Интересной задачей математической физики является исследование нелинейных четырехмерных моделей, обладающих устойчивыми солитоноподобными решениями. Одна из таких моделей, с переменными принимающими значения в компактном многообразии, была предложена более 25 лет назад в работе [1]. Эта модель (модель Фаддеева-Скирма) имеет нетривиальные приложения в физике твердого тела [2], в физике плазмы [3], ее расширения возникают при определенном выборе переменных в описании инфракрасного предела теории Янга-Миллса. [4].

Одним из важных свойств модели Фаддеева-Скирма является возможность интерпретации ее статических решений в виде узлов состоящих из скрученных трубок. В то же время, как было показано Вакуленко и Капитанским в работе [5], энергия такого солитонного решения имеет нетривиальную оценку снизу в терминах его топологической характеристики — заряда Хопфа. Этот заряд имеет простую интерпретацию через степень зацепления линий узла.

В настоящей работе при помощи концепции скрученных трубок дается наглядное объяснение степенного показателя $3/4$ входящего в оценку ВК в области высоких энергий. Это позволяет авторам сделать предположение об области применимости степенных приближений для энергии конкретных решений рассматриваемой модели. Кроме того, в работе показывается, каким образом концепция скрученных трубок, вместе с оценкой ВК, могут оказаться полезными для построения статических решений модели Фаддеева-Скирма с произвольно высокой энергией.

Перейдем к более подробному рассмотрению обсуждаемой модели и ее свойств. Лагранжиан модели задается следующей функцией производных поля $\vec{n}$ принимающего значения в двумерной сфере S^2:

$$L = g(\partial_\mu \vec{n})^2 + (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n})^2. \tag{1}$$

Это выражение инвариантно относительно преобразований Лоренца и включает в себя одну константу, которая имеет размерность $[g] = \text{Длина}^{-2}$.

С произвольной векторной функцией $\vec{n}$ естественным образом связана 3-форма

$$J = F \wedge A,$$

в которой

$$F = (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n}, \vec{n})\, \mathrm{d}\, x_\mu \wedge \mathrm{d}\, x_\nu$$
$$\mathrm{d}\, A = F.$$

Формы F и J являются замкнутыми на четырехмерном пространстве, если длина вектора $\vec{n}$ является постоянной величиной (вектор $\vec{n}$ параметризуется двумя углами Эйлера). Из этого следует, что интеграл формы J по пространственным координатам

$$Q = \int_{R^3} F \wedge A \tag{2}$$

является сохраняющейся величиной.

В то же время, если мы компактифицируем модель, устремив поле на (пространственной) бесконечности к одному значинию $\vec{n}_\infty$, то тогда при фиксированном времени поле $\vec{n}$ определяет отображение

$$S^3 \to S^2,$$

и Q становится его топологической характеристикой — зарядом Хопфа.

Статические решения модели могут быть найдены путем минимизации потенциальной энергии

$$E = g(\partial_k \vec{n})^2 + (\partial_k \vec{n} \times \partial_j \vec{n})^2.$$

Сопоставляя общее выражение для топологического заряда (2) с конкретным потенциалом E при помощи теорем вложения в функциональных пространствах можно получить неравенство (оценку) Вакуленко-Капитанского

$$E \geq \mathrm{const}\, Q^{3/4}. \tag{3}$$

Из этого неравенства немедленно следует важное заключение: суперпозиция двух статических решений, разделенных в пространстве, в общем случае не является конфигурацией с минимальной энергией при данном заряде, то есть между такими решениями имеется нетривиальное взаимодействие [6].

1 Концепция скрученных трубок

Статические решения модели Фаддеева-Скирма имеют простую интерпретацию в виде узлов связанных из скрученных трубок. Предположим, что предел поля $\vec{n}$ на пространственной бесконечности это северный полюс сферы S^2, или, в координатах, это вектор $(0, 0, 1)$. Тогда прообраз южного полюса отображения $\vec{n}$ это замкнутая и, в общем случае, неодносвязная кривая, то есть узел в трехмерном пространстве. Прообраз окрестности южного полюса является, в свою очередь, множеством замкнутых кривых, образующих трехмерное многообразие, которое мы будем называть, по аналогии с гидродинамикой, трубкой. В общем случае отображение $\vec{n}$ переводит произвольно малый замкнутый контур проходящий один раз вокруг линии узла в контур вокруг южного полюса сферы с нетривиальным индексом обхода. Тем не менее, численные эксперименты по построению решений модели показывают, что устойчивыми являются только решения с тривиальным (т.е. равным по модулю 1) индексом обхода [7].

Из определения заряда Q для отображения $\vec{n}$ следует, что он может быть вычислен как степень степень зацепления кривых — прообразов двух любых отличных друг от друга точек на сфере S^2. В качестве этих точек всегда можно взять южный полюс и произвольную точку из его малой окрестности. Простые соображения показывают, что для того чтобы конфигурация была устойчивой кривые - прообразы точек этой окрестности должны вращаться вокруг центральной линии узла, то есть трубка долна быть скрученной. Это достаточно очевидно, по крайней мере, для тороидальной конфигурации — трубка должна быть скручена для того чтобы она не могла сжаться в точку.

Предлагаемая в настоящей работе концепция описания статических решений при помощи скрученных трубок подразумевает, что для таких решений можно ввести некоторые локальные характеристические параметры, то есть параметры которые зависят только от константы взаимодействия g, но не от энергии или заряда Хопфа солитона. В качестве таких параметров в работе [8] были введены «оптимальное» скручивание на единицу длины Λ и линейная плотность энергии ρ.

Для того чтобы можно было говорить о статических решениях модели как о скрученных трубках, необходимо ввести еще один параметр, а именно, радиус трубки r или половину среднего расстояния между центрами соседних трубок. Конечно, в каждой конкретной точке конфигурации это расстояние зависит от угла между центральными линиями трубок, от их продольного изгиба и вариации степени скручивания. Но, тем не менее, мы будем предполагать что данная модель устроена одинакова на всех масштабах энергии и ей присущ некоторый характерный радиус r. Принимая во внимание то обстоятельство, что модель определяется единственным параметром g из соображений размерности можно сделать вывод что перечисленные выше величины должны быть связаны соотношением вида

$$g = \Lambda^2 = r^{-2} = \rho \tag{4}$$

(с точностью, разумеется, до безразмерных констант).

Существование радиуса r на самом деле является нетривиальным обстоятельством. Попытки оценить его более точно, чем приведенное выше соотношение наталкиваются на определенные препятствия. Сравнительно простое двумерное моделирование двух параллельных скрученных трубок показывает что эти трубки притягиваются друг к другу и образуют трубку с двойным индексом обхода. В то время как для трехмерных моделей известно, как было сказано выше, что этого не происходит. К сожалению, трехмерное моделирование требует слишком больших вычислительных ресурсов и на настоящий момент изучены только несколько первых (до $Q = 8$) устойчивых состояний, по которым затруднительно говорить о характерном радиусе трубки. Насколько нам известно, отдельно задача о вычислении расстояния взаимодействия скрученных трубок вообще не ставилась.

В заключение описания деталей концепции скрученных трубок ее можно дополнить простейшим «правилом отбора». Оно состоит в том, что при описании решения модели в виде узла соприкасающиеся точки двух соседних трубок должны быть прообразами одной и той же точки на сфере S^2. Будучи тривиальным условием непрерывности отображения $\vec{n}$ это простое соображение, тем не менее, при наличии точных констант в соотношении (4), может оказаться полезным для построения сложных статических конфигураций.

2 Связь концепции скрученных трубок с оценкой ВК

В этой части мы приведем простое наглядное объяснение оценки Вакуленко-Капитанского при помощи введеной ранее концепции скрученных трубок. А именно, мы покажем, что для статических решений с достаточно большой энергией топологический заряд Q пропорционален энергии решения в степени 4/3:

$$Q \sim E^{4/3}. \tag{5}$$

Объяснение выглядит следующим образом. Будем рассматривать статическое решение (солитон) как тонкую эластичную трубку радиуса r (или площади $s = \pi r^2$) энергия которой в главном порядке пропорциональна длине L [8]. Эта трубка завязана в узел и ее концы отождествлены. Узел может быть многосвязным, то есть состоящим из нескольких замкнутых трубок. При таких предположениях линейный размер узла x пропорционален его объему (который пропорционален длине L) в степени одна треть:

$$x \sim L^{1/3}.$$

Для того чтобы вычислить топологический заряд необходимо «растащить» линии-прообразы южного полюса и какой-либо точки его окрестности, подсчитывая при этом количество операций расцепления между линиями.

Число таких операций по вытаскиванию наружу части линии-прообраза единичной длины пропорционально линейному размеру узла x. Действительно, при плотно завязанном узле, требуется в среднем одно расцепление для того чтобы протащить отрезок прообраза длиной $2r$ на расстояние $2r$ и $\frac{x}{2r}$ расцеплений для того чтобы протащить его на расстояние x. Таким образом, для растаскивания всего узла из трубок длины L потребуется $\frac{Lx}{4r^2}$ операций расцепления, то есть

$$Q \sim Lx \sim L^{4/3} \sim E^{4/3}. \tag{6}$$

В этом вычислении мы пренебрегли операциями по расцеплению линий-прообразов, связанными с их вращением друг относительно друга (скрученностью трубки). Так как число «скручиваний» на единицу длины трубки является фиксированным параметром [8], то число таких расцеплений пропорционально длине трубки L, а значит и первой степени энергии E.

Несмотря на то, что приведенное вычисление ни в коей мере не является точным, оно, тем не менее, демонстрирует природу нетривиального показателя 4/3 в оценке Вакуленко-Капитанского. Этот показатель происходит из самозацепления связанных комопонент узла и зацепления разных компонент друг за друга. В то же время, благодаря скрученности трубок, топологический заряд Q имеет составляющую пропорциональную энергии в первой степени, которая является доминирующей при малых размерах узла. Это указывает на необоснованность попыток [7], [8], [9] аппроксимировать экспериментальные данные для низких энергий при помощи степенной зависимости с показателем 4/3.

3 Тривиальное следствие

Простое вычисление, представленное в предыдущей части, позволяет сделать оценку для связи средней длины связанных компонент узла с энегией (размерами) узла. Предположим, что искомая длина l является некоторой функцией размера (а значит и энергии) узла:

$$l = l(x), \tag{7}$$

$$L = kl(x), \tag{8}$$

где k это число связанных компонент. Мы можем грубо оценить степень зацепления одной связанной компоненты со всеми остальными компонентами при помощи следующего выражения:

$$4\pi\Big(\frac{l(x)}{2\pi}\Big)^2 \cdot \frac{1}{4\pi r^2} = \Big(\frac{l(x)}{2\pi r}\Big)^2 \sim l^2(x),$$

где $4\pi(\frac{l(x)}{2\pi})^2$ это площадь окружности с границей длины $l(x)$, а $4\pi r^2$ — площадь одной трубки. Топологический заряд всего узла получается умножением приведенной выше степени зацепления на число связанных компонент узла и добавлением вклада от самозацепления компонент, последний может быть оценен при помощи формулы (6):

$$Q \lesssim kl^2(x) + kl^{4/3}(x) \sim kl^2(x) \sim L \cdot l(x).$$

В то же время, на основании той же формулы заряд Q имеет порядок $L \cdot x$, а значит

$$x \lesssim l(x) \lesssim L \sim x^3. \qquad (9)$$

Правое неравенство здесь является тривиальной оценкой сверху для l через суммарную длину всех связанных компонент L.

Неравенство (9) по видимому не может быть улучшено в рамках концепции скрученных трубок. Попытки построить конфигурации с длиной и степенью зацепления удовлетворяющими соотношению (6) показывают, что длина отдельной трубки может лежать во всем диапазоне от x до x^3. Неравенство (9) также показывает, что для построения конфигураций с произвольно высокой энергией нельзя использовать компонеты фиксированного размера без объединения составляющих их трубок.

4 Пример конфигурации

В заключение приведем конструктивный пример последовательности конфигураций, состоящих из скрученных трубок, энергия и заряд которых удовлетворяют соотношению (5). Такие конфигурации могут служить кандитатами для построения явного вида стационарных состояний модели (1) со сколь угодно высокой энергией.

Каждая из этих конфигураций представляет из себя подобие стального троса завязанного в узел (одинаковый для всей последовательности), концы которого замкнуты. То есть это линейный объект, состоящий из цилиндрических слоев вставленных друг в друга. Каждый слой намотан из рассматриваемых здесь скрученных трубок, обвивающихся по спирали вокруг центральной линии объекта и, таким образом, заполняющих оболочку слоя. Трубки на торцах каждого слоя состыкованы друг с другом в некоторой последовательности, так что весь слой может быть намотан как одной, так и несколькими трубками (связными компонентами).

Приведем оценку для энергии и топологического заряда рассмариваемых конфигураций. Для простоты будем считать число слоев в тросе при помощи его радиуса R. Для того чтобы конфигурации в последовательности были подобны друг другу длина каждой из них $L_{\text{ц.л.}}$ должна быть пропорциональна R, а значит их объем и энергия пропорциональны R^3.

Будем предполагать, что угол между каждой трубкой и центральной линией троса является некоторой малой величиной, одинаковой для всех слоев и конфигураций. Можно заметить, что тогда степень зацепления всех трубок одного слоя с центральной линией пропорциональна длине троса (то есть R) и не зависит от радиуса слоя. Степень зацепления всех трубок двух слоев друг с другом пропорциональна $Rr_{\min}$, то есть степени зацепления внешнего слоя с центральной линией умножить на число трубок во внутреннем слое (или на его радиус $r_{\min}$). Степень зацепления всех трубок всех слоев друг с другом будет суммой по всем парам слоев (число которых пропорционально R^2) величин $Rr_{\min}$. Очевидно, что такая сумма пропорциональна R^4. Более точные вычисления дают приближение

$$Q = \frac{1}{3}\pi^2 L_{\text{ц.л.}} \tau r^{-4} R^3,$$

где τ это тангенс угла между трубками и центральной линией узла, а r — средний радиус трубок.

Заключение

Мы привели схему описания статических решений модели Фаддеева-Скирма при помощи узлов состоящих из скрученных трубок. Было дано наглядное объяснение, каким образом эта схема согласуется с оценкой Вакуленко-Капитанского. Приведен пример последовательности конфигураций со сколь угодно большой энергией, удовлетворящих степенному соотношению с показателем 3/4.

Список литературы

[1] L. D. Faddeev, Quantization of Solitons. *Preprint IAS* print-75-QS70, 1975.

[2] A. J. Niemi, Dual superconductors and SU(2) Yang-Mills, JHEP 0408, (2004) 035; hep-th/0403175.

[3] E. Babaev, L. D. Faddeev, A. J. Niemi, Phys. Rev. **B65** (2002) 100512(R).

[4] L. D. Faddeev, A. Niemi, Aspects of Electric-Magnetic Duality in SU(2) Yang-Mills Theory. Phys. Lett., **B525** (2002), 195-200.

[5] А. Ф. Вакуленко, Л. В. Капитанский, Докл. Акад. Наук. СССР **246** (1979), 840–842.

[6] R. S. Ward, The interaction of two Hopf solitons, Phys. Lett. **B473** (2000), 291-296.

[7] J. Hietarinta, P. Salo, Ground state in the Faddeev-Skyrme model, Phys. Rev. **D62**, 081701(R).

[8] M. Miettinen, A. Niemi, Yu. Stroganov, Aspects of duality and confining strings, Phys. Lett. **B474** (2000) 303–308; hep-th/9908178.

[9] R. S. Ward, Hopf Solitons on S^3 and R^3, DTP-98/55; hep-th/9811176.

Аннотация Для модели Фаддеева-Скирма при помощи концепции скрученных трубок дается наглядное объяснение степенного показателя 3/4 входящего в оценку Вакуленко-Капитанского в области высоких энергий. Это позволяет авторам сделать предположение об области применимости степенных приближений для энергии конкретных решений рассматриваемой модели. В работе показывается, каким образом концепция скрученных трубок, вместе с оценкой ВК, могут оказаться полезными для построения статических решений модели с произвольно высокой энергией.