МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И. Ю. Балашова, П. П. Макарычев

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

ЧАСТЬ 1: ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методические указания
к выполнению лабораторных работ

Пенза 2015

УДК 519.852

Рецензент: Дорофеев В.Д., д.т.н., профессор, зав.кафедрой «Экономика и экономические информационные системы» Пензенского института технологий и бизнеса (филиал) Московского государственного университета технологий и управления им. К.Г. Разумовского (Филиал МГУТУ в Пензе)

Приведены задания и даны рекомендации для выполнения лабораторных работ по курсу «Исследование операций».

Методические указания подготовлены на кафедре «Математическое обеспечение и применение ЭВМ» и предназначены для бакалавров по направлению 231000.62 «Программная инженерия», изучающих данную дисциплину.

Составители: Балашова И.Ю., Макарычев П.П.

ЛАБОРАТОРНАЯ № 1

МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы: приобретение навыков построения моделей линейного программирования (ЛП), решения задач ЛП средствами системы Mathcad.

1.1. Теоретические сведения

Постановка задачи ЛП в общей форме. Требуется найти значения неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющих ограничениям

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \\ a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + ... + a_{m+1,n}x_n \le b_{m+1}, \\ .... \\ a_{m+k,1}x_1 + a_{m+k,2}x_2 + ... + a_{m+k,n}x_n \le b_{m+k}, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,l}, \ \ l \le n), \tag{1.2}$$

и доставляющих максимальное (минимальное) значение линейной функции

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n. \tag{1.3}$$

Коэффициенты a_{ij}, b_i, c_j $(i = \overline{1, m+k}, \ \ j = \overline{1,n})$ системы ограничений (1.2) представляют собой заданные постоянные величины. Функция (1.3) называется *целевой функцией*. Совокупность значений неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющих ограничениям (1.1) и (1.2), называется *допустимым решением*. Совокупность всевозможных допустимых решений задачи ЛП называется *областью допустимых решений задачи.* Допустимое решение, при котором целевая функция принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным решением*.

Постановка задачи ЛП в симметричной форме. Требуется найти значения неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющих ограничениям

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n}).$$

и доставляющих максимальное значение целевой функции

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n.$$

Постановка задачи ЛП в канонической форме. Требуется найти значения неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющих ограничениям

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1, n}).$$

и доставляющих максимальное значение целевой функции

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n.$$

Эквивалентность форм задач ЛП. Различные формы задачи ЛП эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью некоторых преобразований может быть переписана в форме другой задачи. Большинство методов решения задач ЛП предназначены для задач, заданных в канонической форме. Правила перехода к канонической форме:

1. Для перехода от минимума целевой функции к максимуму следует изменить знак это функции.
2. Ограничение-неравенство преобразуется в ограничение-равенство путем введения дополнительных неотрицательных неизвестных.
3. Если некоторая неизвестная не подчинена условию неотрицательности, то она заменяется (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью между двумя новыми неотрицательными неизвестными.

1.2. Примеры

Пример 1. Предприятие располагает сырьем, рабочей силой и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырех видов производимой продукции П1, П2, П3, П4. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного вида продукции, прибыль, получаемая предприятием, а также запасы ресурсов указаны в табл. 1.1:

Таблица 1.1

Вид ресурса	Затраты ресурсов на ед. продукции в месяц				Запас ресурсов
	П1	П2	П3	П4	
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила, человеко-часы	22	14	18	30	400
Оборудование, машино-часы	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу продукции, ден. ед.	300	250	560	480	

Требуется определить, какой ассортимент продукции следует выпускать, чтобы прибыль была максимальной. Решение найти с использованием системы Mathcad.

Решение

Неизвестные задачи:

x_1 – количество единиц продукции П1,
x_2 – количество единиц продукции П2,
x_3 – количество единиц продукции П3,
x_4 – количество единиц продукции П4.

Ограничения, накладываемые на неизвестные:

а) объемы производства продукции не могут быть отрицательным, следовательно,

$$x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; x_3 \geq 0,\; x_4 \geq 0.$$

б) затраты ресурсов на изготовление продукции не могут превосходить их запасов, следовательно,

$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 60,$ (ограничение на расход сырья),
$22x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 30x_4 \leq 400,$ (ограничение на использование рабочей силы),
$10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 16x_4 \leq 128.$ (ограничение на использование оборудования).

Суммарная прибыль от производства продукции рассчитывается как $Z = 300x_1 + 250x_2 + 560x_3 + 480x_4$. Целью фабрики является определение среди всех допустимых значений x_1, x_2, x_3, x_4 таких, которые максимизируют суммарную прибыль, т.е. целевую функцию Z.

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: требуется найти совокупность значений неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4, которые удовлетворяют ограничениям

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 60, \\ 22x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 30x_4 \leq 400, \\ 10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 16x_4 \leq 128, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; x_3 \geq 0,\; x_4 \geq 0,$$

и максимизируют целевую функцию

$$Z = 300x_1 + 250x_2 + 560x_3 + 480x_4.$$

Одним из способов решения задач линейного программирования в Mathcad является использование блока Given с функциями Minimize и Maximize . Пример решения приведен ниже.

ORIGIN := 1

$$a := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 22 & 14 & 18 & 30 \\ 10 & 14 & 8 & 16 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 60 \\ 400 \\ 128 \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 560 \\ 480 \end{pmatrix}$$

Исходные данные задачи

$$Z(x) := \sum_{j=1}^{4} \left(c_j \cdot x_j\right)$$

Целевая функция

$x_4 := 0$

Начальные значения неизвестнь

Given

Система ограничений

$a \cdot x \le b$

$x \ge 0$

$x := \text{Maximize}(Z, x)$

Оптимальное решение

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Z(x) = 8960$

Экстремум целевой функции

Таким образом, оптимальное решение задачи имеет вид:

продукция П1– 0 ед. в месяц;
продукция П2 – 0 ед. в месяц;
продукция П3 – 16 ед. в месяц;
продукция П4 – 0 ед. в месяц.

Такой объем производства принесет предприятию максимальную прибыль в размере 8960 ден. ед. в месяц.

Пример 2. Требуется привести к канонической форме общую задачу линейного программирования

$$Z = 6x_1 + 4x_2 - x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_3 \le 2; \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 1; \\ 2x_1 - 2x_2 \le 3. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_3 \ge 0.$$

Решение

Задача задана в общей форме. Для приведения ее к каноническому виду следует прежде всего перейти к задаче максимизации целевой функции. С этой целью введем функцию $F = -Z$.

Введем в левую часть каждого неравенства системы ограничений дополнительные неизвестные x_4, x_5, x_6 соответственно. Система запишется в виде равенств, причем в первое и третье уравнение системы ограничений неизвестные x_4, x_6 вводятся в левую часть со знаком «+», а во второе неравенство вводится x_5 со знаком «–».

$$\begin{cases} 4x_1 - x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_6 = 3; \end{cases}$$

Так как неизвестная x_2 не подчинена условию неотрицательности, то представим ее в виде разности двух неотрицательных неизвестных $x_2 = x_7 - x_8$, где $x_7 \geq 0$, $x_8 \geq 0$.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + (x_7 - x_8) - x_3 - x_5 = 1; \\ 2x_1 - 2(x_7 - x_8) + x_6 = 3; \end{cases}$$

В целевую функцию дополнительные неизвестные вводятся с нулевыми коэффициентами.

$$F = -6x_1 - 4(x_7 - x_8) + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 \to \max$$

В результате всех указанных преобразований получим каноническую форму задачи в следующем виде:

$$F = -6x_1 - 4x_7 + 4x_8 + x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + x_7 - x_8 - x_3 - x_5 = 1; \\ 2x_1 - 2x_7 + 2x_8 + x_6 = 3; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0, x_8 \geq 0.$$

1.3. Задания

Задание 1. Построить математическую модель задачи ЛП. Найти оптимальное решение, экстремальное значение целевой функции, количество использованных ресурсов, используя систему Mathcad. Сделать соответствующие выводы.

Варианты

1. Промышленная фирма специализируется на производстве технических лаков. Представленная ниже таблица содержит информацию о ценах продажи и соответствующих издержках производства единицы полировочного и матового лаков.

Лак	Цена продажи 1 л., ден. ед.	Издержки производства 1 л, ден. ед.
Матовый	13,0	9,0
Полировочный	16,0	10,0

Для производства 1 л матового лака необходимо затратить 6 мин трудозатрат, а для производства одного галлона полировочного лака - 12 мин. Резерв фонда рабочего времени составляет 400 чел.-ч. в день. Размер ежедневного запаса необходимой химической смеси равен 100 мл, тогда как ее расход на 1 л матового и полировочного лаков составляет 0,05 мл и 0,02 мл соответственно. Технологические возможности завода позволяют выпускать не более 3000 л лака в день. Требуется определить ежедневный оптимальный план производства и соответствующую ему величину прибыли.

2. На электростанции для генерации электрического тока используется пылевидный уголь двух сортов: С1 и С2. Перед сжиганием эти сорта угля смешиваются. Отделом охраны окружающей среды установлены следующие ограничения: концентрация выбрасываемого в воздух сернистого газа не должна превышать 0,002 мг/м^3, количество выбрасываемых аэрозольных частиц не должно превышать 10 кг в час. Характеристики используемых сортов угля приведены в следующей таблице.

Сорт угля	Концентрация серы	Количество выделяемых аэрозольных частиц (кг/час)	Генерируемая мощность (кг/час)
С1	0,0018	2,1	12 000
С2	0,0021	0,9	9 000

Найдите оптимальную смесь углей обоих сортов.

3. Завод производит три вида продукции: П1, П2 и П3. В производственном процессе используются материалы М1 и М2, обрабатываемые на станках С1 и С2. В таблице приведены данные, характеризующие производственный процесс изготовляемой продукции.

Ресурсы	Единицы измерения	Кол-во ресурсов на кг продукции			Ежедневный фонд ресурсов
		П1	П2	П3	
Время работы станка С1	Минуты	1	2	1	430
Время работы станка С2	Минуты	3	0	2	460
Материал М1	Кг	1	4	0	420
Материал М2	Кг	1	1	1	300

Ежедневный объем производства продукции П1 должен быть не менее 70 кг, продукции П2 – не более 240 кг. Доход за 1 кг продукции П1, П2 и П3 составляет соответственно 300, 200 и 500 ден. ед. Требуется составить оптимальный план производства.

4. Молочный завод выпускает молоко, кефир и сметану, расфасованные в бутылки. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. Всего для производства продукции завод может использовать 136 000 кг молока. Затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-часов. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 машино-часов. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-часов, автоматы по расфасовке сметаны – в течение 16,25 машино-часов. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 ден. ед. Завод должен производить не менее 100 т молока, расфасованного в бутылки. На производство другой продукции не имеется ограничений. Требуется составить оптимальный план производства продукции.

5. Из двух сортов бензина образуются две смеси — А и В. Смесь А содержит 60% бензина первого сорта и 40% бензина сорта; смесь В - 80% бензина первого сорта и 20% бензина второго сорта. Цена 1 кг смеси А - 10 д.е., а смеси В — 12 д.е. Производство смеси В ограничено 100 кг. Составьте план производства смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется бензина 50 т первого сорта и 30 т второго сорта.

6. Предприятие планирует рекламировать свою продукцию по местному радио и телевидению. Бюджет на рекламу ограничен суммой 10 000 ден. ед. в месяц. Одна минут рекламного времени на радио стоит 15 ден. ед., на телевидении – 300 ден. ед. Предприятие полагает, что реклама на радио по времени должна превышать рекламу на телевидении не менее чем в два раза. Вместе с тем известно, что нерационально использовать более 400 минут рекламы на радио в месяц. Требуется разработать оптимальный бюджет для рекламы на радио и телевидении.

7. При откорме каждое животное должно получать не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина. Для составления рациона используют два вида корма, представленных в следующей таблице:

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг	
	корма 1	корма 2
Белки	3	1
Углеводы	1	2
Протеин	1	6

Ежедневный расход корма 2 ограничен 5 кг. Стоимость 1 кг корма первого вида – 4 ден. ед., второго – 6 ед. Составьте дневной рацион питательности, имеющий минимальную стоимость.

8. Нефтеперерабатывающий завод получает 4 различных полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин А 2:3:5:2, бензин Б - 3:1:2:1 и бензин С - 2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина составляет соответственно 12000 руб., 10000 руб., 15000 руб. Определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль.

9. Предприятие производит два безалкогольных напитка – «Лимонад» и «Тоник». Предприятие может продать всю продукцию, которая будет произведена. Однако объем производства ограничен количеством основного ингредиента и производственной мощностью имеющегося оборудования. Для производства 1 л «Лимонада» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л «Тоника» – 0,04 ч. Расход специального ингредиента составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л «Лимонада» и «Тоника» соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы имеется 24 ч. времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента. Прибыль фирмы составляет 0,10 ден. ед. за 1 л «Лимонада» и 0,30 ден. ед. за 1 л «Тоника». Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно, если цель фирмы состоит в максимизации ежедневной прибыли?

10. Продукция двух видов (краска для внутренних (КВ) и наружных (КН) работ) поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта А и В. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 тонн, соответственно. Расходы продуктов А и В на 1 т соответствующих красок приведены в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на тонну краски		Максимально возможный запас, т
	КН	КВ	
А	1	2	6
В	2	1	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску КВ никогда не превышает спроса на краску КН более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску КВ никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок составляют 3000 ден. ед. для краски КН и 2000 ден. ед. для краски КВ. Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Задание 2. Привести задачу к канонической форме.

Варианты

1. $$Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min, \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_3 \ge 5, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

2. $$Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min, \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_2 + x_3 \le 12, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \ge 4, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0.$$

3. $$Z = 3x_1 + 2x_3 \to \min, \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge -36, \end{cases} \quad x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

4. $$Z = 4x_1 + x_2 + x_3 \to \min, \quad \begin{cases} -x_1 - x_3 \ge 4, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 9, \\ 2x_2 + x_3 = 4, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0.$$

5. $$Z = 8x_1 - 9x_2 + x_3 + 1 \to \max, \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 \le 8, \\ x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \le 6, \end{cases} \quad x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

6. $$Z = 7x_1 - x_2 + 2 \to \max, \quad \begin{cases} x_2 + x_3 \ge -15, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12, \\ x_1 + 3x_3 - 9x_2 \le 10, \end{cases} \quad x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

7. $$Z = x_1 - 3x_2 + x_3 + 6 \to \min, \quad \begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 \ge -3, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \le 6, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

8. $$Z = 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min, \quad \begin{cases} -9x_1 + 7x_2 + 14x_3 \ge 2, \\ 12x_1 + 8x_2 - 3x_3 \le 57 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 \le 18, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0.$$

9. $$Z = 18x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \max, \quad \begin{cases} x_2 + 2x_3 \le 5, \\ 4x_1 - 3x_3 \ge 2, \\ x_1 - x_3 - 7x_2 \le 9, \end{cases} \quad x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

10. $$Z = 4x_1 + 8x_2 + 7x_3 \to \min, \quad \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 \ge 1, \\ 7x_2 + 6x_1 \le 18, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 \le 25, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ № 2

СИМПЛЕКС-МЕТОД

Цель работы: приобретение навыков решения задач линейного программирования симплекс-методом.

2.1. Теоретические сведения

Основные понятия. Любую задачу ЛП можно свести к системе линейных уравнений путем введения дополнительных переменных. Тогда, если задача ЛП имеет оптимальное решение, то оно совпадает, по крайней мере, с одним из ее допустимых базисных решений. Базисным называется решение, получаемое приравниванием свободных переменных нулю. Если при этом базисное решение удовлетворяет условиям неотрицательности (1.2), то оно является *допустимым*.

Симплексный метод – это вычислительная процедура, основанная на последовательном переборе допустимых базисных решений. При этом значение целевой функции улучшается (по крайней мере, не ухудшается). Основная идея симплекс-метода заключается в следующем:

- находится одно из допустимых базисных решений, которое называют начальным;
- осуществляется его пошаговое улучшение, пока не будет получено оптимальное решение, либо обнаружится, что целевая функция не ограничена на множестве допустимых значений.

Нахождение начального допустимого базисного решения. Пусть задача линейного программирования задана в виде:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1,\ldots,n).$$

С помощью дополнительных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ приведем задачу к канонической форме с учетом условия неотрицательности свободных членов. Также перепишем целевую функцию в виде уравнения

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n + Z = 0.$$

Тогда задачу ЛП можно записать в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ a_{m+1,1}x_1 + \ldots + a_{m+1,n}x_n + Z = b_{m+1}, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1, n+m}),$$

где $a_{m+1,j} = -c_j \quad (j = 1,\ldots,n)$, $b_{m+1} = 0$.

Поскольку $b_i \ge 0 \ \ (i = \overline{1,m})$, имеется начальное допустимое базисное решение $X = (\underbrace{0,0,\ldots 0}_{n\ раз}, b_1, b_2, \ldots, b_m)$, которому соответствует начальное значение целевой функции $Z = b_{m+1} = 0$.

Симплексная таблица. Выполнение симплексных преобразований удобно оформлять в виде последовательности таблиц. Первоначально составляется исходная симплексная таблица, в которой представлены данные задачи, начальное допустимое базисное решение и начальное значение целевой функции (табл. 2.1).

Таблица 2.1.

$j \rightarrow$		1		$\ldots$			$n+m$	
$i \downarrow$	$x_{k(i)}$	x_1	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	$\ldots$	x_{n+m}	b_i
1	x_{n+1}	a_{11}	$\ldots$	a_{1n}	1	$\ldots$	0	b_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\ldots$
m	x_{n+m}	a_{m1}	$\ldots$	a_{mn}	0	$\ldots$	1	b_m
$m+1$	Z	$a_{m+1,1}$	$\ldots$	$a_{m+1,n}$	0	$\ldots$	0	b_{m+1}

В табл. 2.1 приняты следующие обозначения: $k(i)$, $i = 1,\ldots m$ - номера базисных неизвестных; $x_{k(i)}$ - базисные неизвестные, записанные в последовательности вхождения в базис.

Симплекс-метод. Вычислительная схема решения задачи ЛП симплекс-методом на основе начального допустимого базисного решения имеет вид:

Шаг 1. *Проверка текущего допустимого базисного решения на оптимальность.* Анализируются элементы оценочной строки. Если все $a_{m+1,j} \ge 0$, где $j = 1,\ldots,n+m$, то достигнуто оптимальное решение. Тогда:

а) вычислить значения базисных неизвестных: $x_{k(i)} = b_i$, $i = 1,\ldots,m$;

б) вычислить значения свободных неизвестных: $x_j = 0$, для $j = 1,...,n+m$, $j \neq k(i)$;

г) найти оптимальное значение целевой функции $Z = b_{m+1}$, прекратить дальнейшие вычисления.

Если в оценочной строке найдется хотя бы одна отрицательная оценка, то перейти к шагу 2.

Шаг 2. *Определение разрешающего столбца.* Определить разрешающий столбец p по наименьшему отрицательному элементу оценочной строки. Полученный номер p является индексом неизвестной, которая войдет в новый базис.

Шаг 3. *Проверка признака неограниченности целевой функции.* Анализируются элементы разрешающего столбца. Если все $a_{ip} \leq 0$, где $i = 1,...,m$, то $Z_{\max} \to \infty$, оптимальное решение отсутствует, вычисления прекращаются. В противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. *Вычисление симплексных отношений.* Для положительных элементов разрешающего столбца вычислить

$$s_i = \frac{b_i}{a_{ip}}, \text{ где } i \in \{1,...,m \mid a_{ip} > 0\}.$$

Шаг 5. *Определение разрешающей строки.* Определить разрешающую строку q по наименьшему симплексному отношению. Полученный номер q определяет индекс $k(q)$ неизвестной, выводимой из базиса.

Шаг 6. *Переход к новому базису*. Произвести замену в базисе: на место неизвестной $x_{k(q)}$ записать неизвестную x_p.

Шаг 7. *Нахождение нового допустимого базисного решения.* Для этого:

а) пересчитать элементы разрешающей строки по формулам:

$$a'_{qj} = \frac{a_{qj}}{a_{qp}}, \qquad j = 1,...n+m,$$

$$b'_q = \frac{b_q}{a_{qp}}.$$

б) вычислить элементы всех остальных строк (при $i \neq q$, $i = 1,...,m+1$) по формулам:

$$a'_{ij} = a_{ij} + a'_{qj} \cdot (-a_{ip}), \qquad j = 1,...,n+m,$$

$$b'_i = b_i + b'_q \cdot (-a_{ip}).$$

в) для проверки оптимальности нового допустимого базисного решения перейти к шагу 1.

2.2. Пример

Пусть задача об использовании ресурсов имеет следующую математическую модель: требуется найти значения неизвестных x_1 и x_2, удовлетворяющих ограничениям

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$

и доставляющих максимальное значение линейной функции $Z = -x_1 + x_2 + 3x_3$.

Решение

Приведем задачу к канонической форме, учитывая условие неотрицательности свободных членов. В результате получим:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + \underline{x_4} = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + \underline{x_5} = 2, \\ 3x_1 + x_3 + \underline{x_6} = 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6},$$

$$Z = -x_1 + x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max.$$

Перепишем целевую функцию в виде уравнения:

$$x_1 - x_2 - 3x_3 + Z = 0.$$

Составим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + \underline{x_4} = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + \underline{x_5} = 2, \\ 3x_1 + x_3 + \underline{x_6} = 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 + \underline{Z} = 0, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots 6.$$

Свободные члены системы уравнений положительны, при этом система приведена к единичному базису $\{x_4, x_5, x_6\}$. Приравнивая свободные переменные x_1, x_2, x_3 нулю, получаем начальное допустимое базисное решение $X = (0,0,0,1,2,5)$, которому соответствует значение целевой функции $Z = 0$.

Исходная симплексная таблиц имеет вид (табл. 2.2):

Таблица 2.2

$x_{k(i)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4	2	-1	1	1	0	0	1
x_5	-4	2	-1	0	1	0	2
x_6	3	0	1	0	0	1	5
Z	1	-1	-3	0	0	0	0

Проверим оптимальность найденного решения симплекс-методом.

1 итерация

Шаг 1. В последней строке таблицы имеются две отрицательные оценки: $a_{42} = -1$ и $a_{43} = -3$. Это означает, что начальное допустимое решение не является оптимальным и его можно улучшить.

Шаг 2. Определяем разрешающий столбец по наименьшему отрицательному элементу оценочной строки. В данном случае это третий столбец, т.е. $p = 3$. Следовательно, в новый базис войдет переменная x_3.

Шаг 3. Так как среди элементов разрешающего столбца есть положительные, то существует новое допустимое базисное решение, более близкое к оптимальному.

Шаг 4. Подсчитаем симплексные отношения для положительных элементов разрешающего столбца:

$$s_1 = \frac{b_1}{a_{13}} = \frac{1}{1} = 1,$$

s_2 не вычисляем, т.к. $a_{23} = -1 < 0$,

$$s_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{5}{1} = 5.$$

Шаг 5. Минимальное симплексное отношение находится в первой строке, т.е. $q = 1$. Значит, из базиса будет исключена неизвестная с номером $k(q) = k(1) = 4$, т.е. неизвестная x_4.

Шаг 6. Место базисной переменной x_4 занимает переменная x_3. Новый базис имеет вид:

$$\{x_3, x_5, x_6\}.$$

Шаг 7. Строим новую симплексную таблицу и проводим пересчет элементов таблицы согласно шагу 7 симплексных преобразований (табл. 2.3).

Таблица 2.3

$x_{k(i)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	$\frac{2}{1}=1$	$-\frac{1}{1}=-1$	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{0}{1}=0$	$\frac{0}{1}=0$	$\frac{1}{1}=1$
x_5	$-4+2\cdot1=$ $=-2$	$2+(-1)\cdot1=1$	$-1+1\cdot1=0$	$0+1\cdot1=1$	$1+0\cdot1=1$	$0+0\cdot1=0$	$2+1\cdot1=3$
x_6	$3+2\cdot(-1)=$ $=1$	$0+(-1)\cdot(-1)=$ $=1$	$1+1\cdot(-1)=$ $=0$	$0+1\cdot(-1)=$ $=-1$	$0+0\cdot(-1)=$ $=0$	$1+0\cdot(-1)=$ $=1$	$5+1\cdot(-1)=$ $=4$
Z	$1+2\cdot3=7$	$-1+(-1)\cdot3=$ $=-4$	$-3+1\cdot3=0$	$0+1\cdot3=3$	$0+0\cdot3=0$	$0+0\cdot3=0$	$0+1\cdot3=3$

В табл. 2.4 получено новое допустимое базисное решение $X=(0,0,1,0,3,4)$, которому соответствует значение целевой функции $Z=b_4=3$. Переходим к шагу 1.

2 итерация

Шаг 1. Проверяем новое допустимое базисное решение на оптимальность. В оценочной строке имеется отрицательный коэффициент $a_{42}=-4$. Значит, данное решение не является оптимальным.

Шаг 2. Разрешающий столбец $p=2$. Неизвестная x_2 подлежит включению в базис.

Шаг 3. Так как среди элементов разрешающего столбца есть положительные, то существует новое допустимое базисное решение, более близкое к оптимальному.

Шаг 4. Считаем симплексные отношения:

s_1 не вычисляем, т.к. $a_{12}=-1<0$,

$$s_2=\frac{b_2}{a_{22}}=\frac{3}{1}=3,$$

$$s_3=\frac{b_3}{a_{32}}=\frac{4}{1}=4.$$

Шаг 5. Наименьшее симплексное отношение соответствует второй строке: $q=2$. Базисная неизвестная $x_{k(q)}=x_{k(2)}=x_5$ будет исключена из базиса.

Шаг 6. Исключаем x_5 из базиса, а на ее место ставим переменную x_2. Получаем новый базис $\{x_3,x_2,x_6\}$.

Шаг 7. Составляем новую симплексную таблицу (табл. 2.4) и проводим пересчет ее элементов согласно шагу 7.

Таблица 2.4.

$x_{k(i)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	$2+(-2)\cdot 1=0$	$-1+1\cdot 1=0$	$1+0\cdot 1=1$	$1+1\cdot 1=2$	$0+1\cdot 1=1$	$0+0\cdot 1=0$	$1+3\cdot 1=4$
x_2	$-\frac{2}{1}=-2$	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{0}{1}=0$	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{0}{1}=0$	$\frac{3}{1}=3$
x_6	$1+(-2)\cdot(-1)=$ $=3$	$1+1\cdot(-1)=$ $=0$	$0+0\cdot(-1)=$ $=0$	$-1+1\cdot(-1)=$ $=-2$	$0+1\cdot(-1)=$ $=-1$	$1+0\cdot(-1)=$ $=1$	$4+3\cdot(-1)=$ $=1$
Z	$7+(-2)\cdot 4=$ $=-1$	$-4+1\cdot 4=$ $=0$	$0+0\cdot 4=$ $=0$	$3+1\cdot 4=$ $=7$	$0+1\cdot 4=$ $=4$	$0+0\cdot 4=$ $=0$	$3+3\cdot 4=$ $=15$

В табл. 1.6 получено третье допустимое базисное решение $X=(0,3,4,0,0,1)$, которому соответствует значение целевой функции $Z(X)=b_4=15$.

3 итерация

Шаг 1. В оценочной строке имеется отрицательный коэффициент $a_{41}=-1$. Значит, полученное решение не является оптимальным.

Шаг 2. Разрешающий столбец $p=1$. Неизвестная x_1 подлежит включению в базис.

Шаг 3. Так как среди элементов разрешающего столбца есть положительный, то существует новое допустимое базисное решение, более близкое к оптимальному.

Шаг 4. Подсчитаем симплексные отношения для положительных элементов разрешающего столбца:

s_1 не вычисляем, т.к. $a_{11}=0$,

s_2 не вычисляем, т.к. $a_{21}=-2<0$,

$$s_3=\frac{b_3}{a_{31}}=\frac{1}{3}.$$

Шаг 5. Разрешающая строка $q=3$. Из базиса будет исключена неизвестная с индексом $k(q)=k(3)=6$, т.е. неизвестная x_6.

Шаг 6. Место базисной неизвестной x_6 занимает неизвестная x_6. Новый базис имеет вид:

$$\{x_3,x_5,x_1\}.$$

Шаг 7. Строим новую симплексную таблицу и проводим пересчет элементов таблицы согласно шагу 7 симплексных преобразований (табл. 2.5).

Таблица 2.5.

$x_{k(i)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	$1\cdot 0+0=0$	$0\cdot 0+0=0$	$0\cdot 0+1=1$	$-\frac{2}{3}\cdot 0+2=2$	$-\frac{1}{3}\cdot 0+1=1$	$\frac{1}{3}\cdot 0+0=0$	$\frac{1}{3}\cdot 0+4=4$
x_2	$1\cdot 2+(-2)=0$	$0\cdot 2+1=1$	$0\cdot 2+0=0$	$-\frac{2}{3}\cdot 2+1=-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}\cdot 2+1=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot 2+0=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot 2+3=3\frac{2}{3}$
x_1	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{0}{3}=0$	$\frac{0}{3}=0$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Z	$1\cdot 1+(-1)=0$	$0\cdot 1+0=0$	$0\cdot 1+0=0$	$-\frac{2}{3}\cdot 1+7=\frac{19}{3}$	$-\frac{1}{3}\cdot 1+4=\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot 1+0=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot 1+15=15\frac{1}{3}$

Так как в оценочной строке таблицы все коэффициенты неотрицательны, то получено оптимальное решение $X=\left(\frac{1}{3},3\frac{2}{3},4,0,0,0\right)$, которому соответствует $Z_{\max}=15\frac{1}{3}$.

Интерпретация оптимального решения. При интерпретации результатов оптимизации в задаче об использовании ресурсов, прежде всего, интересуют объемы производства продукции, т.е. значения основных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Используя данные, содержащиеся в последней симплекс-таблице, основные результаты решения нашей задачи можно представить в следующем виде (табл. 2.6):

Таблица 2.6

Основные переменные и целевая функция	Оптимальные значения	Интерпретация
x_1	$\frac{1}{3}$	Объем производства продукции Π_1 должен составлять $\frac{1}{3}$ ед. за исследуемый временной период
x_2	$3\frac{2}{3}$	Объем производства продукции Π_2 должен составлять $3\frac{2}{3}$ ед. за исследуемый временной период
x_3	4	Объем производства продукции Π_3 должен составлять 4 ед. за исследуемый временной период
Z	$15\frac{1}{3}$	Доход от реализации продукции составит $15\frac{1}{3}$ ден. ед. за исследуемый временной период

Анализ статуса ресурсов. Ресурсы R_i $(i=1,...,m)$ можно отнести либо к дефицитным, либо к недефицитным — в зависимости от того, полное или частичное их использование предусматривает оптимальное решение задачи.

Если ресурс является дефицитным, то увеличение его запаса может привести к улучшению оптимального решения. Любое увеличение запаса недефицитного ресурса сверх установленного максимального значения приведет лишь к тому, что они станут еще более недефицитными. Оптимальное решение задачи при этом останется неизменным.

Статус ресурсов (дефицитный или недефицитный) можно установить из результирующей симплекс-таблицы, анализируя значения дополнительных неизвестных, ассоциируемых с соответствующими ограничениями, т.е неизвестных x_{n+i}, $i=1,...,m$. Положительное значение дополнительной переменной указывает на неполное использование соответствующего ресурса, т.е. данный ресурс является недефицитным. Если же дополнительная переменная равна нулю, то это свидетельствует о полном потреблении соответствующего ресурса. Статус ресурсов для нашей задачи определен в табл. 2.7.

Таблица 2.7

Ресурс	Ассоциируемая дополнительная переменная	Значение ассоциируемой дополнительной переменной	Статус ресурса	Интерпретация
R_1	x_4	0	Дефицитный	Ресурс R_1 полностью потреблен. Увеличение запаса ресурса R_1 позволит увеличить доход от реализации продукции
R_2	x_5	0	Дефицитный	Ресурс R_2 полностью потреблен. Увеличение запаса ресурса R_2 позволит увеличить доход от реализации продукции
R_3	x_6	0	Дефицитный	Ресурс R_3 полностью потреблен. Увеличение запаса ресурса R_3 позволит увеличить доход от реализации продукции

Анализ ценности ресурса. При ограничениях, связанных с дополнительным привлечением ресурсов, возникает проблема: какому из дефицитных ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств на увеличение их запасов, с тем, чтобы получить от них максимальную отдачу? Для решения данной проблемы анализируется характеристика ценности каждой дополнительной единицы дефицитного ресурса. Ценность ресурса показывает, насколько улучшится значение целевой функции при увеличении запаса соответствующего вида ресурса на единицу и при использовании его наилучшим образом. Ценность дефицитного ресурса можно установить из последней строки итоговой симплекс-таблицы, анализируя оценки $a_{m+1,n+i}$ $(i=1,...,m)$ дополнительных неизвестных x_{n+i} $(i=1,...,m)$, ассоциируемых с соответствующими ограничениями (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Дополнительная переменная	Оценка дополнительной переменной	Интерпретация
x_4	$\frac{19}{3}$	Ресурс R_1 имеет наибольшую ценность. Поэтому дополнительные вложения в первую очередь следует направить на увеличение ресурса R_1 и лишь затем – на увеличение ресурса R_2 и R_3.
x_5	$\frac{11}{3}$	
x_6	$\frac{1}{3}$	

2.4. Задания

1. Составить на заданном языке программу решения задачи использования ресурсов симплекс-методом на основе начального допустимого базисного решения. Требования к программе:

- программа должна иметь диалоговый характер;
- программа должна выдавать промежуточные симплекс-таблицы, находить оптимальное решение и экстремум целевой функции;
- программа должна проводить анализ оптимального решения, статуса ресурсов и ценности каждого ресурса.

2. Задачу ЛП привести к канонической форме, построить начальное допустимое базисное решение. Найти оптимальное решение и экстремальное значение целевой функции с помощью написанной программы.

3. Осуществить тестирование разработанной программы, проверив полученное решение с помощью системы Mathcad.

Варианты

1.
$$Z = 6x_1 + 5x_2 + 9x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 20, \\ 4x_1 + 3x_3 \le 18, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

2.
$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 7, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

3.
$$Z = 24x_1 + 22x_2 + 45x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 42, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 40, \\ x_1 + 0.5x_2 + x_3 \le 45, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

4.
$$Z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 24, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 \le 12, \\ 6x_1 + 3x_3 + x_4 \le 35, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

5.
$$Z = 24x_1 + 9x_2 + 4x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 36x_1 + 9x_2 + 4x_3 \le 24, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12, \\ 12x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 36, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

6.
$$Z = 60x_1 + 26x_2 + 15x_3 + 4.75x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 20x_1 + 9x_2 + 6x_3 + x_4 \le 20, \\ 10x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \le 10, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

7.
$$Z = 18x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 18, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12, \\ 9x_1 + 9x_2 + 3x_3 \le 36, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

8.
$$Z = 30x_1 + 32x_2 + 30x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 12x_1 + 10x_2 + 9x_3 \le 220, \\ 15x_1 + 18x_2 + 20x_3 \le 400, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 100, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

9.
$$Z = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 3, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 6, \\ 3x_1 + x_3 \le 15, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

10.
$$Z = 15x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 2x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 0.6x_4 \le 10, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 0.25x_4 \le 12, \\ 7x_1 + x_4 \le 35, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ № 3

МЕТОД «СЕВЕРО-ЗАПАДНОГО УГЛА»

Цель работы: приобретение навыков построения начального допустимого базисного решения транспортной задачи методом «северо-западного угла».

3.1. Теоретические сведения

Постановка транспортной задачи. Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, a_2, ..., a_m$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_1, b_2, ..., b_n$. Известны c_{ij} $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$ - стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить план перевозок, позволяющий:

- вывезти все грузы от поставщиков,
- полностью удовлетворить запросы потребителей,
- минимизировать суммарную стоимость перевозок.

Количество груза, планируемого к перевозке от i-го поставщика j-му потребителю, обозначают через x_{ij}. Данные транспортной задачи представляют в виде распределительной таблицы (табл. 3.1).

Таблица 3.1

a_i \ b_i	b_1	b_2	. . .	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	. . .	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	. . .	c_{2n} x_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	. . .	c_{mn} x_{mn}

Математическая модель транспортной задачи. Требуется найти значения неизвестных x_{ij} $(i = 1, ..., m,\quad j = 1, ..., n)$, удовлетворяющие ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, ..., m \tag{4.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, ..., n, \tag{4.2}$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n, \tag{4.3}$$

и обеспечивающие минимум целевой функции

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ . \tag{4.4}$$

Транспортная задача относится к классу задач ЛП, поэтому обладает всеми качествами линейных оптимизационных задач.

Допустимое базисное решение транспортной задачи. Всякое решение системы ограничений (4.1 – 4.3), определяемое матрицей $X = (x_{ij})_{m \times n}$, называется *допустимым решением* транспортной задачи. Допустимое решение, при котором целевая функция (4.4) принимает минимальное значение, называется *оптимальным решением* транспортной задачи. Если транспортная задача имеет оптимальное решение, то оно совпадает, по крайней мере, с одним из ее допустимых базисных решений. Число базисных переменных в транспортной задаче равно $m + n - 1$.

Уравнение баланса. Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, <u>необходимо и достаточно</u>, чтобы суммарные запасы груза были равны суммарным потребностям, т.е. имело место уравнение баланса

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

Модель транспортной задачи, в которой соблюдается уравнение баланса, называется *закрытой*. Если уравнение баланса не выполняется, то модель называется *открытой*.

Правила приведения открытой модели транспортной задачи к открытой:

1. Если запасы превышают потребности, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводится фиктивный $(n+1)$ пункт потребления с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и тарифами перевозки $c_{i,n+1} = 0$ $(i = \overline{1,m})$.

2. Если потребности превышают запасы, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводится фиктивный $(m+1)$ пункт производства с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и тарифами перевозки $c_{m+1,j} = 0$ $(j = \overline{1,n})$.

После введения фиктивных пунктов задача решается как закрытая.

Метод «северо-западного угла». По аналогии с другими задачами линейного программирования, решение транспортной задачи начинается с построения начального допустимого решения. Наиболее простой способ его нахождения основывается на так называемом методе «северо-западного угла». Суть метода состоит в последовательном распределении всех запасов, имеющихся в первом, втором и т. д. пунктах поставок, по первому, второму и т. д. пунктам потребления. Построение начального допустимого базисного решения начинается с левого верхнего угла транспортной таблицы (северо-западного угла), т.е. с клетки $(1,1)$. Каждый шаг распределения сводится к попытке полного исчерпания запасов в очередном пункте поставок или к попытке полного, удовлетворения потребностей в очередном пункте потребления. При этом возможны случаи:

1) если $a_i < b_j$, т.е. запас груза в i-м пункте меньше, чем спрос на этот груз в j-м пункте, то

- $x_{ij} = a_i$ (назначить объем перевозки, соответствующий текущим запасам i-го поставщика);
- неизвестную x_{ij} пометить как базисную;
- $a_i' = 0$, $b_j' = b_j - x_{ij}$ (запасы i-го поставщика полностью исчерпаны, найти значение неудовлетворенной потребности в j-м пункте);
- $x_{ik} = 0$, $k = \overline{j+1, n}$ (исключить i-го поставщика из дальнейшего рассмотрения);
- перейти к $(i+1)$-му поставщику;

2) если $a_i > b_j$, т.е. запасы груза в i-м пункте больше, чем потребности в этом грузе в j-м пункте, то

- $x_{ij} = b_j$ (назначить объем перевозки, соответствующий текущим потребностям j-го поставщика),
- неизвестную x_{ij} пометить как базисную;
- $a_i' = a_i - x_{ij}$, $b_j' = 0$ (найти значение нераспределенного запаса в i-м пункте, потребности j-го поставщика полностью удовлетворены);
- $x_{pj} = 0$, $p = \overline{i+1, m}$ (исключить j-го поставщика из дальнейшего рассмотрения);
- перейти к $(j+1)$-му поставщику;

3) если $a_i = b_j$, то $x_{ij} = a_i = b_j$. В этом случае, чтобы сохранить размерность базиса, исключить либо i-го поставщика, как в 1-м случае, либо j-го потребитель, как во 2-м случае.

Нахождение допустимого базисного решения продолжается до тех пор, пока не будут исключены все поставщики и потребители. Поскольку на каждом шаге, кроме последнего, удаляется *только одна* строка или только *один столбец,* то в результате получается $m+n-1$ базисных переменных. Если на некотором шаге $a_i = b_j$, то начальное допустимое базисное решение будет вырожденным, т.е. в базисе будет переменная, равная нулю.

3.2. Пример

Построить начальное допустимое базисное решение транспортной задачи, представленной в табл. 3.2., методом «северо-западного угла».

Таблица 3.2

a_i \ b_i	200	200	100	100	250
100	10	7	4	1	4
250	2	7	10	6	11
200	8	5	3	2	2
300	11	8	12	16	13

Решение

1 этап. *Проверка уравнения баланса*. Т.к. выполняется условие $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то модель является закрытой и имеет решение.

2 этап. *Нахождение начального допустимого базисного решения методом «северо-западного угла»*.

1 итерация

$i = 1$, $j = 1$.

$a_1 < b_1$, поэтому $x_{11} = a_1 = 100$,

$X_{баз} = \{x_{11}\}$,

$a_1 = 0$,

$b_1 = 200 - 100 = 100$,

$x_{1k} = 0$, $k = 2,...,5$.

2 итерация

$i = 2$, $j = 1$.

$a_2 > b_1$, поэтому $x_{21} = b_1 = 100$,

$X_{баз} = \{x_{11}, x_{21}\}$,

$a_2 = 250 - 100 = 150$,

$b_1 = 0$,

$x_{p1} = 0$, $p = 3,...,4$.

3 итерация

$i = 2$, $j = 2$.

$a_2 < b_2$, поэтому $x_{22} = a_2 = 150$,

$X_{баз} = \{x_{11}, x_{21}, x_{22}\}$,

$a_2 = 0$,

$b_2 = 200 - 150 = 50$,

$x_{2k} = 0$, $k = 3,...,5$ и т.д.

Процесс продолжаем до тех пор, пока не обеспечим всех потребителей за счет запасов поставщиков. Результат представлен в табл. 3.3.

Таблица 3.3.

a_i \ b_j	200	200	100	100	250
100	10 **100**	7 0	4 0	1 0	4 0
250	2 **100**	7 **150**	10 0	6 0	11 0
200	8 0	5 **50**	3 **100**	2 **50**	2 0
300	11 0	8 0	12 0	16 **50**	13 **250**

Найденное решение имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 100 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 250 \end{pmatrix}.$$

Найденные значения являются допустимым решением транспортной задачи, т.к. удовлетворяют системе ограничений (3.1 – 3.3). Найденное решение является базисным, т.к. содержит точно $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ компонент. Найденное решение является невырожденным, так как содержит точно $m + n - 1 = 8$ положительных компонент.

Найдем начальное значение целевой функции:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} .$$

$$Z = 100 \cdot 10 + 100 \cdot 2 + 150 \cdot 7 + 50 \cdot 5 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 2 + 50 \cdot 16 + 250 \cdot 13 = 6950 \text{ (ден. ед.)}.$$

3.3. Задания

1. Составить на заданном языке программу нахождения начального допустимого базисного решения методом «северо-западного угла». Требования к программе:

- программа должна иметь диалоговый характер с экономической интерпретацией всех переменных и целевой функции;
- программа должна проверять уравнение баланса, и, в случае необходимости, приводить открытую модель транспортной задачи к закрытой модели;
- программа должна распределять груз методом «северо-западного угла»;
- программа должна проверять, является ли найденное решение допустимым, базисным, невырожденным;
- программа должна находить начальное значение целевой функции.

2. Найти начальное допустимое базисное решение транспортной задачи (согласно варианту) с помощью написанной программы.

Варианты

Имеются три пункта поставки однородного груза и пять пунктов потребления этого груза. В пунктах поставки находится груз в количествах a_1, a_2, a_3 соответственно. Груз необходимо доставить в пункты потребления в количествах b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 соответственно. Расстояния между пунктами заданы матрицей (км):

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}.$$

1. $A = \begin{pmatrix} 200 \\ 175 \\ 225 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 100 & 130 & 80 & 190 & 100 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 200 \\ 450 \\ 250 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 100 & 125 & 325 & 250 & 100 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 10 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 120 & 130 & 100 & 160 & 110 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 27 & 36 & 35 & 31 & 29 \\ 22 & 23 & 26 & 32 & 35 \\ 35 & 42 & 38 & 32 & 39 \end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix}350\\330\\270\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}210 & 170 & 220 & 150 & 200\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}3 & 12 & 9 & 1 & 7\\2 & 4 & 11 & 2 & 10\\7 & 14 & 12 & 5 & 8\end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix}300\\250\\200\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}210 & 170 & 220 & 150 & 200\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}4 & 8 & 13 & 2 & 7\\9 & 4 & 11 & 9 & 17\\3 & 16 & 10 & 1 & 4\end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix}350\\200\\300\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}170 & 140 & 200 & 195 & 145\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}22 & 14 & 16 & 28 & 30\\19 & 17 & 26 & 36 & 36\\37 & 30 & 31 & 39 & 41\end{pmatrix}.$

7. $A=\begin{pmatrix}200\\250\\200\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}190 & 100 & 120 & 110 & 130\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}28 & 27 & 18 & 27 & 24\\18 & 26 & 27 & 32 & 21\\27 & 33 & 23 & 31 & 34\end{pmatrix}.$

8. $A=\begin{pmatrix}230\\250\\170\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}140 & 90 & 160 & 110 & 150\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}40 & 19 & 25 & 26 & 35\\42 & 25 & 27 & 15 & 38\\46 & 27 & 36 & 40 & 45\end{pmatrix}.$

9. $A=\begin{pmatrix}200\\300\\250\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}210 & 150 & 120 & 135 & 135\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}20 & 10 & 12 & 13 & 16\\25 & 19 & 20 & 14 & 10\\17 & 18 & 15 & 10 & 17\end{pmatrix}.$

10. $A=\begin{pmatrix}200\\350\\300\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}270 & 130 & 190 & 150 & 110\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}24 & 50 & 45 & 27 & 15\\20 & 32 & 40 & 35 & 30\\22 & 16 & 18 & 28 & 20\end{pmatrix}.$

ЛАБОРАТОРНАЯ № 4

МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

Цель работы: приобретение навыков нахождение оптимального решения транспортной задачи методом потенциалов.

4.1. Теоретические сведения

Цикл и его связь с допустимым базисным решением. Клетки таблицы транспортной задачи, в которых находятся базисные переменные, называются *базисными*, остальные – *свободными*. *Циклом* называется такая последовательность клеток таблицы транспортной задачи (i_1,j_1), (i_1,j_2), (i_2,j_2), ... , (i_k,j_1), в которой две и только две соседние клетки расположены в одной строке или столбце, причем последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая.

В распределительной таблице цикл изображают в виде замкнутой ломаной линии. В любой клетке цикла происходит поворот звена ломаной линии на 90^0. В цикле всегда четное число клеток. Простейшие циклы изображены на рис. 4.1, где звездочкой отмечены клетки таблицы, включенные в состав цикла.

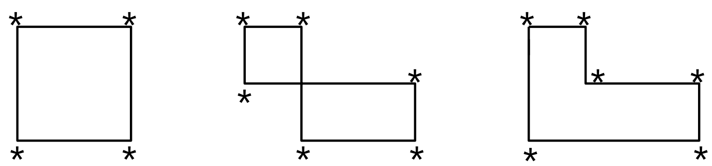

Рисунок 4.1. – Циклы

Допустимое решение транспортной задачи является базисным тогда и только тогда, когда из занятых этим решением клеток нельзя образовать ни одного цикла.

Метод вычеркивания. Данный метод позволяет проверить, является ли данное допустимое решение транспортной задачи базисным. Пусть допустимое решение транспортной задачи, которое имеет $m+n-1$ компоненту, записано в таблицу. Строка или столбец таблицы с одной базисной клеткой не может входить в какой-либо цикл, так как цикл имеет две и только две клетки в каждой строке или в столбце. Следовательно, сначала исключают («вычеркивают») все строки таблицы, содержащие по одной базисной клетке, затем все столбцы, содержащие по одной базисной клетке. Процесс продолжают до тех пор, пока не останется строк и столбцов, в которых имеется только одна базисная клетка. Если в результате все строки и столбцы будут исключены, значит, из занятых клеток таблицы нельзя выделить часть, образующую цикл, и решение является базисным. Если же после исключений останется часть клеток, то эти клетки образуют цикл, и решение не является базисным.

Метод потенциалов. Потенциалами u_i называют двойственные неизвестные, соответствующие ограничениям на предложение i-го поставщика, $i = 1,...,m$. Потенциалами v_j называют двойственные неизвестные, соответствующие ограничениям на спрос j-го потребителя, $j = 1,...,n$. Метод потенциалов заключается в последовательном улучшении допустимых базисных решений транспортной задачи на основе информации, полученной с помощью потенциалов u_i и v_j. Вычислительная схема решения транспортной задачи методом потенциалов на основе начального допустимого базисного решения имеет вид:

Шаг 1. *Построение системы потенциалов.* Положить $u_1 = 0$. Определить остальные потенциалы для базисных клеток из выражений:

- если известен потенциал u_i, то $v_j = c_{ij} - u_i$,
- если известен потенциал v_j, то $u_i = c_{ij} - v_j$.

Шаг 2. *Проверка оптимальности найденного решения.* Если для всех свободных клеток выполняется условие $u_i + v_j \le c_{ij}$, то решение оптимальное, вычислить значение целевой функции, прекратить вычисления. Если хотя бы для одной свободной клетки не выполнятся условие $u_i + v_j \le c_{ij}$, то решение не оптимальное, перейти к шагу 3.

Шаг 3. *Выбор клетки, в которую необходимо послать перевозку* (выбор новой базисной неизвестной). Для этого:

а) Для каждой свободной клетки, в которой нарушается условие оптимальности, найти оценку экономии стоимости перевозки на 1 ед. перевозимого груза по формуле $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$.

б) Определить свободную клетку с наибольшей оценкой экономии (если таких клеток несколько, то выбрать клетку с меньшей стоимостью перевозки). Данная клетка станет базисной. Ее будем загружать за счет перераспределения грузов.

Шаг 6. *Построение нового допустимого базисного решения.* Для этого:

а) Отметить в таблице знаком «+» свободную клетку с наибольшей оценкой экономии.

б) Начиная от клетки, отмеченной знаком «+», построить цикл, все вершины которого, за исключением клетки, отмеченной знаком «+», должные находиться в базисных клетках. Такой цикл единственный.

в) Поочередно пометить вершины цикла знаками «+» и «–» (загружаемые и разгружаемые вершины), начиная движение от клетки, отмеченной знаком «+».

г) В «минусовых» вершинах найти наименьший груз $w = \min_{"-"} x_{ij}$. Величина w определяет, сколько единиц груза можно перераспределить по найденному циклу.

д) Двигаясь по циклу, прибавить значение w к объемам груза, находящихся в клетках, отмеченных знаком «+», и вычесть из объемов груза, находящихся в клетках, отмеченных знаком «–». Если несколько клеток, отмеченных знаком «–», содержат груз в размере w, то при вычитании поставить в клетки с меньшей стоимостью перевозки базисные нули в таком количестве, чтобы новое допустимое базисное решение содержало $m+n-1$ компоненту.

е) Для проверки оптимальности полученного решения перейти к шагу 1.

4.2. Примеры

Пример 1. Решить транспортную задачу методом потенциалов на основе начального допустимого базисного решения, полученного методом «северо-западного угла» (табл. 4.1).

Таблица 4.1.

a_i \ b_j	200	200	100	100	250
100	10 **100**	7 0	4 0	1 0	4 0
250	2 **100**	7 **150**	10 0	6 0	11 0
200	8 0	5 **50**	3 **100**	2 **50**	2 0
300	11 0	8 0	12 0	16 **50**	13 **250**

Решение

Шаг 1. Полагаем $u_1 = 0$. Для базисных клеток рассчитываем остальные потенциалы в следующей последовательности:

(1,1): $v_1 = c_{11} - u_1 = 10 - 0 = 10$;

(2,1): $u_2 = c_{21} - v_1 = 2 - 10 = -8$;

(2,2): $v_2 = c_{22} - u_2 = 7 - (-8) = 15$;

(3,2): $u_3 = c_{32} - v_2 = 5 - 15 = -10$;

(3,3): $v_3 = c_{33} - u_3 = 3 - (-10) = 13$;

(3,4): $v_4 = c_{34} - u_3 = 2 - (-10) = 12$;

(4,4): $u_4 = c_{44} - v_4 = 16 - 12 = 4$;

(4,5): $v_5 = c_{45} - u_4 = 13 - 4 = 9$.

Заносим вычисленные значения потенциалов в распределительную таблицу (табл. 4.2):

Таблица 4.2

b_j / a_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 **100**	7 0	4 0	1 0	4 0	**0**
250	2 **100**	7 **150**	10 0	6 0	11 0	**-8**
200	8 0	5 **50**	3 **100**	2 **50**	2 0	**-10**
300	11 0	8 0	12 0	16 **50**	13 **250**	**4**
v_j	**10**	**15**	**13**	**12**	**9**	

Шаг 2. Проверяем критерий оптимальности для начального допустимого базисного решения. В табл. 4.2 для свободных клеток последовательно получаем:

- для первой строки (1,2): 15 + 0 > 7; (*)
  - (1,3): 13 + 0 > 4; (*)
  - (1,4): 12 + 0 > 1; (*)
  - (1,5): 9 + 0 > 4; (*)
- для второй строки (2,3): 13 + (-8) < 10;
  - (2,4): 12 + (-8) < 6;
  - (2,5): 9 + (-8) < 11;
- для третьей строки (3,1): 10 + (-10) < 8;
  - (3,5): 9 + (-10) < 2;
- для четвертой строки (4,1): 10 + 4 > 11; (*)
  - (4,2): 15 + 4 > 8; (*)
  - (4,3): 13 + 4 > 12; (*)

Звездочкой отмечены клетки, в которых нарушено условие оптимальности.

Шаг 3. Находим оценки экономии стоимости перевозки для свободных клеток, в которых не выполняется условие оптимальности:

$\Delta_{12} = 15 + 0 - 7 = 8$;

$\Delta_{13} = 13 + 0 - 4 = 9$;

$\Delta_{14} = 12 + 0 - 1 = 11$;

$\Delta_{15} = 9 + 0 - 4 = 5$;

$\Delta_{41} = 10 + 4 - 11 = 3;$

$\Delta_{42} = 15 + 4 - 8 = 11;$

$\Delta_{43} = 13 + 4 - 12 = 5.$

Максимальная оценка экономии $\Delta_{\max} = 11$ соответствует двум клеткам: (1,4) и (4,2). Выбираем из них клетку с меньшими транспортными издержками, т.е. клетку (1,4). Эта клетка станет базисной.

Шаг 4. Клетку (1,4) отмечаем знаком «+» и строим цикл, приведенный в табл. 4.3.

Таблица 4.3

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	u_i
100	– 10 **100**	7 0	+ 4 0	1 0	4 0	**0**
250	+ 2 **100**	– 7 **150**	10 0	6 0	11 0	**-8**
200	8 0	+ 5 **50**	– 3 **100**	2 **50**	2 0	**-10**
300	11 0	8 0	12 0	16 **50**	13 **250**	**4**
v_j	**10**	**15**	**13**	**12**	**9**	

Имеем $w = \min(100, 150, 100) = 100$. Двигаясь по циклу, прибавляем значение w к объемам перевозок, находящихся в клетках, отмеченных знаком «+», и вычитаем из объемов перевозок, находящихся в клетках, отмеченных знаком «–». Т.к. значению $w = 100$ соответствуют две минимальные перевозки, то при вычитании оставляем базисный нуль в клетке (3,3), т.к. она содержит меньшие транспортные издержки. Клетка (1,1) становится свободной. Полученное допустимое базисное решение представлено в табл. (4.4). Оно является вырожденным.

Таблица 4.4

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	u_i
100	10 0	7 0	4 **100**	1 0	4 0	
250	2 **200**	7 **50**	10 0	6 0	11 0	
200	8 0	5 **150**	3 **0**	2 **50**	2 0	
300	11 0	8 0	12 0	16 **50**	13 **250**	
v_j						

Для проверки оптимальности найденного решения переходим к шагу 1.

2 итерация

Шаг 1. Строим систему потенциалов для нового допустимого базисного решения. Полагаем $u_1 = 0$. Рассчитываем остальные потенциалы и заносим их в распределительную таблицу (табл. 4.5):

(1,3): $v_3 = c_{13} - u_1 = 4 - 0 = 4$;

(3,3): $u_3 = c_{33} - v_3 = 3 - 4 = -1$;

(3,2): $v_2 = c_{32} - u_3 = 5 - (-1) = 6$;

(3,4): $v_4 = c_{34} - u_3 = 2 - (-1) = 3$;

(4,4): $u_4 = c_{44} - v_4 = 16 - 3 = 13$;

(4,5): $v_5 = c_{45} - u_4 = 13 - 13 = 0$;

(2,2): $u_2 = c_{22} - v_2 = 7 - 6 = 1$;

(2,1): $v_1 = c_{21} - u_2 = 2 - 1 = 1$.

Таблица 4.5

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	u_i
100	10 0	7 0	4 **100**	1 0	4 0	**0**
250	2 **200**	7 **50**	10 0	6 0	11 0	**1**
200	8 0	5 **150**	3 **0**	2 **50**	2 0	**-1**
300	11 0	8 0	12 0	16 **50**	13 **250**	**13**
v_j	**1**	**6**	**4**	**3**	**0**	

Шаг 2. Проверяем критерий оптимальности для найденного допустимого базисного решения:

- для первой строки (1,1): 1 + 0 < 10;

  (1,2): 6 + 0 < 7;

  (1,4): 3 + 0 < 1;

  (1,5): 0 + 0 < 4;

- для второй строки (2,3): 4 + 1 < 10;

  (2,4): 3 + 1 < 6;

  (2,5): 0 + 1 < 11;

- для третьей строки (3,1): 1 + (-1) < 8;

  (3,5): 0 + (-1) < 2;

- для четвертой строки (4,1): 1 + 13 > 11; (*)

$$(4,2):\quad 6 + 13 > 8; \qquad (*)$$

$$(4,3):\quad 4 + 13 > 12. \qquad (*)$$

Условие оптимальности нарушено в трех клетках.

Шаг 3. Вычисляем оценки экономии транспортных издержек:

$\Delta_{41} = 1 + 13 - 11 = 3$;

$\Delta_{42} = 6 + 13 - 8 = 11$;

$\Delta_{43} = 14 + 13 - 12 = 15$.

Максимальная оценка $\Delta_{\max} = 15$ соответствует клетке (4,3).

Шаг 4. Клетку (4,3) отмечаем знаком «+» и строим цикл, приведенный в табл. 4.6.

Таблица 4.6

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	u_i
100	10 0	7 0	4 **100**	1 0	4 0	**0**
250	2 **200**	7 **50**	10 0	6 0	11 0	**1**
200	8 0	5 **150**	3 **0** –	2 **50** +	2 0	**-1**
300	11 0	8 0	12 0 +	16 **50** –	13 **250**	**13**
v_j	**1**	**6**	**4**	**3**	**0**	

Имеем $w = \min(50, 0) = 0$. В результате перераспределения базисный нуль перемещается в клетку (4,3). Остальные значения остаются неизменными. Новое базисное решение представлено в табл. 4.7. Оно также является вырожденным.

Таблица 4.7

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	u_i
100	10 0	7 0	4 **100**	1 0	4 0	
250	2 **200**	7 **50**	10 0	6 0	11 0	
200	8 0	5 **150**	3 0	2 **50**	2 0	
300	11 0	8 0	12 **0**	16 **50**	13 **250**	
v_j						

Для проверки оптимальности найденного решения переходим к шагу 1.

3 итерация

Шаг 1. Строим новую систему потенциалов (табл. 4.8).

Таблица 4.8

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	u_i
100	10 0	7 0	4 **100**	1 0	4 0	**0**
250	2 **200**	7 **50**	10 0	6 0	11 0	**-4**
200	8 0	5 **150**	3 0	2 **50**	2 0	**-6**
300	11 0	8 0	12 **0**	16 **50**	13 **250**	**8**
v_j	**6**	**11**	**4**	**8**	**5**	

Шаг 2. Критерий оптимальности не выполняется для клеток (1,2), (1,4), (1,5), (4,1), (4,2).

Шаг 3. Находим оценки экономии стоимости перевозки:

$\Delta_{12} = 11 + 0 - 7 = 4$;

$\Delta_{14} = 8 + 0 - 1 = 7$;

$\Delta_{15} = 5 + 0 - 4 = 1$;

$\Delta_{41} = 6 + 8 - 11 = 3$;

$\Delta_{42} = 11 + 8 - 8 = 11$.

Максимальная оценка экономии $\Delta_{\max} = 11$ соответствует клетке (4,2).

Шаг 4. Клетку (4,2) отмечаем знаком «+» и строим цикл, приведенный в табл. 4.9.

Таблица 4.9

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	u_i
100	10 0	7 0	4 **100**	1 0	4 0	**0**
250	2 **200**	7 **50**	10 0	6 0	11 0	**-4**
200	8 0	5 **150** –	3 0	2 **50** +	2 0	**-6**
300	11 0	8 0 +	12 **0**	16 **50** –	13 **250**	**8**
v_j	**6**	**11**	**4**	**8**	**5**	

Имеем $w = \min(50, 150) = 50$. Перераспределяем груз по циклу (табл. 4.10)

Таблица 4.10

b_j / a_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 0	7 0	4 **100**	1 0	4 0	**0**
250	2 **200**	7 **50**	10 0	6 0	11 0	**-4**
200	8 0	5 **100**	3 0	2 **100**	2 0	**-6**
300	11 0	8 **50**	12 **0**	16 0	13 **250**	**8**
v_j	**6**	**11**	**4**	**8**	**5**	

Далее проверяем оптимальность найденного решения в новой итерации. Продолжая вычисления, через некоторое число итераций получаем следующее допустимое базисное решение с вычисленной системой потенциалов (табл. 4.11)

Таблица 4.11

b_j / a_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 0	7 0	4 **0**	1 **50**	4 **50**	**0**
250	2 **200**	7 0	10 0	6 **50**	11 0	**5**
200	8 0	5 0	3 0	2 0	2 **200**	**-2**
300	11 0	8 **200**	12 **100**	16 0	13 0	**8**
v_j	**-3**	**0**	**4**	**1**	**4**	

Для распределения, полученного в табл. 4.11, условие оптимальности выполняется. Находим оптимальное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 & 50 \\ 200 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 200 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Минимальная стоимость перевозок составляет

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} .$$

$Z = 1\cdot 50 + 4\cdot 50 + 2\cdot 200 + 6\cdot 50 + 2\cdot 200 + 8\cdot 200 + 12\cdot 100 = 4150$ ден. ед.

Таким образом, получено оптимальное решение по прикреплению пунктов отправления грузов к пунктам назначения.

Пример 2. Найти оптимальное решение транспортной задачи с помощью системы Mathcad.

Решение

Транспортная задача относится к классу задач ЛП. Следовательно, ее решение основано на использовании блока Given с функцией Minimize. Пример решения приведен ниже.

$ORIGIN := 1$

$$a := \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 100 \\ 100 \\ 250 \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} 10 & 7 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 10 & 6 & 11 \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 11 & 8 & 12 & 16 & 13 \end{pmatrix}$$

Исходные данные задачи

$$p := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad q := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z(x) := \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} \left(c_{i,j} \cdot x_{i,j}\right)$$

Целевая функция

$x_{4,5} := 0$

Начальные значения неизвестнь

Given

Система ограничений

$x \cdot q = a$

$x^T \cdot p = b$

$x \geq 0$

$x := \text{Minimize}(Z, x)$

Оптимальное решение

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 & 50 \\ 200 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 200 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Z(x) = 4150$

Экстремум целевой функции

4.3. Задания

1. Найти оптимальное решение транспортной задачи методом потенциалов на основе начального допустимого базисного решения, полученного методом «северо-западного угла». Варианты заданий приведены в параграфе 3.3.

2. Проверить правильность вычислений, решив задачу с использованием системы Mathcad.

3. Сделать выводы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

МЕТОД МАКА

Цель работы: приобретение навыков нахождения оптимального решения задачи о назначениях методом Мака.

5.1. Теоретические сведения

Постановка задачи о назначениях. Имеется n работ, каждую из которых может выполнить любой из n исполнителей. Известны трудовые затраты c_{ij} на выполнение i-м исполнителем j-й работы ($i = 1,...,n$, $j = 1,...,n$). Каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу, и каждая работа может быть выполнена только одним исполнителем. Нужно распределить работы так, чтобы они были исполнены с минимальными затратами.

Обозначим через x_{ij} неизвестные, представляющие назначение исполнителя i на работу j, причем

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если на } i-\text{ю работу назначен } j-\text{й исполнитель}, \\ 0, \text{ в противном случае}, \end{cases}$$

где $i = 1,...,n$, $j = 1,...,n$. Тогда данные задачи о назначениях можно представить в виде таблицы (табл. 5.1).

Таблица 5.1

$i \backslash j$	1	2	...	n
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...
n	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

Математическая модель задачи о назначениях. Требуется найти значения неизвестных x_{ij} ($i = 1,...,n$, $j = 1,...,n$), удовлетворяющие ограничениям

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,...,n, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,...,n, \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i = 1,...,n, \ j = 1,...,n),$$

и обеспечивающие минимум целевой функции

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

Задача о назначениях является, очевидно, задачей линейного программирования. Также задача о назначениях – это транспортная задача, в которой правые части ограничений равны 1, а переменные могут принимать только два значения. Таким образом, задача о назначении – это частный случай транспортной задачи. Любое допустимое решение задачи о назначениях является вырожденным, т.к. число ненулевых базисных неизвестных равно n.

Метод Мака. В методе Мака лежит следующее утверждение: *оптимальное решение задачи не изменится, если к любой строке или столбцу таблицы прибавить (или вычесть) постоянную величину в силу того, что приоритет назначения не изменится.* Вычислительная схема метода Мака имеет вид:

Шаг 0. *Построение начальной системы назначений.*

а) В каждой строке таблицы найти клетку с минимальными трудозатратами. Если таких клеток в одной строке несколько, то выбрать любую.

б) Распределить назначения следующим образом: если клетка (i, j) содержит минимальные трудозатраты, то поместить в нее назначение, т.е. $x_{ij} = 1$, иначе назначение не помещать, т.е. $x_{ij} = 0$.

Шаг 1. *Проверка критерия оптимальности решения.* Если каждый столбец таблицы содержит ровно одно назначение, то решение оптимально, вычислить значение целевой функции, прекратить вычисления. Иначе перейти к следующему шагу.

Шаг 2. *Выделение множества перераспределяемых назначений.* Разделить столбцы таблицы на два множества следующим образом: множество *A* составляет столбец, содержащий наибольшее количество назначений, множество *B* содержит все остальные столбцы. Назначения из столбца A необходимо перераспределить.

Шаг 3. *Поиск нового возможного назначения.*

а) В каждой строке множества B найти минимальное значение трудозатрат $c_i^{\min}$ и номер столбца r_i, в котором оно находится ($i = 1,...n$). Таким образом, определяется список возможных переназначений.

б) Для клеток (i, j) из множества *A*, <u>имеющих назначение</u>, вычислить размер увеличения трудозатрат при перераспределении назначений по формуле:

$$\Delta_i = c_i^{\min} - c_{ij}.$$

в) Среди полученных значений найти минимальное значение $\Delta_{\min}$ и номер строки k, в которой оно находится. Клетка (k, r_k) является кандидатом на то, чтобы получить назначение

Шаг 4. *Анализ возможности построения новой системы назначений*

а) Построить новую таблицу, в которой все трудозатраты, находящиеся клетках множества *A*, увеличить на значение $\Delta_{\min}$. Остальные элементы таблицы переписать без изменения.

б) Если столбец r_k не содержит назначений, тогда $x_{k,p_k} = 1$, остальные $x_{kj} = 0$ ($j = 1, ..., n$, $j \neq k$), перейти к шагу 1. В противном случае включить столбец r_k в множество *A*, перейти к шагу 3.

5.2. Пример

Пять работников способны выполнить пять заданий. В силу разной квалификации на выполнение этих заданий им потребуется различное время. Как следует распределить людей по заданиям, чтобы минимизировать время выполнения? Время выполнения заданий (в часах) приведено в матрице

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 9 & 18 & 11 \\ 13 & 19 & 6 & 12 & 14 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 18 & 9 & 12 & 17 & 15 \\ 11 & 6 & 14 & 19 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение

Шаг 0. Строим начальную систему назначений (табл. 5.2).

Таблица 5.2

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	10	5 **1**	9	18	11
2	13	19	6 **1**	12	14
3	3	2 **1**	4	4	5
4	18	9 **1**	12	17	15
5	11	6 **1**	14	19	10

1 итерация

Шаг 1. Решение не оптимально, переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Множество *A* составляет второй столбец, т.к. содержит наибольшее количество назначений. В табл. 5.3. данный столбец выделен цветом.

Шаг 3. Вычисления приведены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	$c_i^{\min}$	r_i	$\Delta_i = c_i^{\min} - c_{ij}$
1	10	5 **1**	9	18	11	9	3	$\Delta_1 = 9 - 5 = 4$
2	13	19	6 **1**	12	14	6	3	–
3	3	2 **1**	4	4	5	3	1	$\Delta_3 = 3 - 2 = 1$
4	18	9 **1**	12	17	15	12	3	$\Delta_4 = 12 - 9 = 3$
5	11	6 **1**	14	19	10	10	5	$\Delta_5 = 10 - 6 = 4$

Имеем: $\Delta_{\min} = 1$, $k = 3$, $r_k = r_3 = 1$. Клетка $(k, r_k) = (3,1)$ является кандидатом на то, чтобы получить назначение.

Шаг 4. Строим новую таблицу (табл. 5.5), в которой все трудозатраты, находящиеся клетках множества *A*, увеличиваем на значение $\Delta_{\min} = 1$. Остальные элементы таблицы оставляем без изменения. Столбец $r_k = 1$ не содержит назначений, поэтому $x_{13} = 1$, все остальные неизвестные в этой строке обнуляем. Получаем новую систему трудозатрат и назначений.

Таблица 5.5

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	10	6 **1**	9	18	11
2	13	20	6 **1**	12	14
3	3 **1**	3	4	4	5
4	18	10 **1**	12	17	15
5	11	7 **1**	14	19	10

2 итерация

Шаг 1. Найденное решение не удовлетворяет критерию оптимальности.

Шаг 2. Множество *A* составляет второй столбец.

Шаг 3. Вычисления приведены в табл. 5.6.

Таблица 5.6

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	$c_i^{\min}$	r_i	$\Delta_i = c_i^{\min} - c_{ij}$
1	10	6 **1**	9	18	11	9	3	$\Delta_1 = 9 - 6 = 3$
2	13	20	6 **1**	12	14	6	3	–
3	3 **1**	3	4	4	5	3	1	–
4	18	10 **1**	$\boxed{12}$	17	15	12	3	$\Delta_4 = 12 - 10 = 2$
5	11	7 **1**	14	19	10	10	5	$\Delta_5 = 10 - 7 = 3$

Имеем: $\Delta_{\min} = 2$, $k = 4$, $r_k = r_4 = 3$. Клетка $(k, r_k) = (4, 3)$ является кандидатом на получение назначения.

Шаг 4. Строим табл. 5.7, в которой добавляем $\Delta_{\min} = 2$ ко всем трудозатратам, находящимся в клетках множества A.

Таблица 5.7

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	10	8 **1**	9	18	11
2	13	22	6 **1**	12	14
3	3 **1**	5	4	4	5
4	18	12 **1**	12	17	15
5	11	9 **1**	14	19	10

Столбец $r_k = 3$ содержит назначения, поэтому оставляем текущую систему назначений, включаем третий столбец в множество A, переходим к шагу 3.

3 итерация

Шаг 3. Вычисления приведены в табл. 5.8

Таблица 5.8

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	$c_i^{\min}$	r_i	$\Delta_i = c_i^{\min} - c_{ij}$
1	10	8 **1**	9	18	11	10	1	$\Delta_1 = 10 - 8 = 2$
2	13	22	6 **1**	12	14	12	4	$\Delta_2 = 12 - 6 = 6$
3	3 **1**	5	4	4	5	3	1	–
4	18	12 **1**	12	17	15	15	5	$\Delta_4 = 15 - 12 = 3$
5	11	9 **1**	14	19	$\boxed{10}$	10	5	$\Delta_5 = 10 - 9 = 1$

Имеем: $\Delta_{\min} = 1$, $k = 5$, $r_k = r_5 = 5$. Клетка $(k, r_k) = (5, 5)$ является кандидатом на получение назначения.

Шаг 4. Строим табл. 5.9, в которой добавляем $\Delta_{\min} = 1$ ко всем трудозатратам, находящимся в клетках множества *A*. Пятый столбец не содержит единичных назначений, поэтому $x_{55} = 1$, остальные неизвестные в этой строке обнуляем. Получаем новую систему трудозатрат и назначений.

Таблица 5.9

i \ j	1	2	3	4	5
1	10	9 **1**	10	18	11
2	13	23	7 **1**	12	14
3	3 **1**	6	5	4	5
4	18	13 **1**	13	17	15
5	11	10	15	19	10 **1**

4 итерация

Шаг 1. Решение не удовлетворяет критерию оптимальности.

Шаг 2. Множество *A* составляет второй столбец.

Шаг 3. Вычисления приведены в табл. 5.10.

Таблица 5.10

i \ j	1	2	3	4	5	$c_i^{\min}$	r_i	$\Delta_i = c_i^{\min} - c_{ij}$
1	10	9 **1**	10	18	11	10	1	$\Delta_1 = 10 - 9 = 1$
2	13	23	7 **1**	12	14	7	3	–
3	3 **1**	6	5	4	5	3	1	–
4	18	13 **1**	13	17	15	13	3	$\Delta_4 = 13 - 13 = 0$
5	11	10	15	19	10 **1**	10	5	–

Имеем: $\Delta_{\min} = 0$, $k = 4$, $r_k = r_4 = 3$. Клетка $(k, r_k) = (4, 3)$ является кандидатом на получение назначения.

Шаг 4. Поскольку $\Delta_{\min} = 0$, то значения таблицы не меняются. Столбец $r_k = 3$ содержит назначение, поэтому оставляем текущую систему назначений, включаем третий столбец в множество A, переходим к шагу 3.

5 итерация

Шаг 3. Вычисления приведены в табл. 5.11.

Таблица 5.11

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	$c_i^{\min}$	r_i	$\Delta_i = c_i^{\min} - c_{ij}$
1	10	9 **1**	10	18	11	10	1	$\Delta_1 = 10 - 9 = 1$
2	13	23	7 **1**	12	14	12	4	$\Delta_2 = 12 - 7 = 5$
3	3 **1**	6	5	4	5	3	1	–
4	18	13 **1**	13	17	15	15	5	$\Delta_4 = 15 - 13 = 2$
5	11	10	15	19	10 **1**	10	5	–

Имеем: $\Delta_{\min} = 1$, $k = 1$, $r_k = r_1 = 1$. Клетка $(k, r_k) = (1, 1)$ является кандидатом на получение назначения.

Шаг 4. Строим табл. 5.12, в которой добавляем $\Delta_{\min} = 1$ ко всем трудозатратам, находящимся в клетках множества A. Столбец $r_k = 1$ содержит назначение, поэтому оставляем текущую систему назначений, включаем первый столбец в множество A, переходим к шагу 3.

Таблица 5.12

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	10	10 **1**	11	18	11
2	13	24	8 **1**	12	14
3	3 **1**	7	6	4	5
4	18	14 **1**	14	17	15
5	11	11	16	19	10 **1**

6 итерация

Шаг 3. Вычисления приведены в табл. 5.13.

Таблица 5.13

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	$c_i^{\min}$	r_i	$\Delta_i = c_i^{\min} - c_{ij}$
1	10	10 **1**	11	18	11	11	5	$\Delta_1 = 11 - 10 = 1$
2	13	24	8 **1**	12	14	12	4	$\Delta_2 = 12 - 8 = 4$
3	3 **1**	7	6	4	5	4	4	$\Delta_3 = 4 - 3 = 1$
4	18	14 **1**	14	17	15	15	5	$\Delta_4 = 15 - 14 = 1$
5	11	11	16	19	10 **1**	10	5	–

Имеем: $\Delta_{\min} = 1$, $k = 1$, $r_k = r_1 = 5$. Клетка $(k, r_k) = (1, 5)$ является кандидатом на получение назначения.

Шаг 4. Строим таблицу 5.14, в которой добавляем $\Delta_{\min} = 1$ ко всем трудозатратам, находящимся в клетках множества A. Столбец $r_k = 5$ содержит назначение, поэтому оставляем текущую систему назначений, включаем пятый столбец в множество A, переходим к шагу 3.

Таблица 5.14

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	11	11 **1**	12	18	11
2	14	25	9 **1**	12	14
3	4 **1**	8	7	4	5
4	19	15 **1**	15	17	15
5	12	12	17	19	10 **1**

7 итерация

Шаг 3. Вычисления приведены в табл. 5.15.

Таблица 5.15

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	$c_i^{\min}$	r_i	$\Delta_i = c_i^{\min} - c_{ij}$
1	11	11 **1**	12	18	11	18	4	$\Delta_1 = 18 - 11 = 7$
2	14	25	9 **1**	12	14	12	4	$\Delta_2 = 12 - 9 = 3$
3	4 **1**	8	7	$\boxed{4}$	5	4	4	$\Delta_3 = 4 - 4 = 0$
4	19	15 **1**	15	17	15	17	4	$\Delta_4 = 17 - 15 = 2$
5	12	12	17	19	10 **1**	19	4	$\Delta_5 = 19 - 10 = 9$

Имеем: $\Delta_{\min} = 0$, $k = 3$, $r_k = r_3 = 4$. Клетка $(k, r_k) = (3, 4)$ является кандидатом на получение назначения

Шаг 4. Поскольку $\Delta_{\min} = 0$, то значения таблицы не меняются. Четвертый столбец не содержит назначений, поэтому полагаем $x_{34} = 1$, все остальные неизвестные в этой строке обнуляем (табл. 5.16).

Таблица 5.16

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	11	11 **1**	12	18	11
2	14	25	9 **1**	12	14
3	4	8	7	4 **1**	5
4	19	15 **1**	15	17	15
5	12	12	17	19	10 **1**

8 итерация

Шаг 1. Решение не удовлетворяет критерию оптимальности.

Шаг 2. Множество *A* составляет второй столбец.

Шаг 3. Вычисления приведены в табл. 5.17

Таблица 5.17

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	$c_i^{\min}$	r_i	$\Delta_i = c_i^{\min} - c_{ij}$
1	11	11 **1**	12	18	11	11	1	$\Delta_1 = 11 - 11 = 0$
2	14	25	9 **1**	12	14	9	3	–
3	4	8	7	4 **1**	5	4	4	–
4	19	15 **1**	15	17	15	15	3	$\Delta_4 = 15 - 15 = 0$
5	12	12	17	19	10 **1**	10	5	

Имеем: $\Delta_{\min} = 0$, $k = 1$, $r_k = r_1 = 1$. Клетка $(k, r_k) = (1,1)$ является кандидатом на получение назначения.

Шаг 4. Поскольку $\Delta_{\min} = 0$, то значения таблицы не меняются. Первый столбец не содержит назначений, поэтому полагаем $x_{11} = 1$, все остальные неизвестные в этой строке обнуляем (табл.5.18).

Таблица 5.18

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	11 **1**	11	12	18	11
2	14	25	9 **1**	12	14
3	4	8	7	4 **1**	5
4	19	15 **1**	15	17	15
5	12	12	17	19	10 **1**

10 итерация

Критерий оптимальности удовлетворяется. Оптимальное решение имеет вид:

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции $Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}=10\cdot1+6\cdot1+4\cdot1+9\cdot1+10\cdot1=39$,

где c_{ij} – элементы исходной матрицы затрат $C=\begin{pmatrix}10&5&9&18&11\\13&19&6&12&14\\3&2&4&4&5\\18&9&12&17&15\\11&6&14&19&10\end{pmatrix}$.

Имеем: первый работник выполняет первое задание, второй работник – третье задание, третий работник – четвертое задание, четвертый работник – второе задание, пятый работник – пятое задание. При этом время выполнения всех заданий будет минимальным и составит 39 часов.

5.3. Задания

1. Составить на заданном языке программу решения задачи о назначениях методом Мака. Требования к программе:

- программа должна иметь диалоговый характер;
- программа должна выдавать промежуточные распределительные таблицы, находить оптимальное решение и экстремум целевой функции.

2. С помощью написанной программы решить задачу о назначениях согласно варианту.

3. Осуществить тестирование разработанной программы, проверив полученное решение с помощью системы Mathcad.

4. Сделать выводы.

Варианты

Необходимо распределить вакансии таким образом, чтобы минимизировать временные затраты на выполнение работ при условии, что каждый из претендентов получит одну и только одну из работ. Матрица C содержит временные затраты каждого претендента на выполнение заданной работы.

1. $C=\begin{pmatrix}22&2&8&9&4&3\\8&12&14&7&1&3\\9&10&22&24&4&8\\12&2&1&1&7&25\\9&14&2&4&6&13\\10&3&3&7&8&2\end{pmatrix}.$

2. $C=\begin{pmatrix}3&5&4&9&10&13\\15&7&3&9&5&7\\5&5&1&3&2&11\\2&8&6&11&17&14\\18&11&3&5&14&6\\12&16&8&11&8&10\end{pmatrix}.$

3. $C=\begin{pmatrix}15&19&11&4&3&13\\14&6&5&7&25&9\\16&7&19&13&3&7\\24&10&9&1&14&16\\1&14&18&4&14&6\\20&4&1&13&10&22\end{pmatrix}.$

4. $C=\begin{pmatrix}2&5&1&20&3&22\\3&4&4&1&5&1\\7&5&3&6&8&9\\5&7&3&5&10&2\\1&6&7&4&3&5\\20&4&6&3&5&4\end{pmatrix}.$

5. $C=\begin{pmatrix}12&2&4&2&1&20\\5&9&6&6&3&7\\7&2&2&3&4&5\\2&8&8&9&25&2\\21&4&4&8&6&4\\4&3&2&5&1&3\end{pmatrix}.$

6. $C=\begin{pmatrix}3&1&5&10&3&20\\4&1&8&9&20&3\\7&7&3&5&3&6\\2&4&6&6&5&3\\5&2&8&4&2&7\\4&20&1&2&6&9\end{pmatrix}.$

7. $C=\begin{pmatrix}2&4&5&7&8&1\\3&1&20&2&3&6\\4&5&5&7&9&7\\5&3&10&5&5&2\\1&4&3&8&7&1\\3&2&5&4&4&2\end{pmatrix}.$

8. $C=\begin{pmatrix}4&3&4&20&1&2\\6&12&5&6&3&7\\2&7&21&8&1&3\\8&1&3&5&5&5\\4&5&2&4&8&9\\9&20&5&3&4&1\end{pmatrix}.$

9. $C=\begin{pmatrix}3&7&4&5&20&9\\5&6&5&9&5&2\\2&9&2&8&3&6\\7&8&8&6&5&4\\1&2&6&5&1&2\\9&4&3&6&2&4\end{pmatrix}.$

10. $C=\begin{pmatrix}2&11&5&14&4&9\\4&8&9&9&5&6\\2&7&3&6&8&2\\3&9&20&7&3&9\\9&3&5&6&8&5\\12&22&8&5&4&4\end{pmatrix}.$

Список литературы

Основная

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие. – М.: Лань, 2011. – 352с.
2. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: учеб для вузов
– М.: Изд-во МГГУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 436 с.
3. Косоруков О.А, Мищенко А.В. Исследование операций: учеб. для вузов. – М.: Экзамен, 2013. – 448 с.
4. Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач: учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 г. – 132 с.
5. Таха Х. А. Введение в исследование операций. 7-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «ВИЛЬЯМС», 2008. – 912 с.

Дополнительная

1. Ашманов С. А., Тихонов А. В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М., 1991.
2. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971. — 384 с.
3. Давыдов Э. Г. Исследование операций: учеб. пособие для студентов вузов. М., 1990.
4. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. М.,1966.
5. Дегтярёв Ю. И. Исследование операций: учебник для вузов. — М.: Высшая школа, 1986.
6. Романовский И.В. Алгоритмы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
7. Шапкин А. С., А. Мазаев Н. П. Математические методы и модели исследования операций: учебник для вузов. – М. : Дашков и К, 2006. – 400 с.

Содержание