

**Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций  
Российской Федерации**  
**Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение  
высшего образования**  
**«Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций  
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича»**

---

Кафедра радиотехники

Дисциплина «Цифровая обработка сигналов»

**Лабораторная работа № 10**

**ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (часть 2)**

Выполнили:

ст. гр. РТ-31  
№бр 5  
Куприянов П.А.  
Пимкин А.А.  
Наумов Е.А

Проверил:

ассистент каф. РТ,  
Бойко И.А. \_\_\_\_\_

Санкт-Петербург  
2025

# СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

**ТАБЛИЦА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ**

Переменная	Назначение	Значение	Идентификатор
$N_{\delta p}$	Номер бригады	$N_{\delta p}$	№ = 5
$N$	Период (длина) последовательности	$N = 64$	$N = 64$
$f_d$	Частота дискретизации	$f_d = 2000(N_{\delta p} \bmod 5 + 1)$	$FS = 2000$
$A_1$	Амплитуды дискретных гармоник	$A_1 = 1 + 0.01N_{\delta p}$	$A1 = 1.05$
$A_2$		$A_2 = 2A_1$	$A2 = 2.1$
$f_1$	Частоты дискретных гармоник	$f_1 = f_d/4$	$f1 = 500$
$f_2$		$f_2 = 1.5f_1$	$f2 = 750$
$M$	Период последовательности	$M = 71$	$M = 71$
$f_{11}$	Частоты дискретных гармоник	$f_{11} = 1.1f_1$	$f1\_1 = 550$
$f_{21}$		$f_{21} = 1.07f_2$	$f2\_1 = 802.5$
$f_{12}$	Частоты дискретных гармоник	$f_{12} = 1.05f_1$	$f1\_2 = 525$
$f_{22}$		$f_{22} = f_{12} + 1.1\Delta f$ $\Delta f = f_d/N$	$f2\_2 = 559.375$
$x_3(n)$	Периодическая последовательность	$x_3(n) = N_{\delta p}[0.1 0.2 0.3 0.4 0.5]$	Вектор $x3 = [0.5 1.0 1.5 2.0 2.5]$
$x_4(n)$	Периодическая последовательность	$x_4(n) = N_{\delta p}[0.5 0.4 0.3 0.2 0.1]$	Вектор $x4 = [2.5 2.0 1.5 1.0 0.5]$
$x_5(n)$	Периодическая последовательность	$x_5(n) = N_{\delta p}[0.1 0.2 0.3]$	Вектор $x5 = [0.5 1.0 1.5]$
$x_6(n)$	Периодическая последовательность	$x_6(n) = N_{\delta p}[0.3 0.2 0.1 0.2 0.3]$	Вектор $x6 = [1.5 1.0 0.5 1.0 1.5]$
$b_0$ $b_1$ $b_2$	Коэффициенты числителя передаточной функции	$b_0 = 0.5 + 0.02N_{\delta p}$ $b_1 = b_0(-1)^{N_{\delta p}+1}(0.982 + 0.0178)N_{\delta p}$ $b_2 = b_0(0.8 + 0.2(N_{\delta p} \bmod 5))$	Вектор $b = [0.6 2.994 0.48]$
$a_0$ $a_1$ $a_2$	Коэффициенты знаменателя передаточной функции	$a_0 = 1$ $a_1 = (-1)^{N_{\delta p}}(0.778 + 0.025)N_{\delta p}$ $a_2 = 0.64 + 0.006N_{\delta p}$	Вектор $a = [1 -4.015 0.67]$
$N_1$	Длина ИХ	$N_1 = N_{\delta p} \bmod 10 + 20$	$N1 = 25$
$N_2$	Длина воздействия	$N_2 = N_{\delta p} \bmod 1 + 30$	$N2 = 30$
$N_3$	Длина воздействия	$N_3 = N_{\delta p} \bmod 10 + 200$	$N3 = 205$

ФОРМУЛЫ ДПФ:

- трактовка ДПФ для периодической последовательности  
Это спектральный состав конечной последовательности отсчётов одного периода сигнала
- трактовка ДПФ для конечной последовательности  
ДПФ для конечной последовательность это ДПФ одного периода бесконечной периодической последовательности
- смысл всех переменных

## ПУНКТЫ ЗАДАНИЯ

1. Проверка равенства Парсеваля.

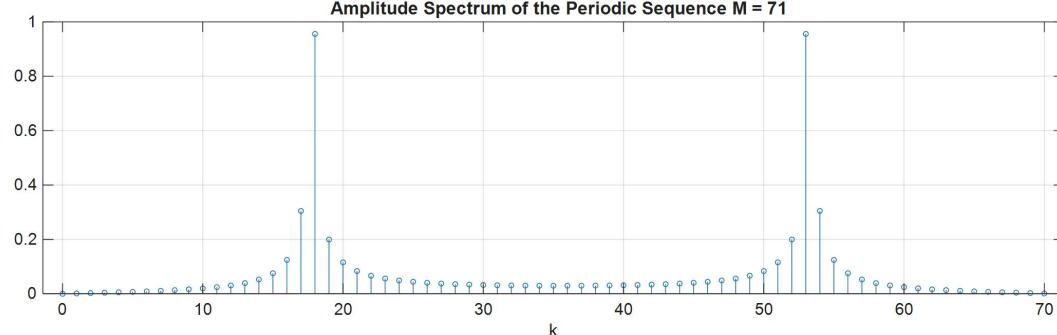
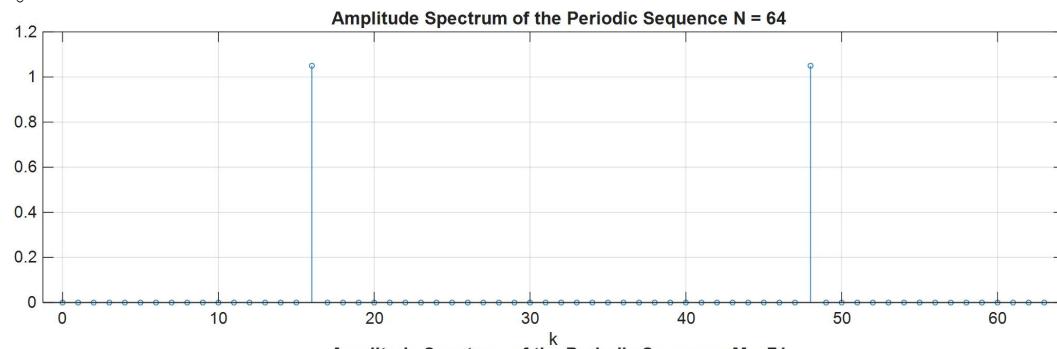
$$E1 = 176.4 \quad E2 = 176.4$$

Пояснить:

- смысл равенства Парсеваля  
оно связывает связывает энергию, вычисленную во временной и частотной областях.

2. Исследование эффекта растекания спектра для одной дискретной гармоники.

$$\begin{array}{ccccccc} \% & & & & & & \\ N & = & 64 & \longrightarrow & P_N & = & 16 \\ M & = & 71 & \rightarrow & P_M & = & 17.75 \\ \% & & & & & & \end{array}$$



Пояснить:

- с какой целью определяется значение  $P$  ;

Понять будет ли данная гармоника выведена на спектре, или наделённая ей энергия размажется по соседним частотам.

- в каком случае и почему наблюдается растекание спектра.

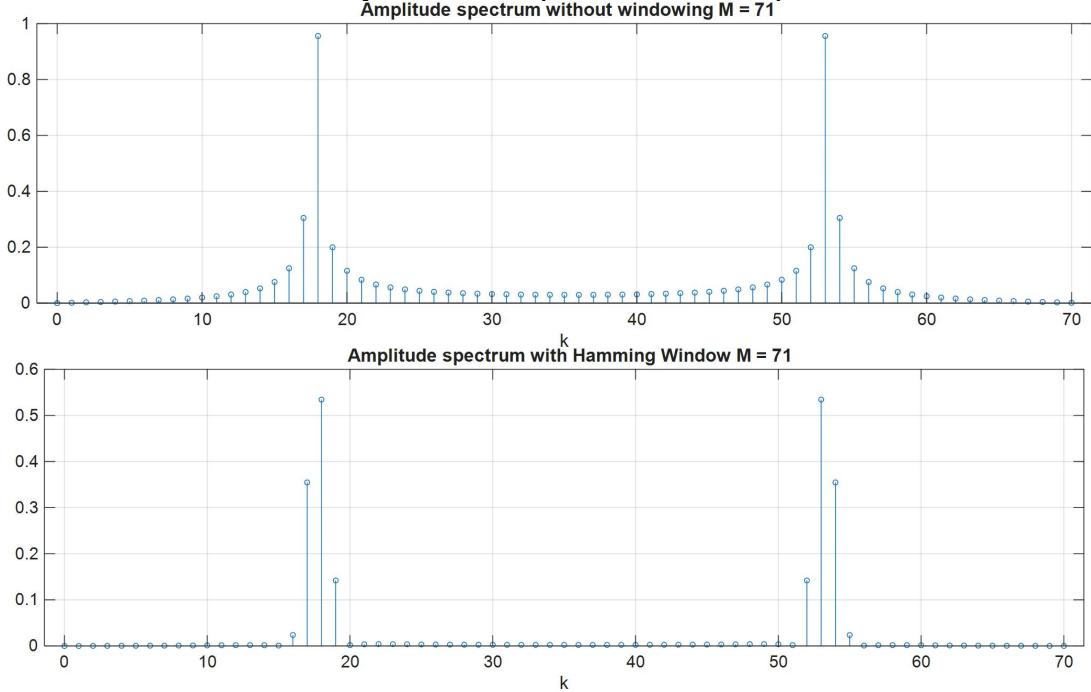
Есть  $P$  не является целым числом.

```

n = 0:(N-1); % ДИСКРЕТНОЕ НОРМИРОВАННОЕ ВРЕМЯ (ПЕРИОД N)
k = 0:(N-1); % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ ЧАСТОТА (ПЕРИОД N)
w1 = 2*pi*f1/Fs; % НОРМИРОВАННАЯ ЧАСТОТА (РАД)
x_N = A1*cos(w1*n); % ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ (ПЕРИОД N)
X_N = fft(x_N); % ДПФ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (ПЕРИОД N)
MOD_N = (2/N)*abs(X_N); % АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (ПЕРИОД N)
MOD_N(1) = (1/N)*abs(X_N(1));
n1 = 0:(M-1); % ДИСКРЕТНОЕ НОРМИРОВАННОЕ ВРЕМЯ (ПЕРИОД M)
k1 = 0:(M-1); % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ ЧАСТОТА (ПЕРИОД M)
x_M = A1*cos(w1*n1); % ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ (ПЕРИОД M)
X_M = fft(x_M); % ДПФ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (ПЕРИОД M)
MOD_M = (2/M)*abs(X_M); % АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (ПЕРИОД M)
MOD_M(1) = (1/M)*abs(X_M(1));
P_N = N*f1/Fs; % ЧИСЛО ПЕРИОДОВ ДИСКРЕТНОЙ ГАРМОНИКИ С ЧАСТОТОЙ f1 НА ПЕРИОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ N
P_M = M*f1/Fs; % ЧИСЛО ПЕРИОДОВ ДИСКРЕТНОЙ ГАРМОНИКИ С ЧАСТОТОЙ f1 НА ПЕРИОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ M

```

### 3. Исследование возможности уменьшения растекания спектра с помощью окна.



Пояснить:

- Что изменилось в результате применения окна:

Суммарная амплитуда после применения окна Хемминга стала приближенно равна заданной, без этого энергия растекалась на огромное кол-во частот.

Произошло быстрое затухание гармоник, точно не принадлежащих исходному сигналу.

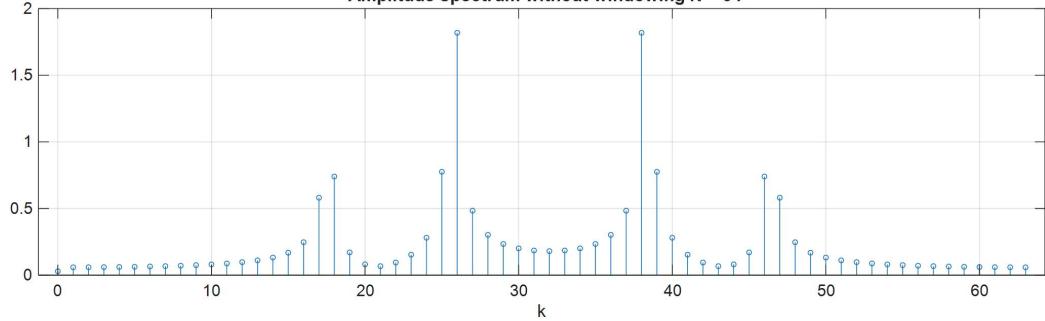
```
win_M = hamming(M)'; % ОКНО ХЭММИНГА – ВЕКТОР-СТОЛБЕЦ ДЛИНЫ М
xw_M = x_M.*win_M; % ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, ВЗВЕШЕННАЯ ОКНОМ
XW_M = fft(xw_M); % ДПФ ВЗВЕШЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
MODW_M =(2/M)*abs(XW_M); % АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР ВЗВЕШЕННОЙ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
MODW_M(1) =(1/M)*abs(XW_M(1));
```

4. Исследование эффекта растекания спектра для суммы двух дискретных гармоник.

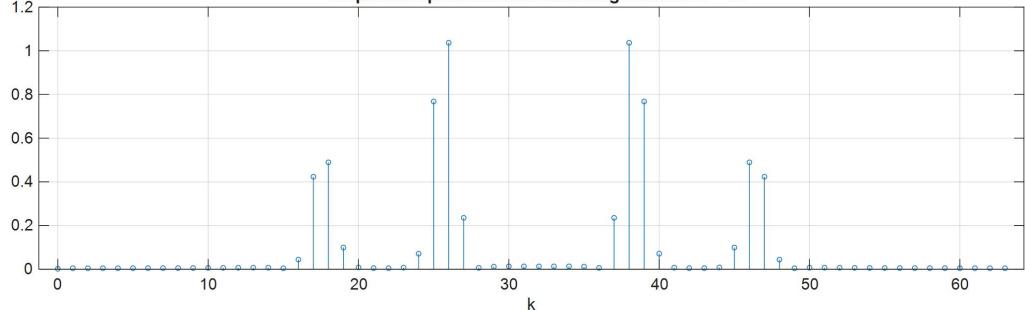
$f1\_1 = 550 \rightarrow P1\_1 = 17.6$

$f2\_1 = 802.5 \rightarrow P2\_1 = 25.68$

Amplitude spectrum without windowing N = 64



Amplitude spectrum with Hamming Window N = 64



Пояснить:

- причина растекания спектра и цель применения окна:

Спектр растекается из-за того, что истинные гармоники находятся между шагом ДПФ.

Окно применено для минимизации последствия растекания спектра.

```
win_N = hamming(N); % ОКНО ХЭММИНГА – ВЕКТОР-СТОЛБЕЦ ДЛИНЫ N
xw1 = x1.*win_N; % ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, ВЗВЕШЕННАЯ ОКНОМ (ПЕРИОД N)
XW1 = fft(xw1); % ДПФ ВЗВЕШЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (ПЕРИОД N)
MODW1 = (2/N)*abs(XW1); % АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
MODW1(1) = (1/M)*abs(XW1(1));
```

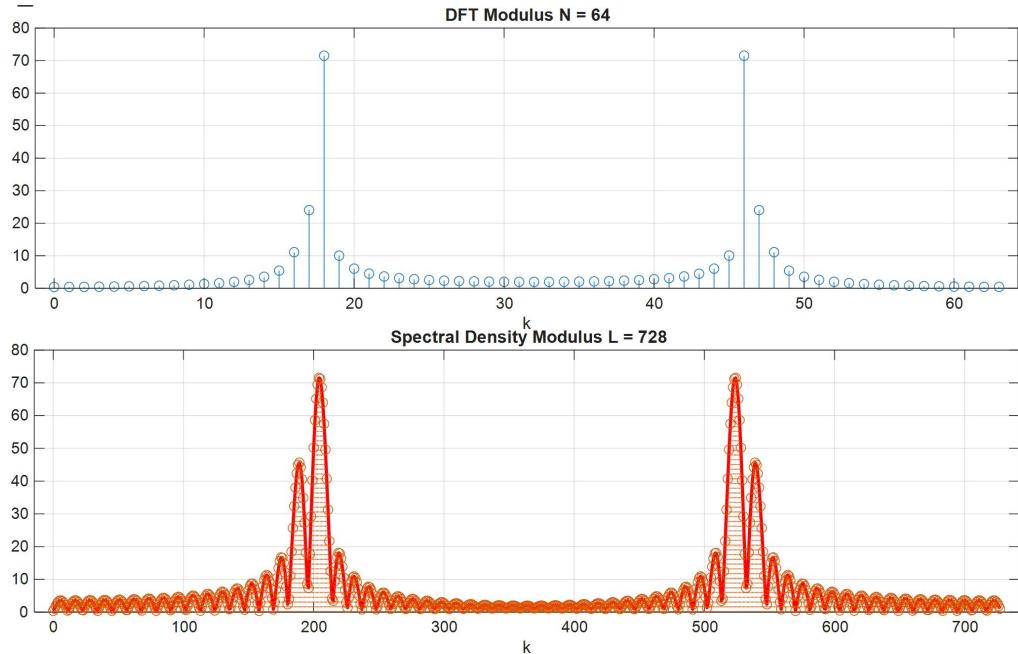
5. Улучшение различия дискретных гармоник с близко расположеными частотами

$\Delta_N = 31.25 \text{ Hz}$

$\Delta_f = 34$

$L = 728$

$\Delta_L = 2.7473 \text{ Hz}$



Пояснить:

- соответствуют ли близко расположенные частоты условию (10.2);

Да, соответствуют.  $31.25 < 34 < 62.5$

- соответствует ли выведенная длина L условию (10.3);

Да. Получается 727, 27 и функция `ceil()` округляет в большую сторону

- с какой погрешностью определены частоты и причину погрешности.

$(\Delta_L = 2.7473)/2 = 1.37365$ .

```

Delta_N = Fs/N; % РАЗРЕШЕНИЕ ПО ЧАСТОТЕ
Delta_f = abs(f1_2-f2_2); % РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ЧАСТОТАМИ
L = ceil(Fs/(Delta_f-Delta_N)); % ВЫБРАННАЯ ДЛИНА L
Delta_L = Fs/L; % ПЕРИОД ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПО ЧАСТОТЕ ПРИ ДЛИНЕ L
disp('%')
.....
n = 0:(N-1); % ДИСКРЕТНОЕ НОРМИРОВАННОЕ ВРЕМЯ
w1_2 = 2*pi*f1_2/Fs; w2_2 = 2*pi*f2_2/Fs; % НОРМИРОВАННЫЕ ЧАСТОТЫ
x2 = A1*cos(w1_2*n)+A2*cos(w2_2*n); % КОНЕЧНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ
X2 = fft(x2); % ДПФ КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЛИНЫ N
MOD2 = abs(X2); % МОДУЛЬ ДПФ
X2_L = fft(x2,L); % ДПФ КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ДОПОЛНЕННОЙ НУЛЯМИ
DO ДЛИНЫ L
MOD2_L = abs(X2_L); % МОДУЛЬ ДПФ
.....
L_2 = ceil(L/2); % ОСНОВНАЯ ПОЛОСА ЧАСТОТ L/2
[MODm, m] = max(MOD2_L(1:(L_2))); % МАКСИМУМ MODm И ИНДЕКС m ВЕКТОРА
MOD2_L (ПЕРВЫЙ ПИК)
k_1 = (m-1); f_1 = k_1*Delta_L; % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ И АБСОЛЮТНАЯ
(Гц) ЧАСТОТЫ ПЕРВОГО ПИКА
K = ceil(L/N); % КОЛИЧЕСТВО ОТСЧЕТОВ НА ПЕРИОДЕ ДИСКРЕТИЗАЦИИ Fs/N
K1 = m+K; K2 = m+2*K-1; % НИЖНЯЯ K1 И ВЕРХНЯЯ K2 ГРАНИЦЫ ИНТЕРВАЛА ПРИ
ПОИСКЕ ВТОРОГО ПИКА СПРАВА
[MODm1, m1] = max(MOD2_L(K1:K2)); % МАКСИМУМ MODm1 И ИНДЕКС m1 МОДУЛЯ
ДПФ MOD2_L НА ИНТЕРВАЛЕ [K1 K2]
K3 = m-(2*K-1); K4 = m-K; % НИЖНЯЯ K3 И ВЕРХНЯЯ K4 ГРАНИЦЫ ИНТЕРВАЛА
ПРИ ПОИСКЕ ВТОРОГО ПИКА СЛЕВА
[MODm2, m2] = max(MOD2_L(K3:K4)); % МАКСИМУМ MODm2 И ИНДЕКС m2 МОДУЛЯ
ДПФ MOD2_L НА ИНТЕРВАЛЕ [K3 K4]

```

```

if (MODm1>MODm2)
    k_2 = (K1+m1-1)-1; f_2 = k_2*Delta_L; % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ И
    АБСОЛЮТНАЯ (Гц) ЧАСТОТЫ ВТОРОГО ПИКА, ЕСЛИ ОН СПРАВА ОТ ПЕРВОГО
else
    k_2 = (K3+m2-1)-1; f_2 = k_2*Delta_L; % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ И
    АБСОЛЮТНАЯ (Гц) ЧАСТОТЫ ВТОРОГО ПИКА, ЕСЛИ ОН СЛЕВА ОТ ПЕРВОГО
end

```

.....

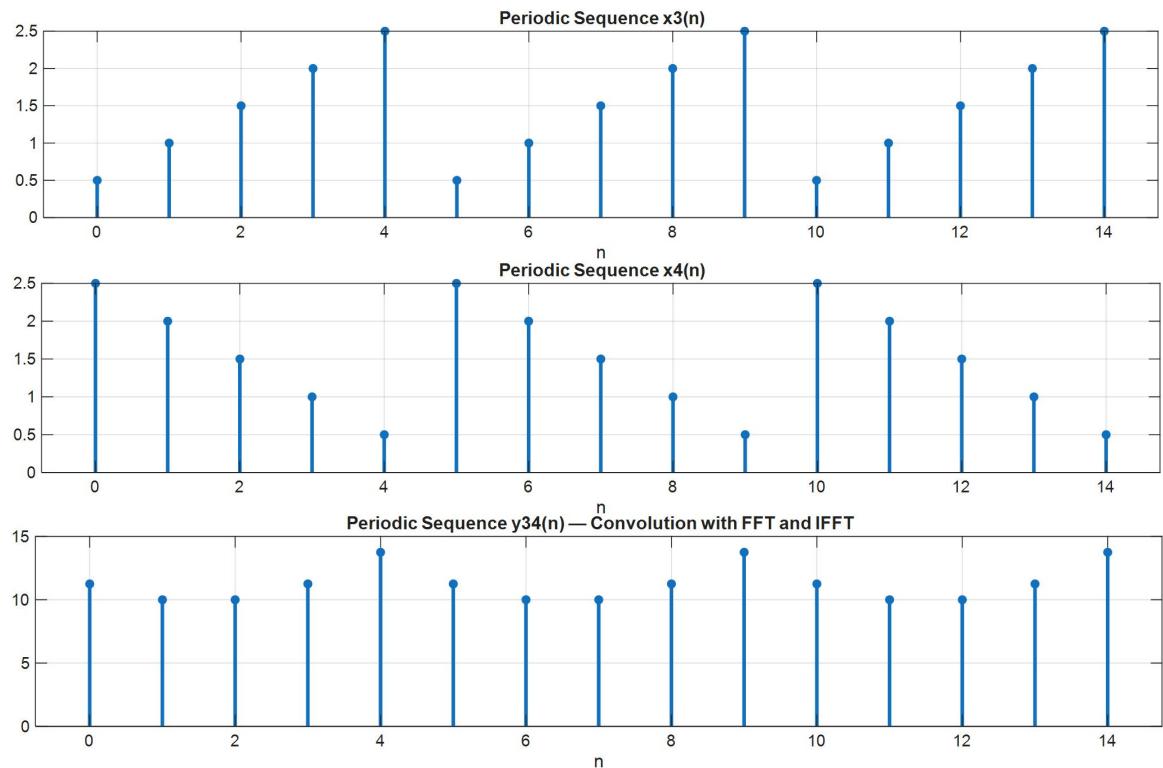
### Итоговые гармоники:

```

k_1 = 204 f_1 = 560.4396
k_2 = 189 f_2 = 519.2308

```

## 6. Вычисление круговой свёртки



Пояснить:

Записать формулу круговой свертки и пояснить алгоритм ее вычисления с помощью ДПФ.

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}(m) \tilde{h}[(n-m) \bmod L]; \\ \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m) \tilde{x}[(n-m) \bmod L]. \end{cases}$$

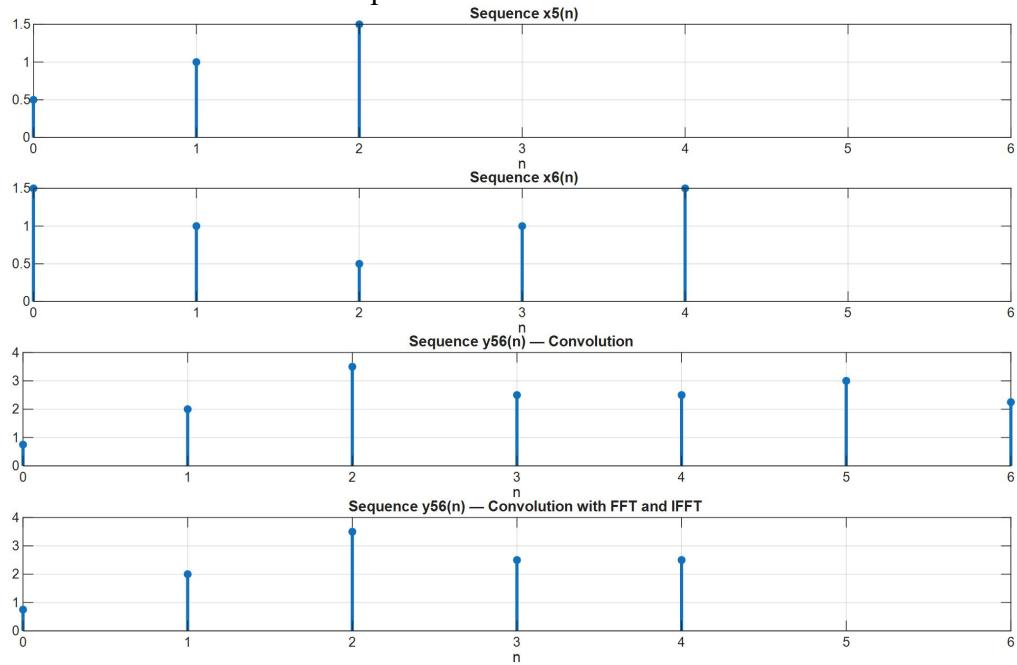
Вычисление круговой свертки осуществляется с помощью ОБПФ от произведения двух ДПФ сворачиваемых последовательностей.

```

y34 = ifft(fft(x3).*fft(x4)); % КРУГОВАЯ СВЕРТКА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
L34 = length(y34);

```

## 7. Вычисление линейной свертки.



Пояснение:

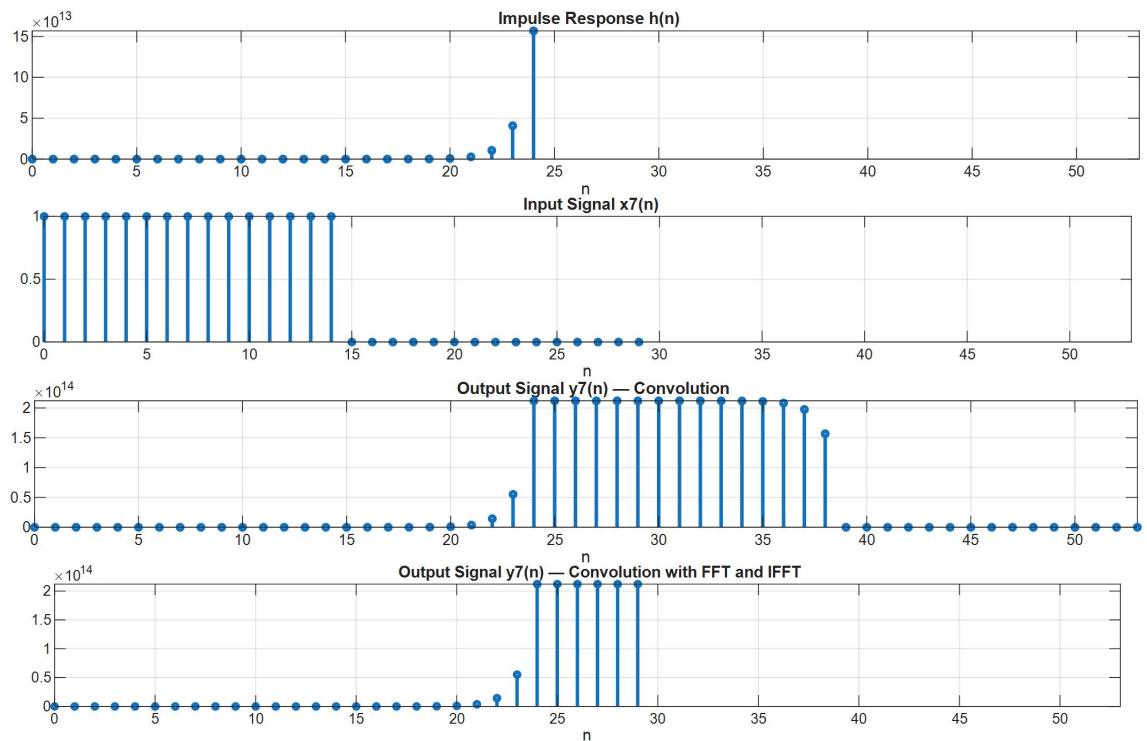
Записать формулу линейной свертки и пояснить алгоритм ее вычисления с помощью ДПФ:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

Для того, что бы через ДПФ рассчитать свёртку надо каждую последовательность дополнить нулями, чтобы длина сворачиваемых была  $N_1+N_2-1$ . После дополнения надо перемножить ДПФ образы и взять ОДПФ.

```
y56_1 = conv(x5,x6); % ЛИНЕЙНАЯ СВЕРТКА, ВЫЧИСЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ conv
y56_2 = fftfilt(x5,x6); % ЛИНЕЙНАЯ СВЕРТКА, ВЫЧИСЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ fftfilt
```

## 8. Вычисление реакции ЛДС по формуле свёртки

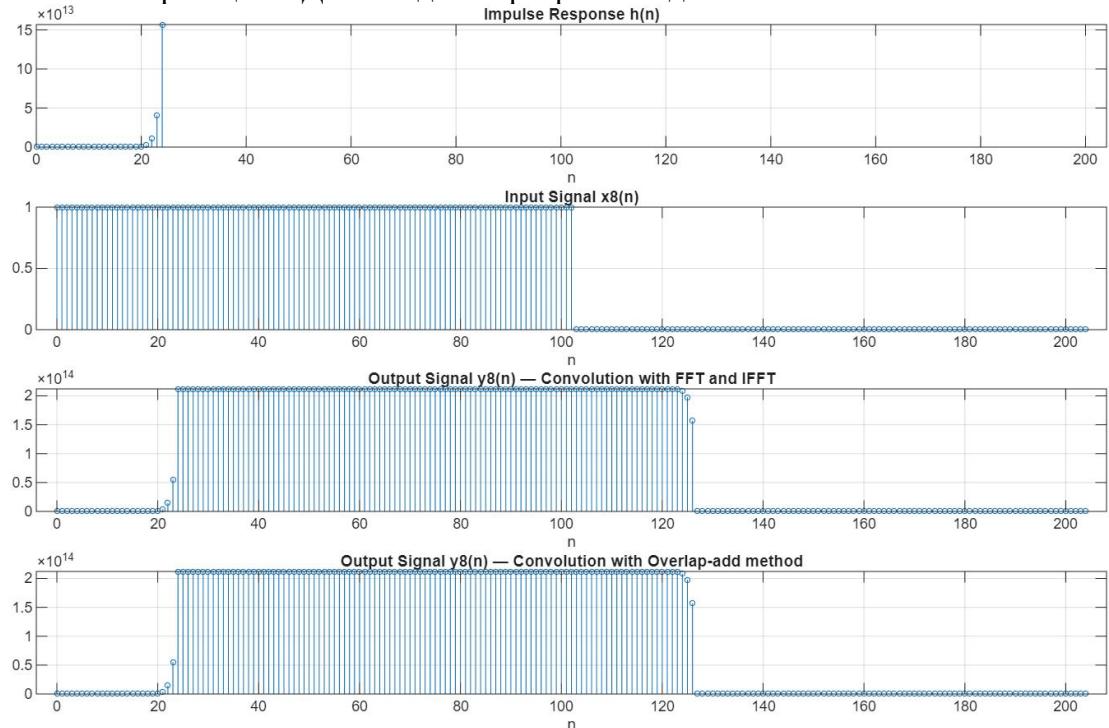


Пояснить:

- преимущество вычисления реакции по формуле свертки с помощью ДПФ;
- Быстрее, чем классическое.
- чему равна длина реакции, вычисленной первым и вторым способами;
- С помощью классической линейной –  $L+N-1$ . Через ДПФ – длине воздействия.
- в каком случае длину реакции необходимо ограничить до длины воздействия:
- При вычислении линейной свёртки через ДПФ.

```
h = impz(b,a,N1)'; % ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА
x7 = input_1(N2); % ВОЗДЕЙСТВИЕ
y7_1 = conv(x7,h); % РЕАКЦИЯ, ВЫЧИСЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ conv
y7_2 = fftfilt(h,x7); % РЕАКЦИЯ, ВЫЧИСЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ fftfilt
L=N1+N2-1; % ДЛИНА СВЕРТКИ, ВЫЧИСЛЕННОЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ conv
```

## 9. Вычисление реакции ЛДС методом перекрытия с дополнением



Пояснить:

- в каком случае целесообразно вычислять реакцию методом перекрытия с накоплением

При большой длине воздействия, или непрерывном потоке данных.

```
x8 = input_1(N3); % ВОЗДЕЙСТВИЕ
y8_1 = fftfilt(h,x8); % РЕАКЦИЯ, ВЫЧИСЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ fftfilt
y8_2 = fftfilt(h,x8,N1); % РЕАКЦИЯ, ВЫЧИСЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ fftfilt МЕТОДОМ НАКОПЛЕНИЯ С ПЕРЕКРЫТИЕМ
```