

**Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций
Российской Федерации
Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича»**

Кафедра радиотехники

Дисциплина «Цифровая обработка сигналов»

Лабораторная работа № 10

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (часть 2)

Выполнили:

ст. гр. РТ-31
№бр 5
Куприянов П.А.
Пимкин А.А.
Наумов Е.А

Проверил:

ассистент каф. РТ,
Бойко И.А. _____

Санкт-Петербург
2025

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

ТАБЛИЦА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Переменная	Назначение	Значение	Идентификатор
$N_{бр}$	Номер бригады	$N_{бр}$	Nb = 5
N	Период (длина) последовательности	$N = 64$	N = 64
f_d	Частота дискретизации	$f_d = 2000(N_{бр} \bmod 5 + 1)$	FS = 2000
A_1	Амплитуды дискретных гармоник	$A_1 = 1 + 0.01N_{бр}$	A1 = 1.05
A_2		$A_2 = 2A_1$	A2 = 2.1
f_1	Частоты дискретных гармоник	$f_1 = f_d/4$	f1 = 500
f_2		$f_2 = 1.5f_1$	f2 = 750
M	Период последовательности	$M = 71$	M = 71
f_{11}	Частоты дискретных гармоник	$f_{11} = 1.1f_1$	f1_1 = 550
f_{21}		$f_{21} = 1.07f_2$	f2_1 = 802.5
f_{12}	Частоты дискретных гармоник	$f_{12} = 1.05f_1$	f1_2 = 525
f_{22}		$f_{22} = f_{12} + 1.1\Delta f$ $\Delta f = f_d/N$	f2_2 = 559.375
$x_3(n)$	Периодическая последовательность	$x_3(n) = N_{бр}[0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5]$	Вектор x3 = [0.5 1.0 1.5 2.0 2.5]
$x_4(n)$	Периодическая последовательность	$x_4(n) = N_{бр}[0.5 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]$	Вектор x4 = [2.5 2.0 1.5 1.0 0.5]
$x_5(n)$	Периодическая последовательность	$x_5(n) = N_{бр}[0.1 \ 0.2 \ 0.3]$	Вектор x5 = [0.5 1.0 1.5]
$x_6(n)$	Периодическая последовательность	$x_6(n) = N_{бр}[0.3 \ 0.2 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3]$	Вектор x6 = [1.5 1.0 0.5 1.0 1.5]
b_0 b_1 b_2	Коэффициенты числителя передаточной функции	$b_0 = 0.5 + 0.02N_{бр}$ $b_1 = b_0(-1)^{N_{бр}+1}(0.982 + 0.0178)N_{бр}$ $b_2 = b_0(0.8 + 0.2(N_{бр} \bmod 5))$	Вектор b = [0.6 2.994 0.48]
a_0 a_1 a_2		$a_0 = 1$ $a_1 = (-1)^{N_{бр}}(0.778 + 0.025)N_{бр}$ $a_2 = 0.64 + 0.006N_{бр}$	Вектор a = [1 -4.015 0.67]
N_1	Длина ИХ	$N_1 = N_{бр} \bmod 10 + 20$	N1 = 25
N_2	Длина воздействия	$N_2 = N_{бр} \bmod 1 + 30$	N2 = 30
N_3	Длина воздействия	$N_3 = N_{бр} \bmod 10 + 200$	N3 = 205

.....
ФОРМУЛЫ ДПФ:

- трактовка ДПФ для периодической последовательности
Это спектральный состав конечной последовательности отсчётов одного периода сигнала
- трактовка ДПФ для конечной последовательности
ДПФ для конечной последовательности это ДПФ одного периода бесконечной периодической последовательности
- смысл всех переменных

ПУНКТЫ ЗАДАНИЯ

1. Проверка равенства Парсеваля.

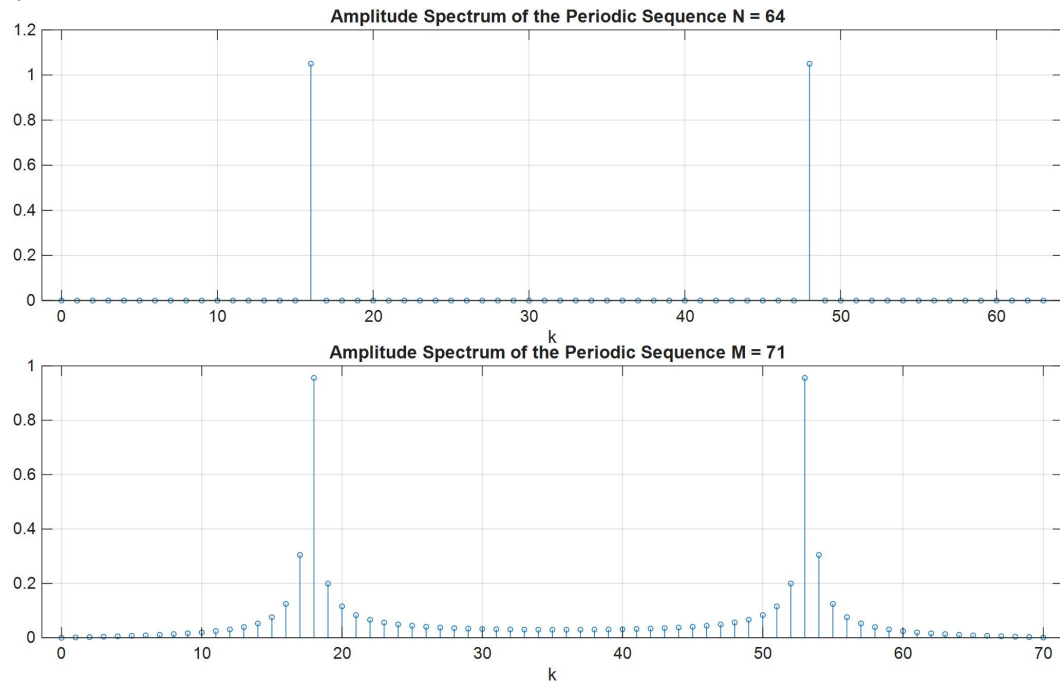
$E1 = 176.4$ $E2 = 176.4$

Пояснить:

- смысл равенства Парсеваля
оно связывает связывает энергию, вычисленную во временной и частотной областях.

2. Исследование эффекта растекания спектра для одной дискретной гармоники.

$\%$
 $N = 64 \quad \rightarrow \quad P_N = 16$
 $M = 71 \quad \rightarrow \quad P_M = 17.75$
 $\%$



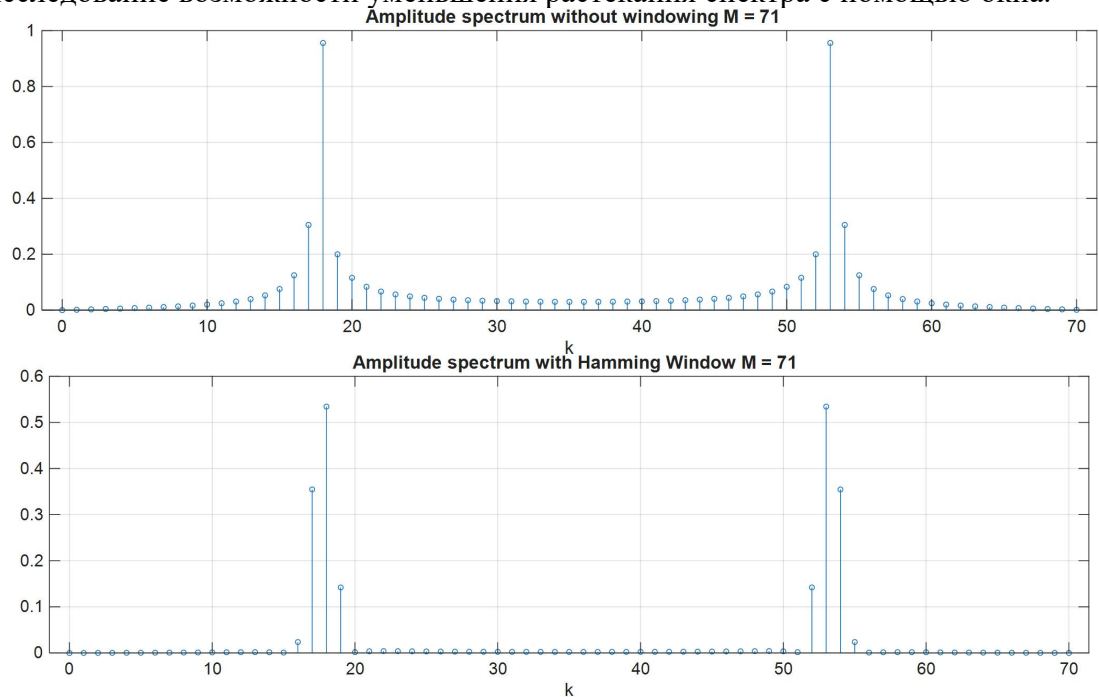
Пояснить:

- с какой целью определяется значение P ;
Понять будет ли данная гармоника выведена на спектре, или наделённая ей энергия размажется по соседним частотам.
- в каком случае и почему наблюдается растекание спектра.
Есть P не является целым числом.

```

n = 0:(N-1); % ДИСКРЕТНОЕ НОРМИРОВАННОЕ ВРЕМЯ (ПЕРИОД N)
k = 0:(N-1); % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ ЧАСТОТА (ПЕРИОД N)
w1 = 2*pi*f1/Fs; % НОРМИРОВАННАЯ ЧАСТОТА (РАД)
x_N = A1*cos(w1*n); % ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ (ПЕРИОД N)
X_N = fft(x_N); % ДПФ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (ПЕРИОД N)
MOD_N = (2/N)*abs(X_N); % АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (ПЕРИОД N)
MOD_N(1) = (1/N)*abs(X_N(1));
n1 = 0:(M-1); % ДИСКРЕТНОЕ НОРМИРОВАННОЕ ВРЕМЯ (ПЕРИОД M)
k1 = 0:(M-1); % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ ЧАСТОТА (ПЕРИОД M)
x_M = A1*cos(w1*n1); % ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ (ПЕРИОД M)
X_M = fft(x_M); % ДПФ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (ПЕРИОД M)
MOD_M = (2/M)*abs(X_M); % АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (ПЕРИОД M)
MOD_M(1) = (1/M)*abs(X_M(1));
P_N = N*f1/Fs; % ЧИСЛО ПЕРИОДОВ ДИСКРЕТНОЙ ГАРМОНИКИ С ЧАСТОТОЙ f1 НА ПЕРИОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ N
P_M = M*f1/Fs; % ЧИСЛО ПЕРИОДОВ ДИСКРЕТНОЙ ГАРМОНИКИ С ЧАСТОТОЙ f1 НА ПЕРИОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ M
    
```

3. Исследование возможности уменьшения растекания спектра с помощью окна.



Пояснить:

- Что изменилось в результате применения окна:

Суммарная амплитуда после применения окна Хемминга стала приближенно равна заданной, без этого энергия растекалась на огромное кол-во частот.

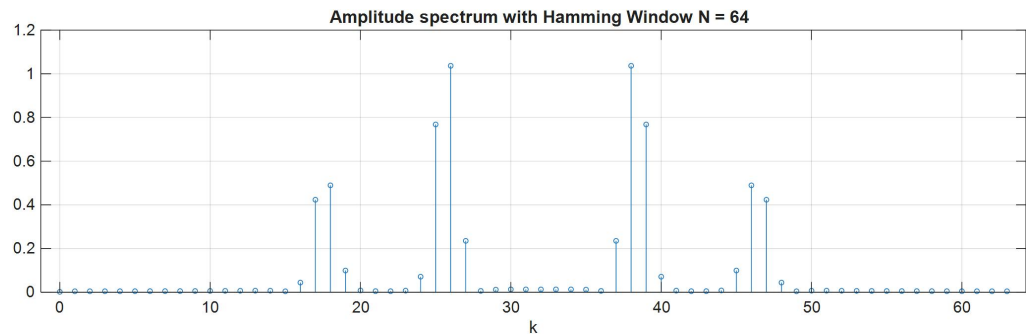
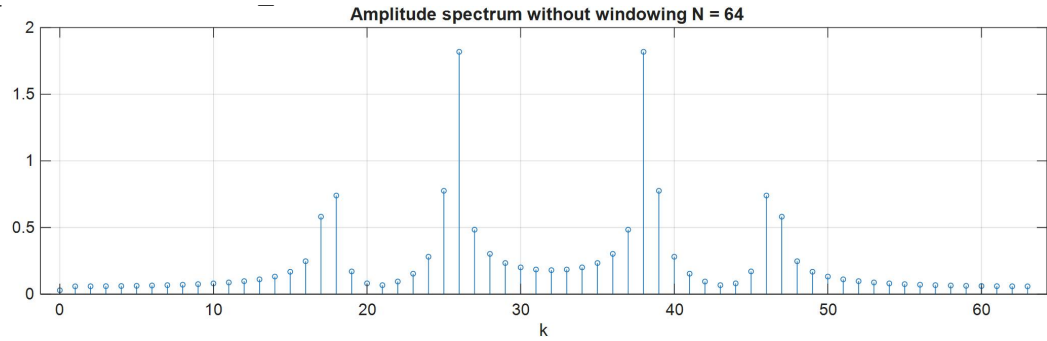
Произошло быстрое затухание гармоник, точно не принадлежащих исходному сигналу.

```
win_M = hamming(M)'; % ОКНО ХЭММИНГА — ВЕКТОР-СТОЛБЕЦ ДЛИНЫ M
xw_M = x_M.*win_M; % ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, ВЗВЕШЕННАЯ ОКНОМ
XW_M = fft(xw_M); % ДПФ ВЗВЕШЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
MODW_M = (2/M)*abs(XW_M); % АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР ВЗВЕШЕННОЙ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
MODW_M(1) = (1/M)*abs(XW_M(1));
```

4. Исследование эффекта растекания спектра для суммы двух дискретных гармоник.

$f1_1 = 550 \rightarrow P1_1 = 17.6$

$f2_1 = 802.5 \rightarrow P2_1 = 25.68$



Пояснить:

- причина растекания спектра и цель применения окна:

Спектр растекается из-за того, что истинные гармоники находятся между шагом ДПФ.

Окно применено для минимизации последствия растекания спектра.

```
win_N = hamming(N)'; % ОКНО ХЭММИНГА — ВЕКТОР-СТОЛБЕЦ ДЛИНЫ N
xw1 = x1.*win_N; % ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, ВЗВЕШЕННАЯ ОКНОМ (ПЕРИОД N)
XW1 = fft(xw1); % ДПФ ВЗВЕШЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (ПЕРИОД N)
MODW1 = (2/N)*abs(XW1); % АМПЛИТУДНЫЙ СПЕКТР ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
MODW1(1) = (1/M)*abs(XW1(1));
```

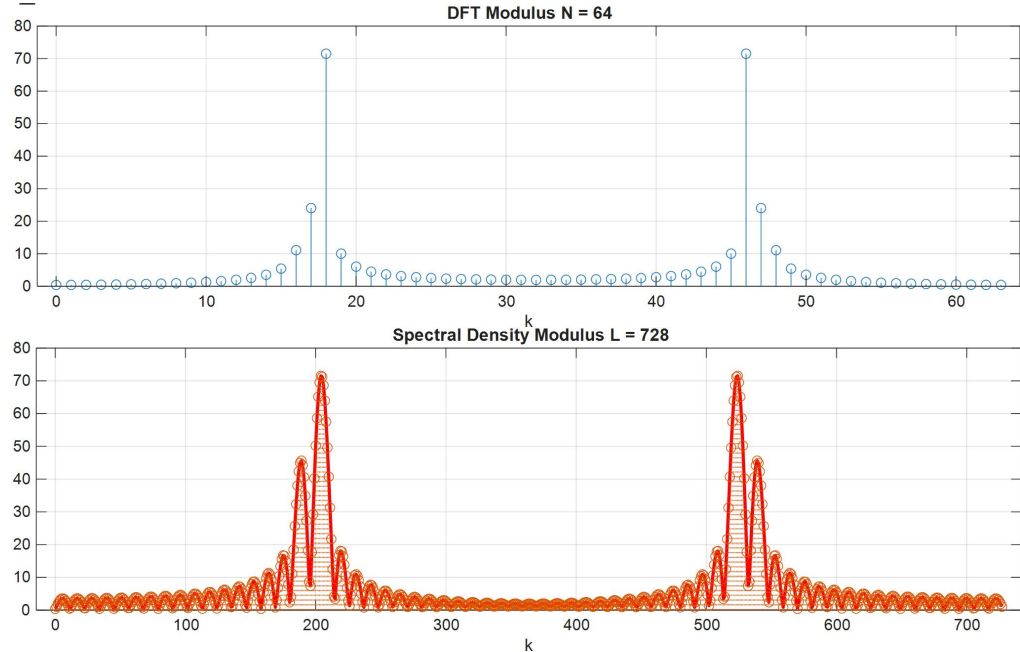
5. Улучшение различения дискретных гармоник с близко расположенными частотами

Delta_N = 31.25 Hz

Delta_f = 34

L = 728

Delta_L = 2.7473 Hz



Пояснить:

- соответствуют ли близко расположенные частоты условию (10.2);

Да, соответствуют. $31.25 < 34 < 62.5$

- соответствует ли выведенная длина L условию (10.3);

Да. Получается 727, 27 и функция `ceil()` округляет в большую сторону

- с какой погрешностью определены частоты и причину погрешности.

$(\Delta_L = 2.7473) / 2 = 1.37365$.

```
Delta_N = Fs/N; % РАЗРЕШЕНИЕ ПО ЧАСТОТЕ
Delta_f = abs(f1_2-f2_2); % РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ЧАСТОТАМИ
L = ceil(Fs/(Delta_f-Delta_N)); % ВЫБРАННАЯ ДЛИНА L
Delta_L = Fs/L; % ПЕРИОД ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПО ЧАСТОТЕ ПРИ ДЛИНЕ L
disp('%%')
.....
n = 0:(N-1); % ДИСКРЕТНОЕ НОРМИРОВАННОЕ ВРЕМЯ
w1_2 = 2*pi*f1_2/Fs; w2_2 = 2*pi*f2_2/Fs; % НОРМИРОВАННЫЕ ЧАСТОТЫ
x2 = A1*cos(w1_2*n)+A2*cos(w2_2*n); % КОНЕЧНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ
X2 = fft(x2); % ДПФ КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЛИНЫ N
MOD2 = abs(X2); % МОДУЛЬ ДПФ
X2_L = fft(x2,L); % ДПФ КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ДОПОЛНЕННОЙ НУЛЯМИ
ДО ДЛИНЫ L
MOD2_L = abs(X2_L); % МОДУЛЬ ДПФ
.....
L_2 = ceil(L/2); % ОСНОВНАЯ ПОЛОСА ЧАСТОТ L/2
[MODm, m]= max(MOD2_L(1:(L_2))); % МАКСИМУМ MODm И ИНДЕКС m ВЕКТОРА
MOD2_L (ПЕРВЫЙ ПИК)
k_1 = (m-1); f_1 = k_1*Delta_L; % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ И АБСОЛЮТНАЯ
(Гц) ЧАСТОТЫ ПЕРВОГО ПИКА
K = ceil(L/N); % КОЛИЧЕСТВО ОТСЧЕТОВ НА ПЕРИОДЕ ДИСКРЕТИЗАЦИИ Fs/N
K1 = m+K; K2 = m+2*K-1; % НИЖНЯЯ K1 и ВЕРХНЯЯ K2 ГРАНИЦЫ ИНТЕРВАЛА ПРИ
ПОИСКЕ ВТОРОГО ПИКА СПРАВА
[MODm1, m1]= max(MOD2_L(K1:K2)); % МАКСИМУМ MODm1 И ИНДЕКС m1 МОДУЛЯ
ДПФ MOD2_L НА ИНТЕРВАЛЕ [K1 K2]
K3 = m-(2*K-1); K4 = m-K; % НИЖНЯЯ K3 и ВЕРХНЯЯ K4 ГРАНИЦЫ ИНТЕРВАЛА
ПРИ ПОИСКЕ ВТОРОГО ПИКА СЛЕВА
[MODm2, m2]= max(MOD2_L(K3:K4)); % МАКСИМУМ MODm2 И ИНДЕКС m2 МОДУЛЯ
ДПФ MOD2_L НА ИНТЕРВАЛЕ [K3 K4]
```

```

if (MODm1>MODm2)
    k_2 = (K1+m1-1)-1; f_2 = k_2*Delta_L; % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ И
    АБСОЛЮТНАЯ (Гц) ЧАСТОТЫ ВТОРОГО ПИКА, ЕСЛИ ОН СПРАВА ОТ ПЕРВОГО
else
    k_2 = (K3+m2-1)-1; f_2 = k_2*Delta_L; % ДИСКРЕТНАЯ НОРМИРОВАННАЯ И
    АБСОЛЮТНАЯ (Гц) ЧАСТОТЫ ВТОРОГО ПИКА, ЕСЛИ ОН СПРАВА ОТ ПЕРВОГО
end

```

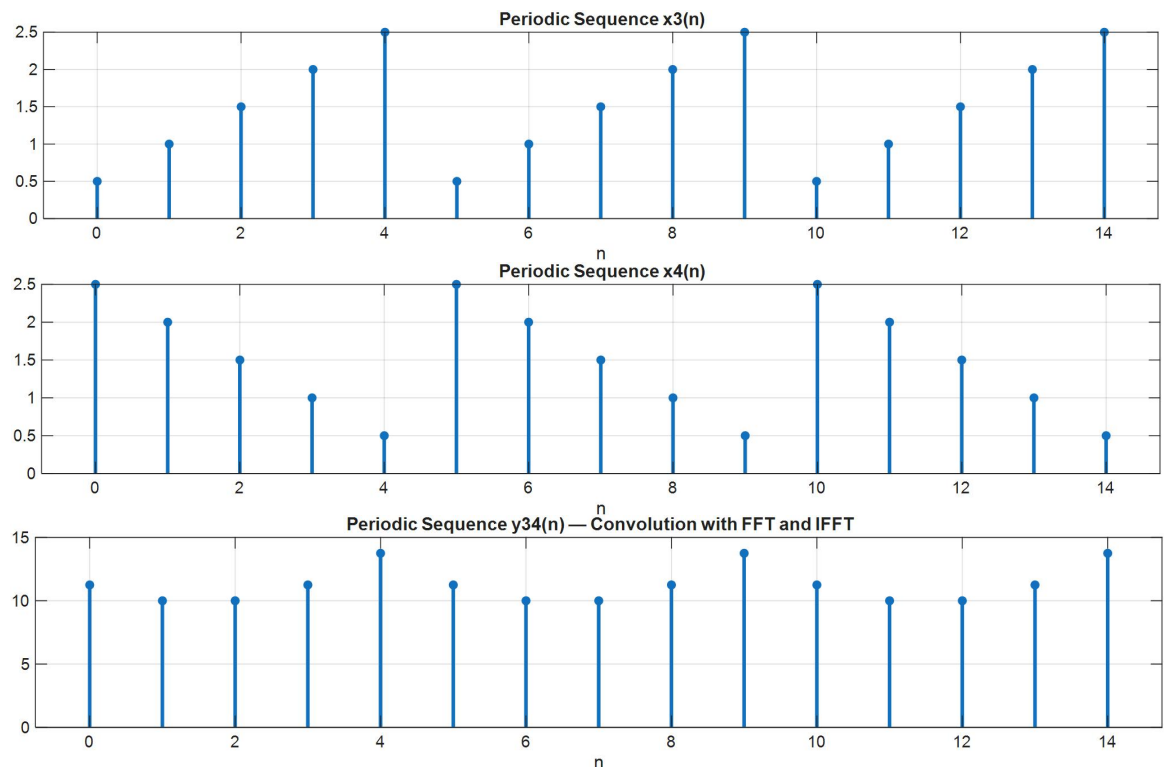
.....

Итоговые гармоники:

k_1 = 204 f_1 = 560.4396

k_2 = 189 f_2 = 519.2308

6. Вычисление круговой свёртки



Пояснить:

Записать формулу круговой свёртки и пояснить алгоритм ее вычисления с помощью ДПФ.

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}(m) \tilde{h}[(n-m) \bmod L]; \\ \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{h}(m) \tilde{x}[(n-m) \bmod L]. \end{cases}$$

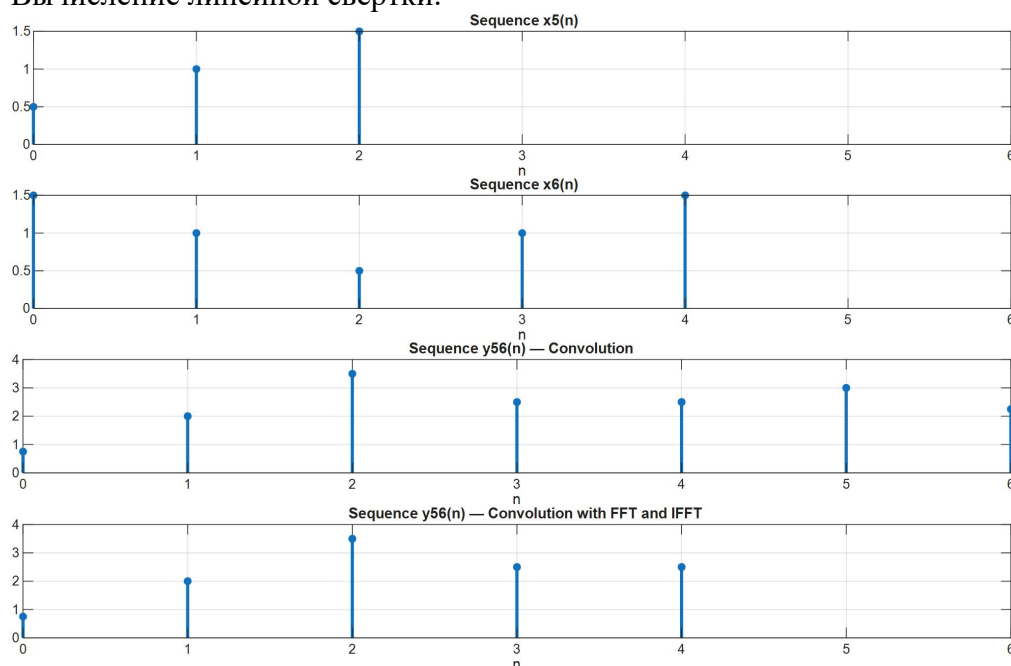
Вычисление круговой свёртки осуществляется с помощью ОБПФ от произведения двух ДПФ сворачиваемых последовательностей.

```

y34 = ifft(fft(x3).*fft(x4)); % КРУГОВАЯ СВЕРТКА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
L34 = length(y34);

```


7. Вычисление линейной свертки.



Пояснение:

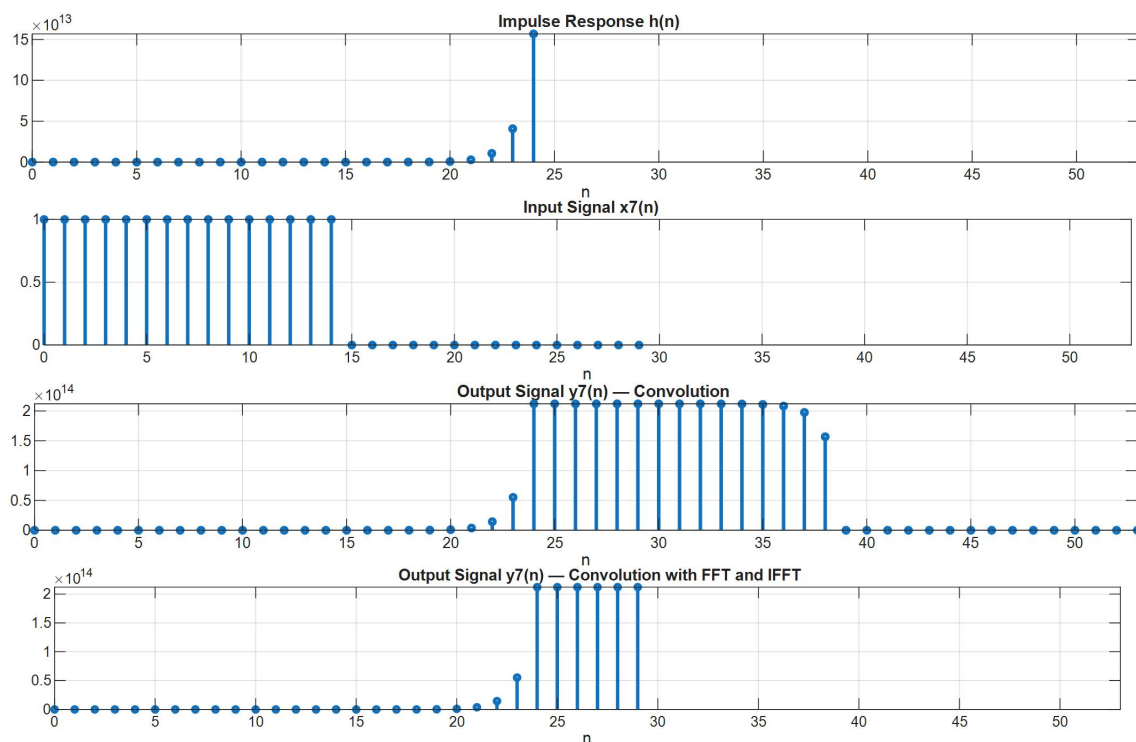
Записать формулу линейной свертки и пояснить алгоритм ее вычисления с помощью ДПФ:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

Для того, что вы через ДПФ рассчитать свёртку надо каждую последовательность дополнить нулями, чтобы длина сворачиваемых была N_1+N_2-1 . После дополнения надо перемножить ДПФ образы и взять ОДПФ.

```
y56_1 = conv(x5,x6); % ЛИНЕЙНАЯ СВЕРТКА, ВЫЧИСЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ conv
y56_2 = fftfilt(x5,x6); % ЛИНЕЙНАЯ СВЕРТКА, ВЫЧИСЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ fftfilt
```

8. Вычисление реакции ЛДС по формуле свёртки

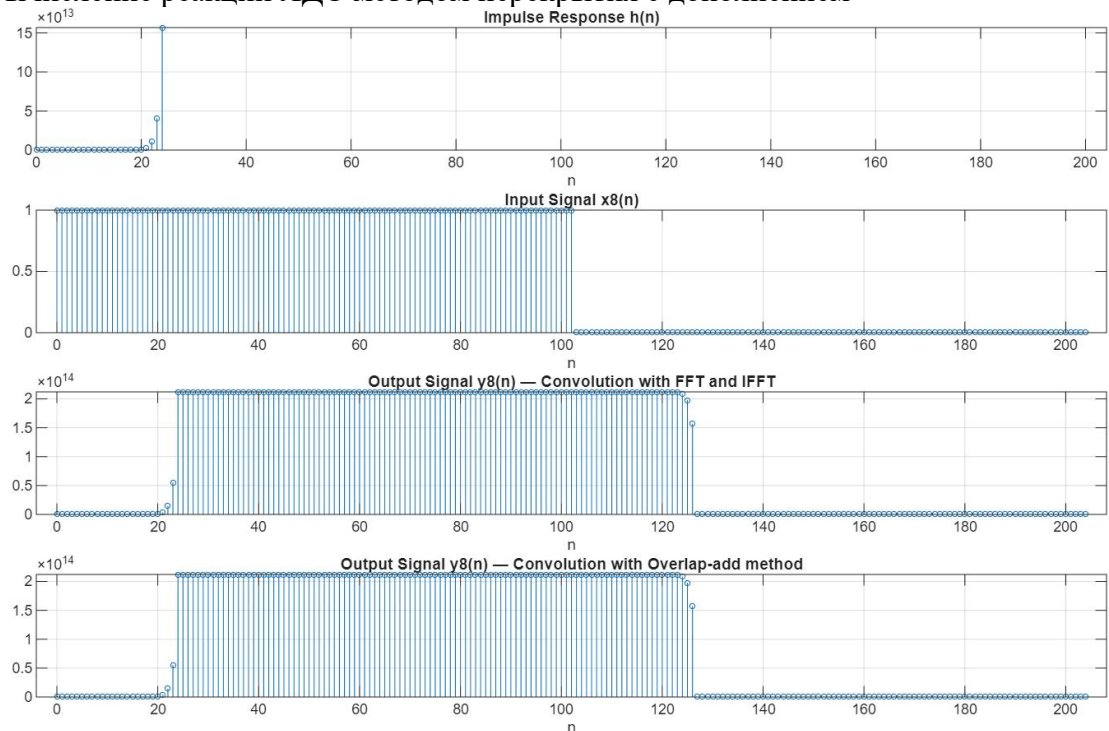


Пояснить:

- преимущество вычисления реакции по формуле свертки с помощью ДПФ; Быстрее, чем классическое.
- чему равна длина реакции, вычисленной первым и вторым способами; С помощью классической линейной – $L+N-1$. Через ДПФ – длине воздействия.
- в каком случае длину реакции необходимо ограничить до длины воздействия: При вычислении линейной свертки через ДПФ.

```
h = impz(b,a,N1)'; % ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА
x7 = input_1(N2); % ВОЗДЕЙСТВИЕ
y7_1 = conv(x7,h); % РЕАКЦИЯ, ВЫЧИСЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ conv
y7_2 = fftfilt(h,x7); % РЕАКЦИЯ, ВЫЧИСЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ fftfilt
L=N1+N2-1; % ДЛИНА СВЕРТКИ, ВЫЧИСЛЕННОЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ conv
```

9. Вычисление реакции ЛДС методом перекрытия с дополнением



Пояснить:

- в каком случае целесообразно вычислять реакцию методом перекрытия с накоплением

При большой длине воздействия, или непрерывном потоке данных.

```
x8 = input_1(N3); % ВОЗДЕЙСТВИЕ
y8_1 = fftfilt(h,x8); % РЕАКЦИЯ, ВЫЧИСЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ fftfilt
y8_2 = fftfilt(h,x8,N1); % РЕАКЦИЯ, ВЫЧИСЛЕННАЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ
fftfilt МЕТОДОМ НАКОПЛЕНИЯ С ПЕРЕКРЫТИЕМ
```