

**Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций
Российской Федерации
Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича»**

Кафедра радиотехники

Дисциплина «Цифровая обработка сигналов»

Лабораторная работа № 09

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (часть 1)

Выполнили:

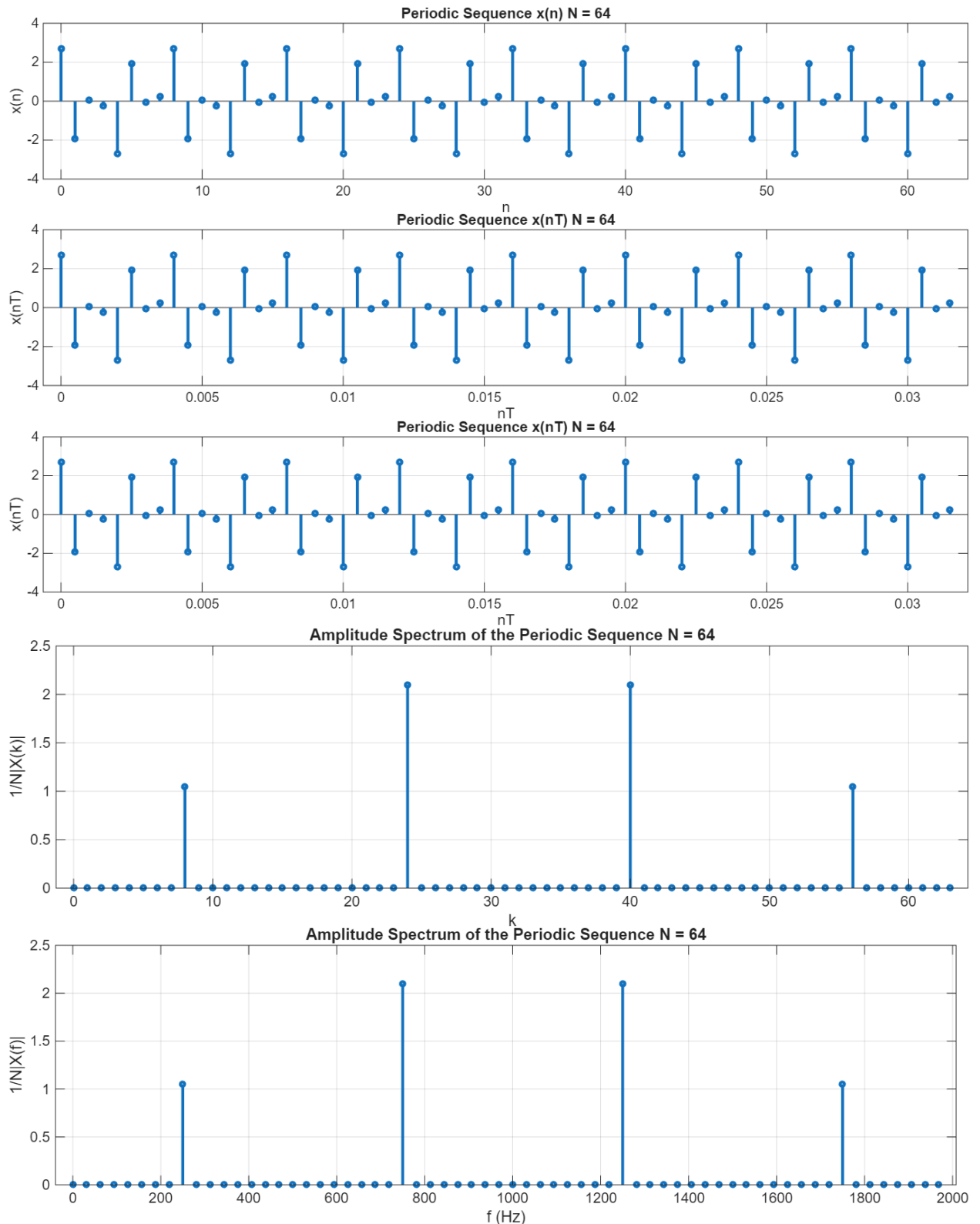
ст. гр. РТ-31
№бр 5
Куприянов П.А.
Пимкин А.А

Проверил:

ассистент каф. РТ,
Бойко И.А. _____

Санкт-Петербург
2025

п.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ АМПЛИТУДНОГО И ФАЗОВОГО СПЕКТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ



```

n = 0:(N-1); % ДИСКРЕТНОЕ НОРМИРОВАННОЕ ВРЕМЯ
k = 0:(N-1); % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ ЧАСТОТА
w1 = 2*pi*f1/Fs; w2 = 2*pi*f2/Fs; % НОРМИРОВАННЫЕ ЧАСТОТЫ ДИСКРЕТНЫХ ГАРМОНИК (РАД)
x = A1*cos(w1*n+pi/4)+A2*cos(w2*n+pi/8); % ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ
X = fft(x); % ДПФ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
MOD = (2/N)*abs(X); % АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
MOD(1) = (1/N)*abs(X(1));
PHASE = angle(X); % ФАЗОВЫЙ СПЕКТР ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
    
```

```

for i = 1:N
    if (abs(X(i)) < 1e-4)
        PHASE(i)=0;
    end
end
figure('Name','Periodic Sequence','NumberTitle','off')
subplot(3,1,1), stem(n,x, 'MarkerSize',3,'Linewidth',2)
grid, xlabel('n')
ylabel('x(n)'), title(strcat(['Periodic Sequence x(n) N = ',num2str(N)]))
subplot(3,1,2), stem(n/Fs,x,'MarkerSize',3,'Linewidth',2)
grid, xlabel('nT')
ylabel('x(nT)'), title(strcat(['Periodic Sequence x(nT) N = ',num2str(N)]))
x = ifft(X); % ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, ВЫЧИСЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ ОДПФ

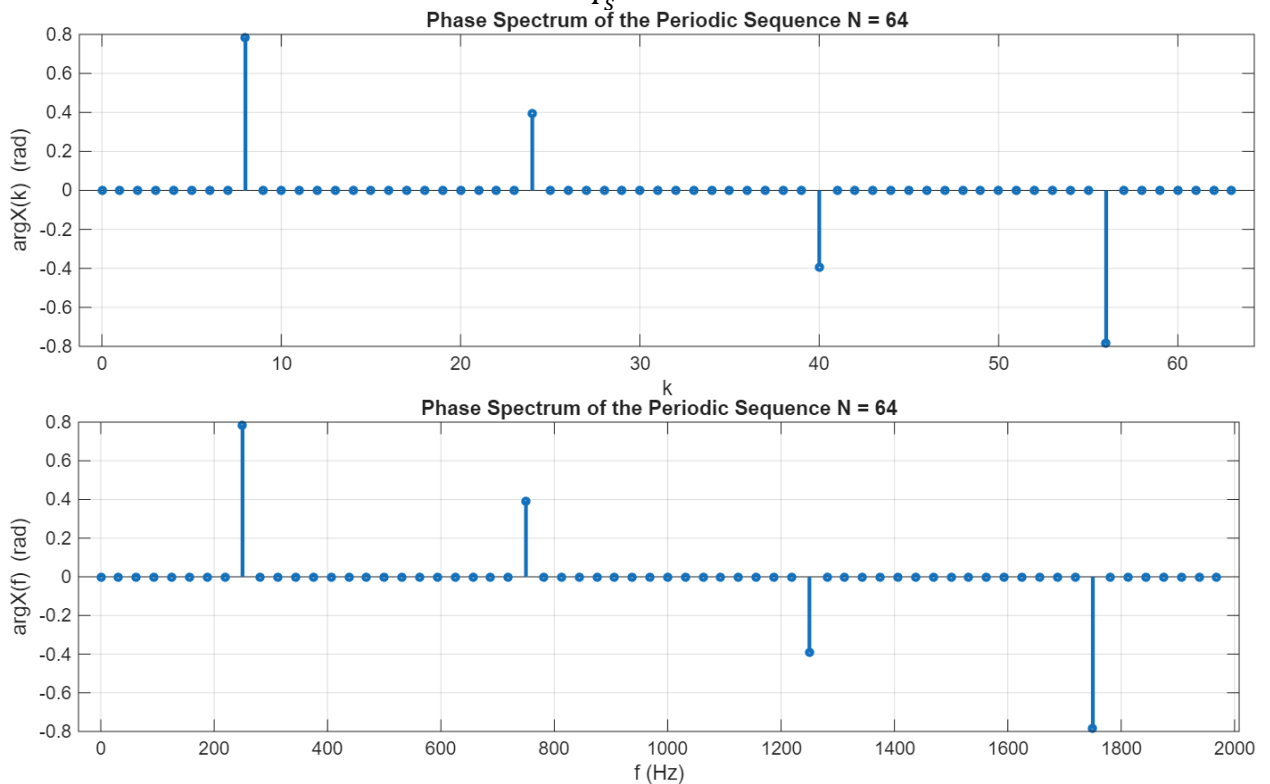
```

Пояснить:

- связь дискретного нормированного времени с дискретным временем;

Нормированное время – просто отсчёты N. Дискретное время – время, определённое только в точках кратных периоду дискретизации.

$$\frac{n * T_s}{T_s} = n$$



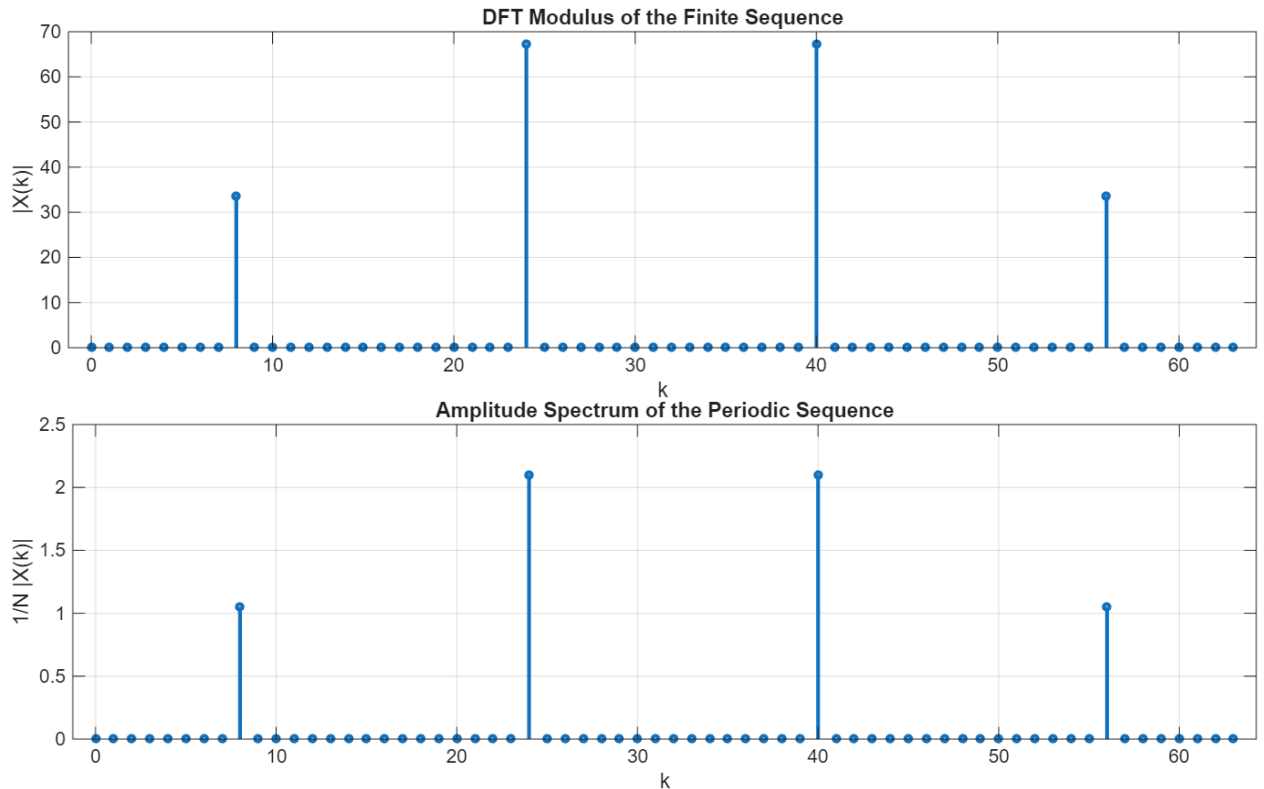
- связь частоты f (Гц) с дискретной нормированной частотой;

$$f = k * \frac{f_s}{N}$$

- вид амплитудного и фазового спектров.

Их различает шкала частот отложенная по оси абсцисс. В одном случае это абсолютная частота [Гц], а в другом это просто номера гармоник, кратных частоте дискретизации.

п.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДПФ КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ



```
MOD_K = abs(fft(x)); % МОДУЛЬ ДПФ КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
```

Пояснить:

- связь модуля ДПФ конечной последовательности с амплитудным спектром периодической последовательности:

Модуль ДПФ конечной последовательности носит название - спектральная плотность. Де-факто мы рассматриваем одно и тоже. В случае наличия у $x(n)$ периода N мы смотрим спектр одного периода. А в случае, если $x(n)$ в принципе задана только на N отсчётах, то мы смотрим спектр этой последовательности, предполагая, что смотри один период.

п.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУД И ЧАСТОТ ДИСКРЕТНЫХ ГАРМОНИК

Выходные параметры функции `fft_e1`:

`MODm` =

1.0500 2.1000 2.1000 1.0500

`m` =

8 24 40 56

Значения амплитуд и частот дискретных гармоник:

A1 = 1.05 A2 = 2.1
k1 = 8 k2 = 24
f1 = 250 f2 = 750

```
e1 = 1e-7; % ЗНАЧЕНИЕ ПОРОГА ДЛЯ ПЕРВОГО КРИТЕРИЯ
[MODm,m] = fft_e1(MOD,e1) % ВНЕШНЯЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУД И ЧАСТОТ
ГАРМОНИК ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА ПО ПЕРВОМУ КРИТЕРИЮ
disp('%')
disp('%')
disp('% Для вывода АМПЛИТУД И ЧАСТОТ ДИСКРЕТНЫХ ГАРМОНИК нажмите <ENTER>')
pause
```

```
A1 = MODm(1); A2 = MODm(2); % АМПЛИТУДЫ ДИСКРЕТНЫХ ГАРМОНИК
k1 = m(1); k2 = m(2); % ДИСКРЕТНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ЧАСТОТЫ
f1 = k1*Fs/N; f2 = k2*Fs/N; % ЧАСТОТЫ (Гц) ДИСКРЕТНЫХ ГАРМОНИК
```

Пояснить:

- смысл выходных параметров function-файла `fft_e1`;
- MODm – вектор значений модуля ДПФ полезного сигнала.
- m – вектор полезных частот полезного сигнала. Это порядковые номера нормированных гармоник полезного сигнала.
- соответствие между значениями дискретных нормированных частот и абсолютных частот гармоник.

$$f = k * \frac{f_s}{N}$$

Пример:

$$f1 = 250 = 8 * \frac{2000}{64}$$

Значит сходится =)

п.4. ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОРОГОВ ДЛЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО КРИТЕРИЕВ ВЫДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА

Граничные значения для порога по первому критерию ε_1 :

```
e1_low = 0.35592 e1_up = 1
```

Граничные значения для порога по второму критерию ε_1 :

```
e2_low = 2.0332 e2_up = 16.0503
```

```
noise = randn(1,N); % НОРМАЛЬНЫЙ БЕЛЫЙ ШУМ
s = x+noise; % АДДИТИВНАЯ СМЕСЬ СИГНАЛА С ШУМОМ
S = fft(s); % ДПФ СМЕСИ СИГНАЛА С ШУМОМ
MODS = (2/N)*abs(S); % АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР СМЕСИ СИГНАЛА С ШУМОМ
MODS(1) = (1/N)*abs(S(1));
NOISE = fft(noise); % ДПФ ШУМА
MODNOISE = (2/N)*abs(NOISE); % АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР ШУМА
MODNOISE(1) = (1/N)*abs(NOISE(1));
MAX_NOISE = max(MODNOISE); % МАКСИМУМ АМПЛИТУДНОГО СПЕКТРА ШУМА
MAXS = max(MODS); % МАКСИМУМ АМПЛИТУДНОГО СПЕКТРА СМЕСИ СИГНАЛА С ШУМОМ
e1_low = MAX_NOISE/MAXS; % НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ПОРОГА ДЛЯ ПЕРВОГО КРИТЕРИЯ
e1_up = 1; % ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ПОРОГА ДЛЯ ПЕРВОГО КРИТЕРИЯ
P = (1/N)*sum(MODS.^2); % СРЕДНЯЯ МОЩНОСТЬ СМЕСИ СИГНАЛА С ШУМОМ
MAXS2 = MAXS.^2; % КВАДРАТ МАКСИМУМА АМПЛИТУДНОГО СПЕКТРА СМЕСИ СИГНАЛА С ШУМОМ
MAX_NOISE2 = MAX_NOISE.^2; % КВАДРАТ МАКСИМУМА АМПЛИТУДНОГО СПЕКТРА ШУМА
```

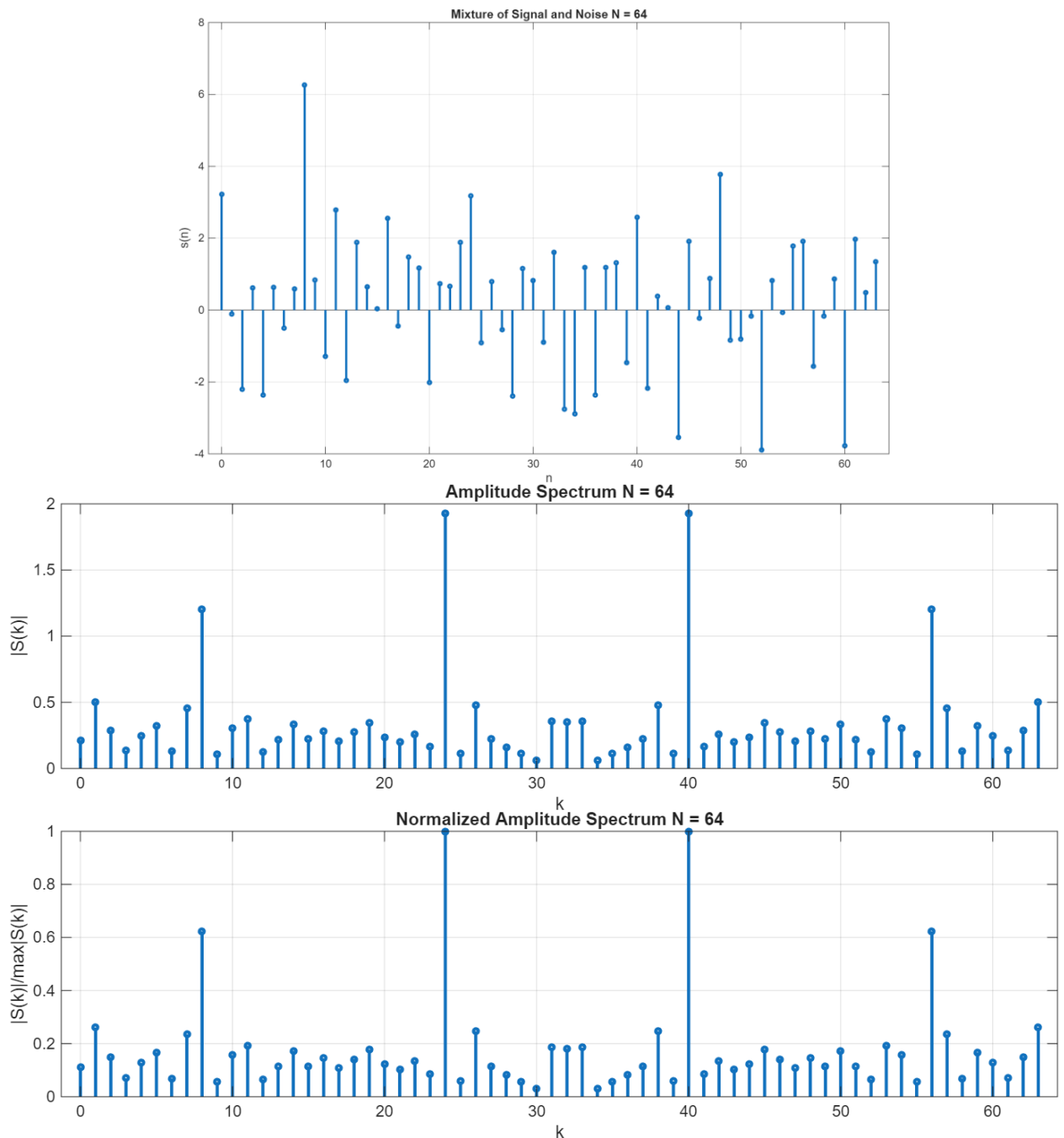
Пояснить:

- как рассчитываются граничные значения порогов ε_1 и ε_2 :

$$\frac{\max |X(k)_{\text{шум}}|}{\max |X(k)|} < \varepsilon_1 < 1$$

$$\frac{\min |X(k)_{\text{сигнал}}|^2}{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2} < \varepsilon_2 < \frac{\max |X(k)|^2}{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2}$$

п.5. ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА ПО ПЕРВОМУ КРИТЕРИЮ



```

[MODm,m] = fft_e1(MODS,e1) % ВНЕШНЯЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУД И ЧАСТОТ
ГАРМОНИК ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА ПО ПЕРВОМУ КРИТЕРИЮ
function [MODm,m] = fft_e1(MODX,e1)
% Определение значений модуля ДПФ и частот полезного сигнала
% MODX – вектор значений модуля ДПФ смеси сигнала с шумом
% e1 – заданный порог
% MODm – вектор значений модуля ДПФ полезного сигнала
% m – вектор значений частот полезного сигнала
i = 1;
MAX = max(MODX);
for k = 1:length(MODX)
    if (MODX(k)/MAX)>e1
        MODm(i) = MODX(k);
        m(i) = k-1;
        i = i+1;
    end
end

```

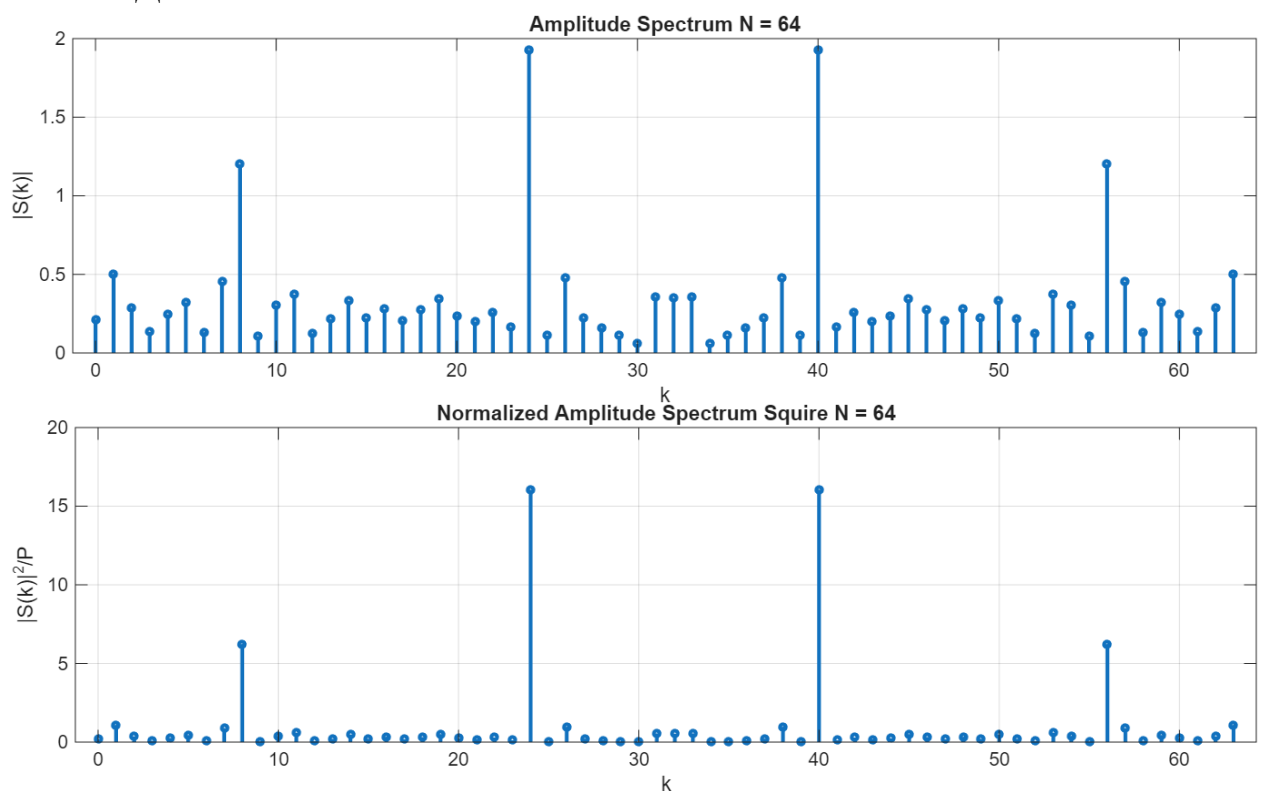
Пояснить:

- какое значение порога ε_1 было выбрано и чем обоснован выбор;
 $\varepsilon_1 = 10^{-7}$

Данное значение было дано изначально. Вероятно, такой низкий порог был выбран для того, чтобы в касту полезных были записаны абсолютно все гармоники и получилась спектральная плотность.

- смысл выходных параметров function-файла `fft_e1`;
Номера гармоник и их амплитуды позиционно соответствуют друг другу.
- какие амплитуды гармоник соответствуют полезному сигналу согласно первому критерию (9.7);
В нашем примере абсолютно все. А если в общем случае, то смотри пояснение к п.4
- в каком случае применение первого критерия будет неэффективным.
В шуме с выбросами. В шуме с большой дисперсией. А также процесс может быть нестационарным и тогда мы сядем в лужу.

п.6. ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА ПО ВТОРОМУ КРИТЕРИЮ



```
[MODm,m] = fft_e2(MODS,e2)% ВНЕШНЯЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУД И ЧАСТОТ
ГАРМОНИК ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА ПО ВТОРОМУ КРИТЕРИЮ
function [MODm,m] = fft_e2(MODX,e2)
% Определение значений модуля ДПФ и частот полезного сигнала
% MODX – вектор значений модуля ДПФ смеси сигнала с шумом
% e2 – заданный порог
% MODm – вектор значений модуля ДПФ полезного сигнала
% m – вектор значений частот полезного сигнала
i = 1;
P = sum(MODX.^2)/length(MODX); % P – средняя мощность смеси сигнала с шумом
for k = 1:length(MODX)
    if ((MODX(k).^2)/P)>e2
        MODm(i) = MODX(k);
        m(i) = k-1;
        i = i+1;
    end
end
```

Выходные параметры `fft_e2`:

MODm =

1.9286 1.9286
m =
24 40

Значение порога $\varepsilon_2 = 8.04$

Пояснить:

- какое значение порога ε_2 было выбрано и чем обоснован выбор;

$$\varepsilon_2 = 8.04$$

$e2_low = 2.0332$ $e2_up = 16.0503$ было выбрано среднее значение и ещё я ошибся на единицу.

- смысл выходных параметров function-файла `fft_e2`;

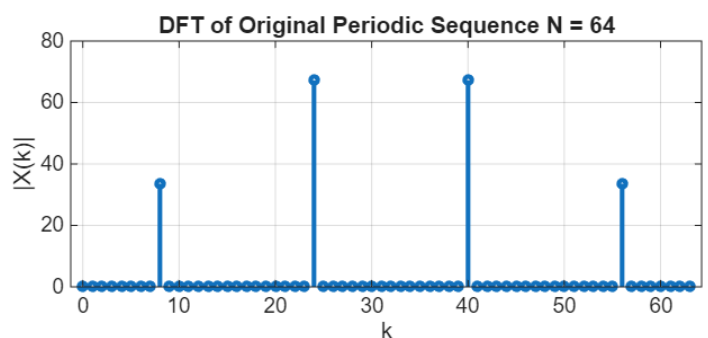
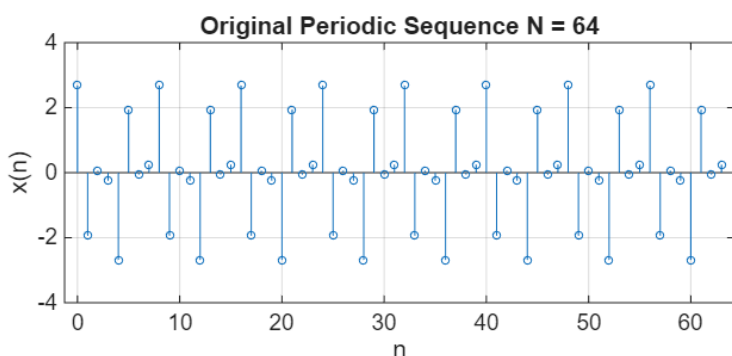
Гармоники, которые были выделены из спектра последовательности в результате ДПФ. И прошедшие отбор по второму критерию.

- какие амплитуды гармоник соответствуют полезному сигналу согласно второму критерию (9.8);

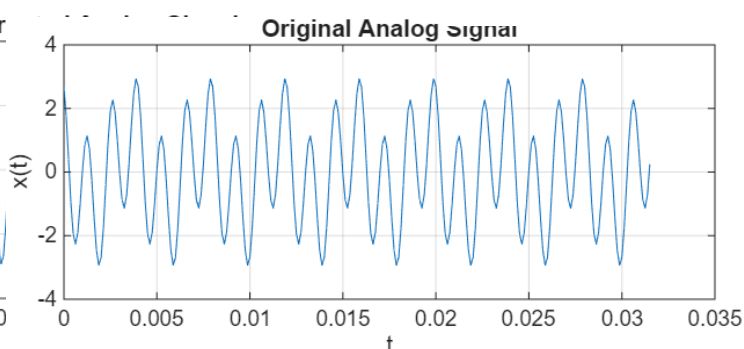
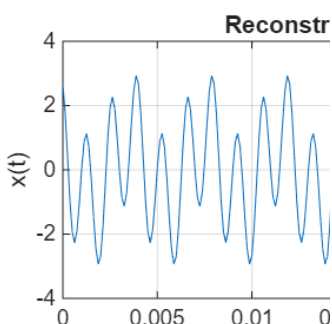
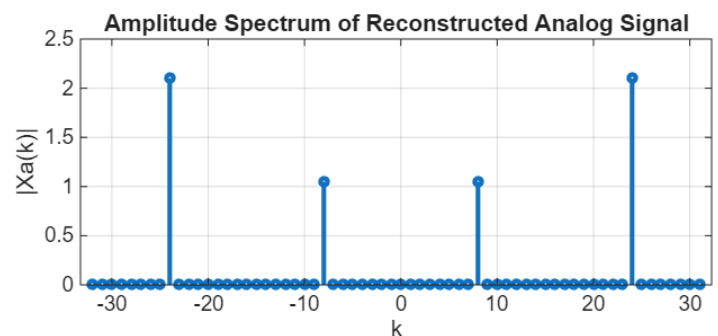
Критерию соответствуют только две гармоники с амплитудами 1.9286

- в каком случае применение второго критерия будет неэффективным:

В шуме с выбросами. В шуме с большой дисперсией. А также процесс может быть нестационарным и тогда мы сядем в лужу.



п.7. ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА




```

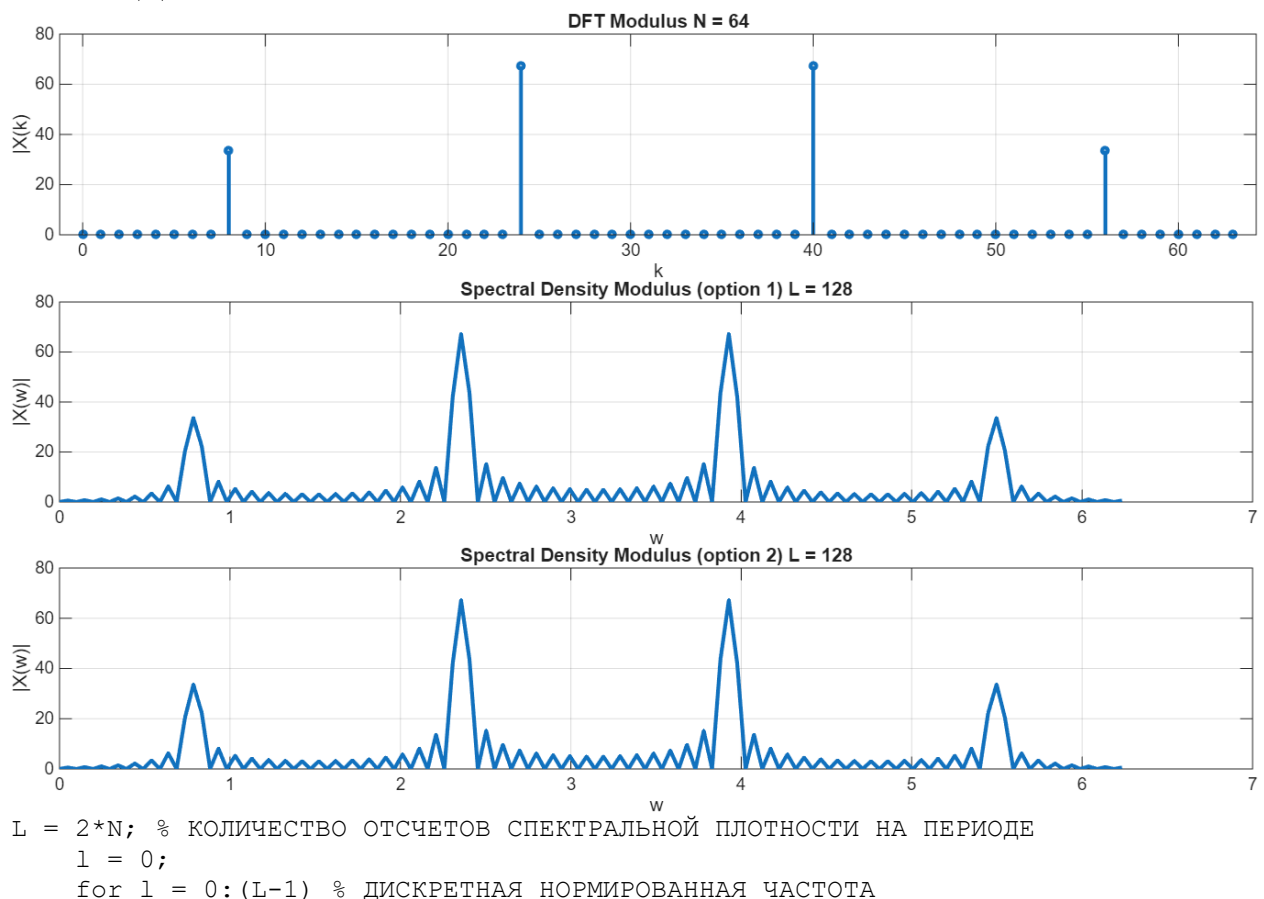
Xa = [X(N/2+1:N),X(1:N/2)]; % СПЕКТР АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА (С ТОЧНОСТЬЮ ДО
ПОСТОЯННОГО МНОЖИТЕЛЯ)
i = 1; % СЧЕТЧИК ЗНАЧЕНИЙ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА
for t = 0:0.25*T:(N-1)*T % ЗНАЧЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ВРЕМЕНИ
    s = 0;
    for k = -N/2:N/2-1 % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ ЧАСТОТА
        s = s + Xa(k+N/2+1)*exp(j*2*pi*k*t/(N*T)); % ВОССТАНОВЛЕНИЕ
АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА
    end
    xa(i) = (1/N).*s; % ЗНАЧЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕННОГО АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА
    i = i+1;
end
t = 0:0.25*T:(N-1)*T;
xt = A1*cos(2*pi*f1*t+pi/4)+A2*cos(2*pi*f2*t+pi/8); % ЗНАЧЕНИЯ ИСХОДНОГО
АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА
k = 0:N-1; % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ ЧАСТОТА
MODa = (2/N)*abs(Xa); % АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР ВОССТАНОВЛЕННОГО АНАЛОГОВОГО
СИГНАЛА
MODa(1) = (1/N)*abs(Xa(1));
.....
k = -N/2:N/2-1;

```

Пояснить:

- связь модуля ДПФ последовательности со спектром аналогового сигнала; Модуль ДПФ является амплитудным спектром.
- результат визуального сравнения восстановленного и исходного сигналов. Восстановленный сигнал идентичен оригинальному.

п.8. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ



```

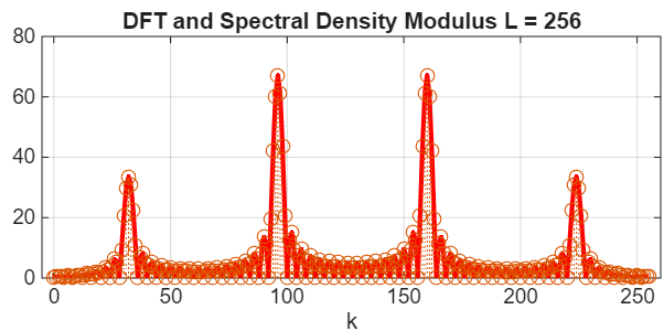
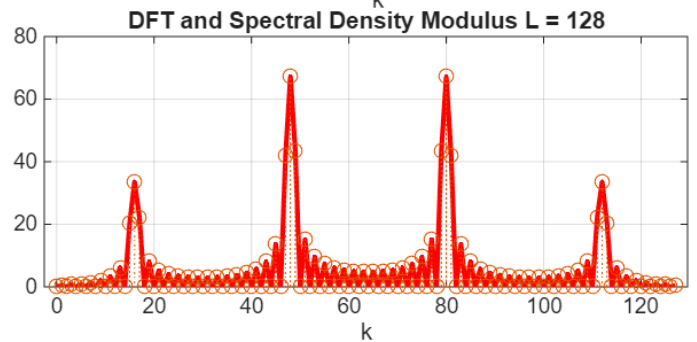
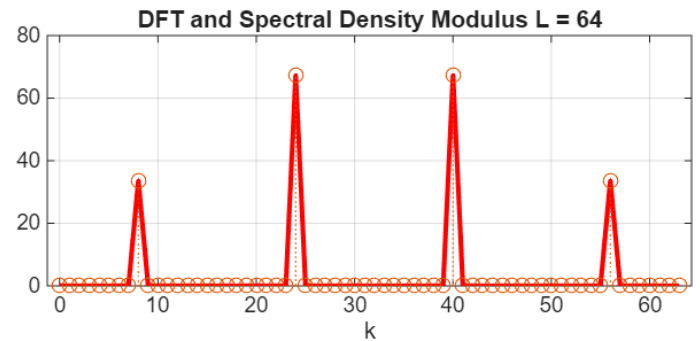
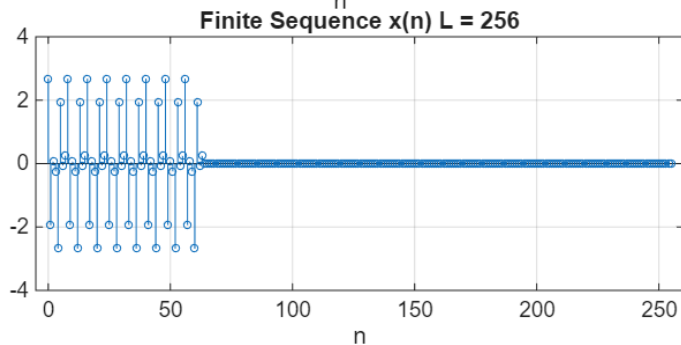
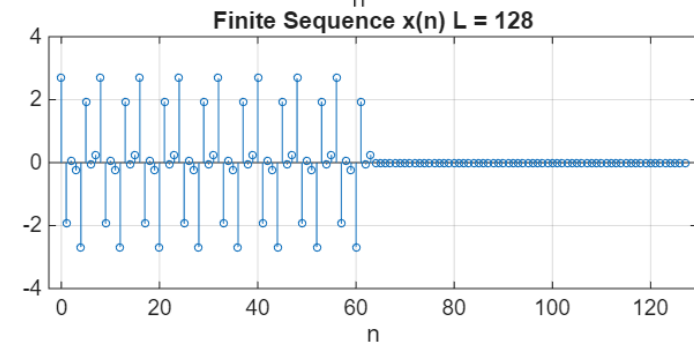
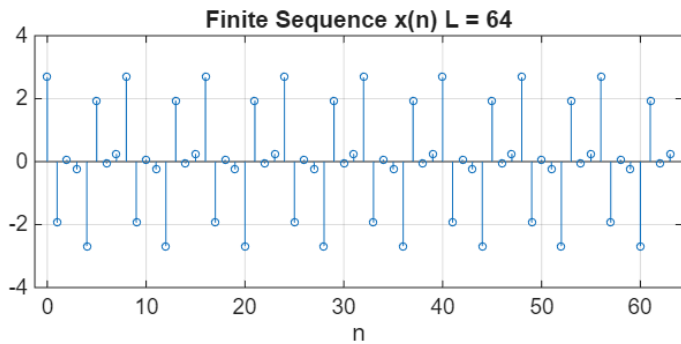
        S = 0;
        for n = 0:(N-1) % ДИСКРЕТНОЕ НОРМИРОВАННОЕ ВРЕМЯ
            S = S + x(n+1)*exp(-j*2*pi*l*n/L); % ВОССТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ
ПЛОТНОСТИ
        end
        XW(l+1) = S; % ЗНАЧЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ
        l = l+1;
    end
    xz = [x zeros(1, (L-N))]; % ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, ДОПОЛНЕННАЯ НУЛЯМИ ДО ДЛИНЫ L
    XZ = fft(xz); % ДПФ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ДОПОЛНЕННОЙ НУЛЯМИ
    k = 0:(N-1); % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ ЧАСТОТА
    w = 0:2*pi/L:2*pi-2*pi/L; % НОРМИРОВАННАЯ ЧАСТОТА
    l = 0:(L-1); % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ ЧАСТОТА

```

Пояснить:

- связь между ДПФ и спектральной плотностью;
- алгоритмы вычисления значений спектральной плотности по формулам (9.15) и (9.18);
- соответствие между частотами ω^{\wedge} (рад) пиков спектральной плотности и их дискретными нормированными частотами.

п.9. УМЕНЬШЕНИЕ ПЕРИОДА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПО ЧАСТОТЕ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ



% Для вывода ПЕРИОДОВ ДПФ и ПЕРИОДОВ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПО ЧАСТОТЕ
нажмите <ENTER>

```
%
L = [64 128 256]
%
Delta_f = [31.25      15.625      7.8125]
```

Пояснить:

- причину изменения периода дискретизации по частоте;
- изменяется ли при этом разрешение по частоте;
- чему равно разрешение по частоте;
- с какой целью уменьшают период дискретизации по частоте.

ДПФ

```
L = [N 2*N 4*N];
for i = 1:length(L)
    xz = [x zeros(1,(L(i)-N))]; % ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, ДОПОЛНЕННАЯ НУЛЯМИ ДО
    ДЛИНЫ L(i)
    XZ = fft(xz);
    Delta_f(i) = Fs/L(i);
    n = 0:length(xz)-1; % ДИСКРЕТНОЕ НОРМИРОВАННОЕ ВРЕМЯ
    k = 0:length(XZ)-1; % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ ЧАСТОТА
    subplot(3,2,2*i-1), stem(n,xz,'MarkerSize',3), xlabel('n'), grid
    title(strcat(['Finite Sequence x(n) L = ',num2str(L(i))]))
    subplot(3,2,2*i), plot(k,abs(XZ), 'r','MarkerSize',3, 'Linewidth',2),
    grid,
    hold on, stem(k,abs(XZ),':'), xlabel('k')
    title(strcat(['DFT and Spectral Density Modulus L = ',num2str(L(i))]))
```

