrow{CS} Y_n$, entonces $Y \xrightarrow{P} Y_n$

Suponga que $Y_n \xrightarrow{CS}$, y fije $\epsilon > 0$. Sea

$$A_0 = \{\omega : Y_n(\omega) \to Y(\omega)\}$$

.

Por hipótesis, tenemos que $P(A_0) = 1$. Luego, tenemos que $\forall \omega \in A, |Y_n(\omega) \to Y(\omega)| < \varepsilon$ para todo n suficientemente grande. Sea A_n el evente "para todo $k \geq n, \quad |Y_k - Y| < \varepsilon$", i.e:

$$A_n = \bigcap_{k=n} [|Y_k - Y| < \varepsilon]$$

Luego, si $\omega \in A_0$, entonces $\omega \in A_n$ para algún $n(\varepsilon)$. Pero, tenemos que $A_n \subset A_{n+1}$, por lo tanto:

$$A_0 \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$$

Donde se utilizó que $A_1 \cap A_2 = A_2 \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n$. Luego, si $n \to \infty \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$

Por lo anterior, tenemos que $1 = P(A_0) \leq P(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$, donde usamos el axioma de continuidad de P. Esto es relevante, dado que podría no ser continua la función de probabilidad, y podría haber un salto entre $P(\lim_{n\to\infty} A_n)$ y $P(A_0)$. Por lo anterior, tenemos que $P(A_n) \uparrow 1$. Finalmente, tenemos que

$$A_n \subset [|Y_n - Y| < \varepsilon] \to 1 \quad \vee \quad P([|Y_n - Y| \geq \varepsilon]) = 1 - P(|Y_n - Y| < \varepsilon) \to 0$$

Ahora, definiremos cuáles son las leyes de grandes números que estudiaremos en este apunte. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aletorias integrables en $(\Omega, \mathbb{A}, P)$, y sean $S_1, S_2, \ldots$ sus sumas parciales $S_n = X_1 + X_2 + \cdots$.

[Ley Débil] Diremos que $X_1, X_2, \ldots$ satisfacen la **ley de los grandes números débil** si

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0 \vee P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n - (EX_1 + \cdots + EX_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

[Ley Fuerte] Diremos que $X_1, X_2, \ldots$ satisfacen la **ley de los grandes números fuerte** si

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{CS} 0 \vee \frac{X_1 + \cdots + X_n - (EX_1 + \cdots + EX_n)}{n} \xrightarrow{CS} 0$$

Por la Proposición 1, sabemos que $Fuerte \Rightarrow Débil$. Además, note que si $EX_n = \mu \quad \forall n$, entonces X_n satisface alguna de las leyes de grandes números sí y sólo sí $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{CS \vee P} \mu$. Ahora, comenzaremos a mostrar los teoremas que incluyen condiciones para que se cumplan las leyes de grandes números.

[Ley débil de Tchebyshev] Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias independientes 2 a 2, con varianzas finitas y uniformemente limitadas ($\exists c\mathbb{R} : V(X_n) \leq c, \forall n$). Luego, $X_1, X_2, \dots$ satisfacen la ley de los grandes números débil

En primer lugar, note que

$$V(S_n) = V(X_1 + \cdots +_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \leq nc$$

Donde utilizamos independencia 2 a 2. Por desigualdad de Tchebyshev, tenemos que

$$P\left(\frac{|S_n - ES_n|}{n} \geq \epsilon\right) = P\left(|S_n - ES_n| \geq n\epsilon\right) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{nc}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{c}{\epsilon^2 n} \to 0$$

Del Teorema de Tchebyshev, como corolario podemos obtener el teorema de Bernoulli:

[Ley de los Grandes Núermos de Bernoulli]. Consideremos una secuenca de ensayos binomiales independientes con la misma probabilidad p de éxito en cada ensayo. Si S_n es el número de éxitos en los primeros n ensayos, entonces tenemos que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

La demostración de lo anterior es directa del teorema de Tchebyshev, por lo que se omite. Finalmente, Khintchin logró probar la ley débil con hipótesis más generales que las de Tchebyshev, en paticular, sin asumir que la varianza está acotada (aunque pide que las variables sean iid). Enunciaremos el teorema, pero no se demostrará pues es un corolario de otros teoremas que veremos más adelante.

[Ley débil de Khintchin] Si $X_1, X_2, \dots$ son iid. e integrables, con promedio común μ, entonces:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

3 Secuencias de Eventos y Lema de Borell Cantelli

Sea $A_1, A_2, \dots$ una secuencia de eventos i.e. $A_n \subset \Omega \forall n \in \mathbb{N}$, entonces

El **límite superior** de la secuencia está definido por:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

El límite inferior de la secuencia está definido por:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

$\limsup_{n\to\infty} A_n \iff$ ["ocurrencia de un número infinito de A_n"]

($\Rightarrow$) $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n \Rightarrow \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \forall n$. Luego, esto implica que $\omega \in A_{k_1}$ para algún k_1. Pero, $\omega \in \bigcup_{k=k_1+1}^{\infty} A_k$. Luego, $\omega \in A_{k_2}$, con $k_2 > k_1$. Iterando, obtenemos una secuencia de $k_1 < k_2 < \dots$ que dependen de ω tal que $\omega \in A_{k_n} \forall n$. Luego, ω pertenece a un infinito de los A_n.

($\Leftarrow$) $\omega \in$ "número infinito de A_n" $\Rightarrow \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow \omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$.

$\liminf_{n\to\infty} A_n \iff$ ["ocurrencia de A_n para todo n suficientemente grande"]

($\Rightarrow$) $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n \Rightarrow \omega \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k$ para algún $n_0 = n_0(\omega)$, por lo que $\omega \in A_k \forall k \geq n_0$.

($\Leftarrow$) $\omega \in$ ["ocurrencia de A_n para todo n suficientemente grande"] $\Rightarrow \exists n_0(\omega) tq \forall k \geq n_0 \omega \in A_k \Rightarrow \omega \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k \Rightarrow \omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$

Finalmente, note que si $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n = A$, entonces $P(A_n) \to P(A)$ si los eventos son aleatorios, dado que la continuidad de $P()$ es axiomática.

[Lema Borell-Cantelli] Sean $A_1, A_2, \dots$ eventos aleatorios en $(\Omega, \mathbb{A}, P)$.

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P("A_n \text{ infinitas veces"}) = 0$

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \wedge \Rightarrow P("A_n \text{ infinitas veces"}) = 1$

a) Si $\sum P(A_n) < \infty, \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pero como $["A_n \text{ infinitas veces"}] \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} \forall n$, entonces $P("A_n \text{ infinitas veces"}) \leq P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0$.

b) Basta probar que $P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 1$ ya que intersección enumerable de eventos de probabilidad 1 tambien tiene probabilidad 1. Por tanto, sea $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Luego, B_n contiene $\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k \forall m \in \mathbb{N}$. Luego

$$B_n^c \subset \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c$$

.

Luego, $\forall m$

$$1 - P(B_n) = P(B_n^c) \leq P(\bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c) = \prod_{k=n}^{n+m} (1 - P(A_k))$$

Finalmente, como $1 - p \leq e^{-p} \forall 0 \leq p \leq 1$ tenemos:

$$1 - P(B_n) \leq \prod_{k=n}^{n+m} e^{-P(A_k)} = e^{\sum_{k=n}^{n+m} A_k} \to 0 \Rightarrow P(B_n) \to 1$$

Donde utilizamos que si $m \to \infty \Rightarrow \sum_{k=n}^{n+m} A_k \to \infty$.

Del lema anterior, surge el siguiente corolario:

Consideremos una secuencia de ensayos binomiales independientes con probabilidad p_n de éxito en el n-ésimo intento. Sea $X_n = 1$ si éxito en el n-ésimo intento, y $X_n = 0$ si no. Luego, vale que

a) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty \Rightarrow P(\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty) = 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < +\infty \Rightarrow P(\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty) = 1$

La prueba es directa, por lo que se omite en este caso.

4 Ley de los Grandes Números Fuerte

[Recíproca para ley fuerte de Kolmogorov] Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias iid. Si $E(X_1) = +\infty$, entonces con probabilidad 1 la secuencia

$$\frac{|S_n|}{n} = \frac{|x_1 + \dots + x_n|}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

No es limitada

Si $E(x_1) = +\infty$, entonces $E\left(\frac{|X_1|}{k}\right) = +\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Luego, por criterio de integrabilidad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{|X_1|}{k} \geq n\right) = \infty$$

Como las X_n están identicamente distribuidas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{|X_1|}{k} \geq n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{|X_n|}{n} \geq k\right), \forall k$$

Como $\left[\frac{|X_n|}{n} \geq k\right]$ son independientes, sigue por Borell-Cantelli que

$$P\left(\frac{|X_n|}{n} \geq k \text{ infinitas veces}\right) = 1, \forall k$$

Definiendo $B_k = \left[\frac{|X_n|}{n} \geq k \text{ infinitas veces}\right]$, tenemos que

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 1$$

Pues intersección enumerable de eventos de probabilidad 1 también tiene probabilidad 1. Pero el evento $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ es "$\frac{|X_n|}{n} \geq k$ para un número infinito de n para todo k", por lo que la secuencia $\frac{|X_n|}{n}$ es ilimitada. SPDG, $S_0 = 0$. Luego, $\frac{|X_n|}{n} = \frac{|S_n - S_{n-1}|}{n} \leq \frac{|S_n|}{n} + \frac{|S_{n-1}|}{n}$. Luego, si $\frac{|X_n|}{n}$ es ilimitado, entonces $\frac{|S_n|}{n} \wedge \frac{|S_{n-1}|}{n}$ también lo son. Además, si $n \geq 2$, entonces $\frac{|S_{n-1}|}{n} = \frac{|S_{n-1}|}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}$. Luego, esto implica que si $\frac{|S_{n-1}|}{n}$ sí y sólo sí $\frac{|S_{n-1}|}{n-1}$ ilimitado, ya que $\frac{1}{2} \leq \frac{n-1}{n} < 1$. Luego, $\frac{|X_n|}{n}$ ilimitado implica $\frac{|S_n|}{n}$ ilimitada.

[Desigualdad de Kolmogorov] Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias indepnedientes tal que $EX_k = 0 \wedge V(X_k) < \infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Luego, para todo $\lambda > 0$:

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_n| \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2} V(S_n) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

Por desigualdad de Tchebyshev, tenemos que $P(|S_n| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2} V(S_n) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$. Sea $A = \left[\max_{1 \leq k \leq n} S_n^2 \geq \lambda^2\right]$. Descomponiendo A conforme la primera vez que se da $S_k^2 \geq \lambda^2$:

$$A_1 = [S_1^2 \geq \lambda^2]$$
$$A_2 = [S_1^2 \leq \lambda^2,\ S_2^2 \geq \lambda^2]$$
$$A_2 = [S_1^2 \leq \lambda^2, \ldots S_{k-1}^2 \leq \lambda^2,\ S_k^2 \geq \lambda^2],\ \text{para } 2 \leq k \leq n$$

Entonces, A_k son disjuntos 2 a 2 y $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Así, tendremos que $\mathbb{I}_A = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{A_k}$. Así,

$$S_n \geq S_n \mathbb{I}_A = \sum_{k=1}^{n} S_n^2 \mathbb{I}_{A_k} \Rightarrow ES_n \geq \sum_{k=1}^{n} ES_n^2 \mathbb{I}_{A_k}$$

Buscamos sustituir S_n por S_k ya que $S_k^2 > \lambda^2$ en A_k, pero no necesariamente $S_n^2 \geq \lambda^2$. Para eso, usamos lo siguiente: $S_n^2 = (S_n - S_k + S_k)^2 = (S_n - S_k)^2 + S_k^2 + 2(S_n - S_k)S_k \geq S_k^2 + 2(S_n - S_k)S_k$. Luego:

$$ES_n^2 \mathbb{I}_{A_k} \geq ES_k^2 I_{A_k} + 2E((S_n - S_k)S_k \mathbb{I}_{A_k})$$

.

Como $S_n - S_k = \sum_{i=k+1}^{n} A_i$ y $S_k = \sum_{i=1}^{k} A_i$, ambos eventos son independientes, por lo que $E((S_n - S_k)S_k \mathbb{I}_{A_k}) = E(S_n - S_k)ES_k \mathbb{I}_{A_k}$. Finalmente, como $E(S_n - S_k) = 0$, tenemos:

$$ES_n \mathbb{I}_{A_k} \geq ES_k^2 \mathbb{I}_{A_k} \geq \lambda^2 E\mathbb{I}_{A_k} = P(A_k) \Rightarrow ES_n^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda^2 P(A_k) = \lambda^2 P(A) \Rightarrow P(A) = P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_n| \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2} ES_n^2$$

[Ley Fuerte de Kolmogorov]

Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias independientes e integrables. Suponga además, que se cumple una de las siguientes condiciones:

I) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(X_n)}{n^2} < +\infty$

II) $X_1, X_2, \dots$ son idénticamente distribuidas

Entonces, la serie X_n satisface la Ley de los Grandes Números Fuerte.
Haremos la prueba en orden:

I) SPDG, asuma que $EX_n = 0$. Mostraremos que $S_n \xrightarrow{CS} 0$, donde $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Así, basta mostrar que $M_n \equiv \max_{2^n \le k \le 2^{n+1}} \frac{S_k}{k} \to 0$ casi seguramente, cuando $n \to \infty$. Provaremos en 2 etapas.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(M_n \ge \frac{1}{m}\right) < \infty, \forall m$

ii) $M_n \xrightarrow{CS} 0$, por Borell Cantelli

Comenzaremos con **i)**. Sea m fijo. Entonces, para todo n,

$$P\left(\max_{2^n \le k \le 2^{n+1}} \frac{|S_k|}{k} \ge \frac{1}{m}\right) \le P\left(\max_{2^n \le k \le 2^{n+1}} |S_k| \ge \frac{2^n}{m}\right) \le P\left(\max_{1 \le k \le 2^{n+1}} |S_k| \ge \frac{2^n}{m}\right) \le \frac{m^2}{4^n} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} V(X_k)$$

Definiendo $A_n = \left[\max_{2^n \le k \le 2^{n+1}} \frac{|S_k|}{k} \ge \frac{1}{m}\right] = \left[M_n \ge \frac{1}{m}\right]$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \le m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} V(X_k) = m^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n:\, 2^n \ge k} V(X_k) \frac{1}{4^n} = m^2 \sum_{k=1}^{\infty} V(X_k) \sum_{n:\, 2^n \ge k} \frac{1}{4^n}$$

Y finalmente, como $\sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^j} \frac{4}{3}$, entonces

$$\sum_{n:\, 2^n \ge k} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} \frac{1}{4^{j(k)}} \le (\text{como } k \le 2^{j(k)+1}) \le \frac{16}{3k^2}$$

Por lo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \le m^2 \frac{16}{3} \sum k = 1^{\infty} \frac{V(X_k)}{k^2} < \infty \text{ por hipótesis}$$

.

Ahora, vamos por **ii)**. Por Borell-Cantelli:

$$P(A_n \text{ infinitas veces}) = 0 \iff \forall m,\ P(M_n \ge \frac{1}{m} \text{ Un número finito de veces}) = P(B_n) = 1$$

Así, tenemos que $P(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m) = 1$. Por último, solo falta mostrar que $[\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m] \iff [M_n \to 0]$:

$$\begin{aligned}
\omega \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m \quad &\iff \quad \forall m,\ M_n(\omega) \ge \frac{1}{m} \text{ Para un número finito de n's} \\
&\iff \quad \forall m,\ 0 \le M_n(\omega) \le \frac{1}{m} \text{ para todo } n \text{ suf. grande} \\
&\iff \quad n \to \infty \Rightarrow M(\omega) \to 0
\end{aligned}$$

II) SPDG, suponemos que $EX_n = 0$. Ahora, truncaremos las variables X_n. Esto es, $Y_n = X_n \mathbb{1}_{-n \leq X_n \leq n}$. Sea $Z_n = X_n - Y_n$ tal que $X_n = Y_n + Z_n$. Luego,

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} + \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}$$

Trabajaremos con lo anterior. La prueba tendrá 3 partes

a) $\frac{Z_1+\cdots+Z_n}{n} \xrightarrow{CS} 0$ (Usamos Borell Cantelli)
b) $\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n} - \frac{EY_1+\cdots+EY_n}{n} \xrightarrow{CS} 0$. Utilizamos el Lemma ? y el Teorema 2
c) $\frac{EY_1+\cdots+EY_n}{n} \xrightarrow{0}$ Por Teorema de la Convergencia Dominada

Luego, intersectando los eventos casi ciertos, tenemos que

$$A = [\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} \xrightarrow{CS} 0],\ B = [\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} - \frac{EY_1 + \cdots + EY_n}{n} \xrightarrow{CS} 0]$$
$$P(A) = P(B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = 1$$

.

Comenzamos con **a)**. Por definición, $Z_n \not\to 0 \iff X_n \neq Y_n \iff X_n \notin (-n, n]$. Luego, $P(Z_n \neq 0) = P(X_n \notin (-n, n]) \leq P(|X_n| \geq n)$. Pero $A_n = [Z_n \neq 0]$ satisface

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq n)$$

Por integrabilidad, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq n) < \infty$. Luego, por Borell-Cantelli tenemos que

$$P(A_n \text{ infinitas veces}) = 0 \iff P(Z_n \neq 0 \text{ infinitas veces}) \iff P(Z_n \neq 0 \text{ número finito de veces}) = 1$$
$$\iff P(Z_n = 0\, \forall n \text{ suf. grande}) = 1$$

Luego, $Z_n = 0$ para un n suficientemente grande,, por lo que

$$Z_n \to 0 \Rightarrow \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} \Rightarrow P(n \to \infty \Rightarrow \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} \to 0) = 1 \iff \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} \xrightarrow{CS} 0$$

Ahora, vamos con la parte **b)**. Sea F la función de distribución común, $F = F_{X_n}$. Verifiquemos las condiciones de **I** para que serie Y_n cumpla ley Fuerte de Kolmogorov. Como $Y_n = X_n \mathbb{1}_{-n \leq X_n \leq n}$ tenemos

$$V(Y_n) = EY_n^2 = E(X_n \mathbb{1}_{-n \leq X_n \leq n})^2 = \int x^2 \mathbb{1}_{-n \leq X_n \leq n}(x) dF(x) = \int_{-n}^{n} x^2 dF(x)$$

Donde usamos el Teorema 2. Luego, de la última igualdad tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(Y_n)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{-n}^{n} x^2 dF(x) < +\infty$$

Donde al final usamos el Lema 1. Como se cumplen los requisitos de **I)**, entonces **b)** está probado.

Finalmente, vamos con **c)**. Para esto es suficiente demostrar que $EY_n \to 0$. Pero

$$EY_n = EX_n \mathbb{1}_{-n \leq X_n \leq n} = EX_1 \mathbb{1}_{-n \leq X_n \leq n} \to EX_1 = 0$$

Donde en el paso final usamos el Teorema de la Convergencia Dominada. Con esto, terminamos nuestra demostración.