АНАЛИЗ ФУРЬЕ

Сергей Витальевич Кисляков

Содержание

1. Основы

Определение 1: Топологическая группа – наделённая топологией группа G, такая, что непрерывны отображения

$$G \times G \to G : \quad (x, y) \longmapsto xy,$$

$$G \to G : \quad x \longmapsto x^{-1}.$$

Мы будем рассматривать только абелевы группы, более того, мы ограничимся рассмотрением таких групп как $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, операцию в которых мы обозначаем стандартной аддитивной записью, то есть как $+$, группы $\mathbb{T} = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| = 1\}$, $\mathbb{T}^n$ (с мультипликативной записью) и циклических групп $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, ..., k-1\}$. Раз уж мы рассматриваем их как топологические группы, то следует определиться в какой топологии мы работаем. В группах $\mathbb{T}^n$ и $\mathbb{R}^n$ она будет стандартной, а в $\mathbb{Z}^n$ и $\mathbb{Z}_k$ дискретной.

2. Характеры

Пусть G – локально компактная абелева группа (у каждой точки есть окрестность, замыкание которой компактно).

Определение 2: Характером группы G называется всякий непрерывный гомоморфизм $\gamma : G \to \mathbb{T}$.

Свойства:
1. $\gamma(0) = 1$.
2. Если γ_1, γ_2 – характеры, то $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ тоже характер.
3. $\frac{1}{\gamma} = \overline{\gamma}$ – тоже характер.
4. $\gamma(-x) = \overline{\gamma(x)}$.
5. $\gamma(x)\gamma(-x) = \gamma(0) = 1$.

Отсюда следует, что характеры группы G сами образуют группу относительно поточечного умножения. Единицей в этой группе является функция $\gamma_0 : G \to \mathbb{T}$, тождественно равная 1. Группа характеров G обозначается как $\widehat{G}$ или Γ. Так как шляпка в тайпсте не всегда отображается красиво, то я буду пользоваться и тем, и другим обозначением, так что не путайтесь. Давайте вычислим характеры основных наших групп.

2.1. Характеры $\mathbb{Z}$

Пусть γ – характер $\mathbb{Z}$ и $\gamma(1) = \zeta \in \mathbb{T}$. Тогда $\gamma(n) = \zeta^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.
Таким образом, характер γ определяется значением в точке 1. Обратно, если $\zeta \in \mathbb{T}$, то формула $\gamma(n) = \zeta^n$ определяет характер γ_ζ. Заметив, что

$$\gamma_{\zeta_1} \cdot \gamma_{\zeta_2} = \gamma_{\zeta_1 \zeta_2} \quad \text{и} \quad \gamma_{\zeta^{-1}} = \left(\gamma_\zeta\right)^{-1}$$

мы понимаем, что $\widehat{\mathbb{Z}}$ можно отождествить с $\mathbb{T}$.
Нам будет часто удобно параметирзовать окружность отрезком $[-l, l]$:

$$x \longmapsto e^{\frac{i\pi x}{l}}, \quad x \in [-l, l].$$

Да, точка -1 действительно параметирзуется дважды: значениями в l и $-l$. Чаще всего мы будем брать l равным 1 или π. Мы можем считать, что $x \in \mathbb{R}$, тем самым возникает $2l$-периодическая функция, значения которой на любом отрезке длины $2l$ параметризуют окружность почти однозначно с точностью до двух точек.
Характер η, отвечающий точке $x \in \mathbb{R}$ можно записать как $\eta(n) = e^{\frac{in\pi x}{l}}$ или как $\eta(n) = e^{inx}$, если $l = \pi$.

2.2. Характеры $\mathbb{Z}_k$

Пусть $\gamma \in \Gamma(\mathbb{Z}_k)$. Положим $\zeta = \gamma(1)$. Как и прежде, $\gamma(s) = \zeta^s$, $s \in \mathbb{Z}$, однако

$$1 = \gamma(0) = \gamma(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k}) = \zeta^k,$$

то есть ζ – корень k-ой степени из 1. Как известно, такие корни тоже образуют циклическую группу порядка k, поэтому можем смело написать $\Gamma(\mathbb{Z}_k) = \mathbb{Z}_k$.

$$1, e^{\frac{2\pi i}{k}}, \ldots, e^{\frac{2\pi i t}{k}}, \ldots, e^{\frac{2\pi i(k-1)}{k}}$$

– все корни k-ой степени из 1. Характер η, соответствующий точке $t \in \{0, \ldots, k-1\}$ выражается как

$$\eta(s) = e^{\frac{2\pi i t s}{k}}, \quad s \in \mathbb{Z}_k.$$

2.3. Характеры $\mathbb{R}$

В предыдущих примерах мы игнорировали непрерывность харакреров, так как любое отображение из пространства с дискретной топологией непрерывно.

Теорема 1: Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ – измеримый по Борелю гомоморфизм. Тогда

$$\exists! \xi \in \mathbb{R} \quad \gamma(x) = e^{ix\xi}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство:

1. Единственность.

$$\forall x \in \mathbb{R} \ e^{ix\xi_1} = e^{ix\xi_2} \iff \forall x \in \mathbb{R} \ e^{ix(\xi_1 - \xi_2)} = 1.$$

   Последнее выполнено тогда и только тогда, когда $x(\xi_1 - \xi_2)$ кратно 2π для всех $x \in \mathbb{R}$, что, в свою очередь, бывает лишь при $\xi_1 = \xi_2$.

2. Существование. Раз γ измерима и ограничена и $|\gamma(x)| = 1$ всюду (хоть хватило бы и почти всюду), то существует $g \in L^1(\mathbb{R})$ (например годится $g(t) = \chi_{[0,1]}\overline{\gamma(t)}$):

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma(t) g(t) dt \neq 0$$

   Приблизим g функцией h из класса $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем), что можно сделать так как он плотен в $L^1(\mathbb{R})$. Так как

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \gamma(t) g(t) dt - \int_{\mathbb{R}} \gamma(t) h(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |g(t) - h(t)| dt,$$

   можно считать, что $\int_{\mathbb{R}} \gamma(t) h(t) dt \neq 0$ (так как иначе правую часть можно сделать сколь угодно малой, а левая часть положительна).
   Теперь проинтегрируем по y равенство $\gamma(x+y)h(y) = \gamma(x)\gamma(y)h(y)$:

$$\gamma(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \gamma(x+y) h(y) dy}{\int_{\mathbb{R}} \gamma(y) h(y) dy} = \frac{(\gamma * h)(x)}{\int_{\mathbb{R}} \gamma(y) h(y) dy}.$$

В третьем семестре мы доказывали, что свёртка суммируемой и бесконечно дифференцируемой (кажется, хватило бы просто непрерывных) с компактным носителем бесконечно гладкая, поэтому $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$. Значит

$$\frac{d}{dy}\gamma(x+y) = \frac{d}{dy}(\gamma(x)\gamma(y)),$$

$$\gamma'(x+y) = \gamma(x)\gamma'(y).$$

Положим в этом равенстве $y = 0$, а также пусть $\tau = \gamma'(0)$. Тогда

$$\gamma'(x) = \tau\gamma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

откуда $\gamma(x) = Ce^{\tau x}$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Из того что $\gamma(0) = 1$ следует, что $C = 1$, а раз $|e^{\tau x}| = 1$, то $\tau = i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}$.

□

Заметим, что так как отображение $x \longmapsto e^{ix\xi}$ заведомо является характером $\mathbb{R}$, то тем самым мы показали, что $\Gamma(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Отметим ещё одну популярную параметризацию $\Gamma(\mathbb{R})$:

$$\Gamma(\mathbb{R}) = \left\{x \longmapsto e^{2\pi i\xi x}\right\}_{\xi\in\mathbb{R}}$$

2.4. Характеры $\mathbb{T}$

Пусть γ – характер группы $\mathbb{T}$. Определим $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ – простое вращение, $\pi(s) = e^{is}$.
Пусть $\eta(x) = \gamma(\pi(x))$, $x \in \mathbb{R}$, тогда $\eta \in \Gamma(\mathbb{R})$, значит по теореме $\exists! \xi \in \mathbb{R} :\ \eta(x) = e^{i\xi x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, то есть $\gamma(e^{is}) = e^{i\xi s} \quad \forall s \in \mathbb{R}$. Подставим $s = 2\pi k$:

$$1 = e^{2\pi i k\xi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Значит $k\xi$ – целое число для любого $k \in \mathbb{Z}$, а значит и $\xi \in \mathbb{Z}$, ведь можно подставить $k = 1$. Тем самым,

$$\Gamma(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}.$$

2.5. Факты про характеры

Перечислим без доказательства пару утверждений.

- На $\Gamma(G)$ можно стандартным образом ввести топологию равномерной сходимости на компактах, тем самым превратив её в локально компактную абелеву группу.

Теорема 2 (Понтрягина о двойственности): Для локально компактной абелевой группы G имеется канонический изоморфизм

$$G \cong \Gamma(\Gamma(G)),$$

заданный как $x \longmapsto (\gamma \longmapsto \gamma(x))$.

- $\Gamma(G_1 \times \ldots \times G_n) = \Gamma(G_1) \times \ldots \times \Gamma(G_n)$.
  Поэтому $\Gamma(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$ и $\Gamma(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
  Все характеры на $\mathbb{R}^n$ имеют вид

$$\gamma(x_1, \ldots, x_n) = e^{2\pi i x_1 y_1} \cdot \ldots \cdot e^{2\pi i x_n y_n},$$

  где векторы $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ пробегают $\mathbb{R}^n$.
  Для тора $\mathbb{T}^n$ все характеры имеют вид

$$\gamma(e^{it_1}, \ldots, e^{it_n}) = \prod_{i=1}^{n} e^{ik_i t_i} = e^{i\langle k,t\rangle}, \quad t \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{Z}^n.$$

3. Мера Хаара

Определение 3: Мера Хаара на локально компактной группе G – регулярная положительная борелевская мера μ на G, конечная на компактах и инвариантная относительно сдвига:

$$\mu(E+x)=\mu(E)\quad \forall E\in \mathcal{B}(G),\, x\in G.$$

Теорема 3: Мера Хаара всегда сущестствует и любые две отличаются домножением на константу.

- На компактной группе меру Хаара обычно нормализуют так, что $\mu(G)=1$.
- На дискретной группе в качестве меры Хаара подходит считающая мера и обычно с ней больше ничего не делают.
- Группа $\mathbb{Z}_k$ одновременно и компактна и дискретна, так что нам подходят оба варианта:
  - $(\mathbb{Z}_k, m)$ – мера каждой точки равна $\frac{1}{k}$.
  - $(\mathbb{Z}_k, \mu)$ – мера каждой точки равна 1.
- В $\mathbb{T}$ рассматривается нормированная мера Лебега $\dfrac{d\theta}{2\pi}$.
- То же самое в $\mathbb{T}^n$: $\dfrac{d\theta_1 ... d\theta_n}{(2\pi)^n}$.
- В $\mathbb{R}^n$ рассматривается обычная мера Лебега.

4. Свёртка

Пусть G – локально компактная абелева группа, m – мера Хаара на ней.

Определение 4: Свёртка двух измеримых функций f и g на G:

$$(f*g)(x)=\int\limits_G f(x-y)g(y)dm(y)$$

– для тех x, для которых интеграл существует.

Большинство свойств свёртки уже знакомы нам из случая свёртки на $\mathbb{R}^n$, тем не менее, не помешает их вспомнить.

1. Пусть $1\le p\le\infty$, $f\in L^p(G,m)$, $g\in L^1(G,m)$. Тогда свёртка $f*g$ существует почти всюду и

$$\|f*g\|_{L^p}\le \|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^1}.$$

Доказательство:
- $p=\infty$.

$$|(f*g)(x)|\le\int\limits_G |f(x-y)|\cdot|g(y)|dm(y)\le \operatorname{ess\,sup}(f)\cdot\int\limits_G |g(y)|dm(y),$$

откуда $\|f*g\|_{L^\infty}\le\|f\|_{L^\infty}\cdot\|g\|_{L^1}$.
- $p=1$.

$$\int\limits_G |(f*g)(x)|dm(x)=\int\limits_G\left|\int\limits_G f(x-y)g(y)dm(y)\right|dm(x)\le$$

$$\leq \int\limits_G \int\limits_G |f(x-y)| \cdot |g(y)| dm(y) dm(x) = \int\limits_G |g(y)| \int\limits_G |f(x-y)| dm(x) dm(y) =$$

$$= \int\limits_G |g(y)| \cdot \|f\|_{L^1} dm(y) = \|f\|_{L^1} \int\limits_G |g(y)| dm(y) = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}.$$

- $1 < p < \infty$.

$$\|f * g\|_{L^p}^p \leq \int\limits_G \left| \int\limits_G f(x-y) g(y) dm(y) \right|^p dm(x) \leq$$

$$\leq \int\limits_G \left| \int\limits_G |f(x-y)| \mathbf{1}(y) |g(y)| dm(y) \right|^p dm(x) \leq$$

$$\leq \int\limits_G \left[\left(\int\limits_G |f(x-y)|^p |g(y)| dm(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_G \mathbf{1}(y)^q |g(y)| dm(y) \right)^{\frac{1}{q}} \right]^p dm(x) =$$

$$= \int\limits_G \int\limits_G |f(x-y)|^p |g(y)| dm(y) dm(x) \cdot \|g\|_{L_1}^{\frac{p}{q}} =$$

$$= \int\limits_G \left(\int\limits_G |f(x-y)|^p dm(x) \right) |g(y)| dm(y) \cdot \|g\|_{L_1}^{\frac{p}{q}} = \|f\|_{L^p}^p \cdot \|g\|_{L^1}^{1+\frac{p}{q}} = \|f\|_{L^p}^p \cdot \|g\|_{L^1}^p$$

Пояснения к вычислениям:

- В третьей строке написано неравенство Гёльдера для меры $|g| dm$.
- В пятой строчке менятеся порядок интегрирования по Тонелли – Фубини.
- $1 + \dfrac{p}{q} = p\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}\right) = p$.

□

2. $f * g = g * f$.
   Доказывается при помощи замены переменной и инвариантности меры при сдвигах.
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$.
   Доказывается простой перестановкой интегралов и инвариантностью меры при сдвигах.
4. Если $f, g \in L^2(G)$, то $f * g \in L^\infty(G, m)$.

   Доказательство:

$$|(f * g)(x)| \leq \int\limits_G |f(x-y)||g(y)| dm(y) \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_G |f(x-y)|^2 dm(y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_G |g(y)| dm(y) \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$$

□

Когда мера Хаара фиксирована или ясна из контекста, часто пишут dy вместо $dm(y)$.
Как устроена свёртка в $\mathbb{R}^n$ мы поняли в третьем семестре, теперь разберемся с другими нашими примерами, а конкретно с $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{T}$.

- На $\mathbb{Z}$ мера Хаара считающая, то есть мера каждой точки – единица.

$$f \in L^p(\mathbb{Z}, m) \iff \int\limits_{\mathbb{Z}} |f(k)|^p dm(k) < +\infty,$$

то есть просто $\|f\|_p^p = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)|^p < +\infty$. Это пространство часто обозначают как $l^p = l^p(\mathbb{Z})$.

Пусть, например, $p = 1$, тогда для $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\} \in l^1$:

$$(x * y)(k) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x(k-i)y(i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_{k-i}y_i.$$

l^1 со свёрткой является алгеброй с единицей:

$$\delta_0(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

- Теперь пусть f и g – функции на окружности. Тогда

$$(f * g)(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int\limits_{\mathbb{T}} f(\xi\eta^{-1})g(\eta)d\eta, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Понятно, что функции на окружности находятся во взаимно однозначном соответствии с 2π-периодическими функциями на $\mathbb{R}$. Давайте поймём как их интегрировать.

Рис. 1: май хонест риэкшон

Пусть $I = [a, b]$ – любой отрезок длины 2π. Простое вращение отображает этот отрезок на $\mathbb{T}$ взаимно однозначно с точностью до концов (однако две точки – множество меры ноль, в нашем случае). Ясно также, что при этом отображении мера Лебега на I переходит в меру Лебега на $\mathbb{T}$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} h(\xi)d\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_a^b h(e^{ix})dx.$$

Соответственно, формула для свёртки превращается в формулу свёртки для 2π – периодических функций на $\mathbb{R}$.

$$(u * v)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_a^b u(x-y)v(y)dy$$

Несмотря на то, что $x - y$ может выйти за пределы отрезка I, всё в порядке из-за периодичности.
В алгебрах $L^1(\mathbb{R}^n)$ и $L^1(\mathbb{T}^n)$ со свёрткой в качестве умножения нет единицы. Зато есть аппроксимативные единицы, мы видели их прежде и вновь поговорим про них позже, когда они понадобятся. Как раз при помощи свёртки с аппроксимативной единицей в третьем семестре мы доказывали, что функции класса $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотны в $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $1 \leq p < +\infty$. Давайте теперь посмотрим что происходит на окружности.

Теорема 4:
1. $C^\infty(\mathbb{T})$ плотно в $L^p(\mathbb{T})$ при $1 \le p < +\infty$.
2. $C^\infty(\mathbb{T})$ плотно в $C(\mathbb{T})$ равномерно.

Доказательство: Докажем пункт 2. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$, рассмотрим её как функцию на $[-\pi, \pi]$. Тогда $f(-\pi) = f(\pi) = c$. Достаточно приблизить функцию $h = f - c$ бесконечно дифференцируемой с компактным носителем, лежащим строго внутри отрезка $[-\pi, \pi]$, и дальше мы сможем продолжить её по периодичности на всю прямую.
Пусть $\varepsilon > 0$ и $|h(x)| < \varepsilon$ в δ-окрестностях точек $-\pi$ и π. Изменим в этих окрестностях функцию h, чтобы получилось вот так:

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} 0\ , \quad \pi - |x| < \frac{\delta}{2} \\ (\pi - |x|)h(\operatorname{sgn}(x) \cdot (\pi - \delta))\ , \quad \frac{\delta}{2} \le \pi - |x| \le \delta \\ h(x), \quad \pi - |x| > \delta \end{cases}$$

Запись несколько мудрёная, на самом деле мы просто отступили на $\frac{\delta}{2}$ от концов отрезка и достроили по линейности. Ясно, что

$$\left|\tilde{h}(t) - h(t)\right| < 2\varepsilon \quad \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Теперь достаточно приблизить $\tilde{h}$ вместо h. Продолжив функцию $\tilde{h}$ нулём за пределы отрезка $[-\pi, \pi]$, мы получим непрерывную функцию на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, лежащим строго внутри $[-\pi, \pi]$, в таком определении $\tilde{h}$, как выше, это уже сделано. Теперь пусть

$$g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{\mathbb{R}} g = 1, \quad g_t(x) = \frac{1}{t} g\left(\frac{x}{t}\right).$$

В третьем семестре мы видели, что $\tilde{h} * g_t \longrightarrow \tilde{h}$, и свёртка лежит в нужном нам классе, откуда мы и получаем нужное приближение. Теперь разберёмся с первым пунктом. Но в нём всё ещё проще, потому что мы можем просто отрезать от функции по маленькому кусочку вблизи $-\pi$ и π и с оставшейся частью проделать то же самое. $\square$

5. Преобразование Фурье

Пусть G – локально компактная абелева группа с мерой Хаара λ, $f \in L^1(\lambda)$.

Определение 5: Преобразование Фурье функции f – функция на группе $\Gamma = \hat{G}$:

$$(\mathcal{F}f)(\gamma) = \hat{f}(\gamma) = \int\limits_G f(x)\overline{\gamma(x)}d\lambda(x) = \int\limits_G f(x)\gamma(-x)d\lambda(x).$$

Напишем также формулу для обратного преобразования Фурье:

$$\check{f}(\gamma) = \int\limits_G f(x)\gamma(x)d\lambda(x) = \hat{f}(\gamma^{-1}).$$

Предложение 1: Если $f, g \in L^1(G)$, то $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

Доказательство: Пусть $\gamma \in \Gamma$.

$$\widehat{f * g}(\gamma) = \int\limits_G \overline{\gamma(x)} \int\limits_G f(x-y)g(y)dydx =$$

$$= \int\limits_G \int\limits_G \overline{\gamma(x-y)} \cdot \overline{\gamma(y)} \cdot f(x-y)g(y)dxdy = \int\limits_G \left(\int\limits_G \overline{\gamma(x-y)} f(x-y)dx \right) g(y)\overline{\gamma(y)}dy =$$

$$= \int\limits_G \left(\int\limits_G f(x)\overline{(\gamma(x))}dx \right) g(y)\overline{\gamma(y)}dy = \int\limits_G f(x)\overline{\gamma(x)}dx \cdot \int\limits_G g(y)\overline{\gamma(y)}dy.$$

□

Мы будем часто обсуждать равенство $\left(\hat{f}\right)^{\vee} = f$, которое, в общем, неверно, потому что $\hat{f}$ попросту может быть несуммируемой функцией на Γ (хотя можно интерпретировать так, что станет верным, через какие-то ухищрения). Заметим, что «$\vee$» в нём относится к группе Γ (меру Хаара на которой обозначим через ρ):

$$\check{g}(x) = \int\limits_\Gamma g(y)\gamma(x)d\rho(\gamma).$$

Но подробнее об этом потом. А сейчас взглянём на примеры преобразования Фурье.

5.1. Преобразование Фурье в $\mathbb{Z}$

Пусть $f \in L^1(\mathbb{Z}, m)$, где m – считающая мера. Как мы поняли раньше, $\Gamma = \mathbb{T}$.

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\xi^{-n}, \quad \xi \in \mathbb{T}$$

Или в иной записи:

$$\hat{f}\left(e^{i\theta}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)e^{-in\theta},$$

$$\check{f}\left(e^{i\theta}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)e^{in\theta}.$$

Причём так как $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} |f(x)| < +\infty$, то сходимость абсолютная.

5.2. Преобразование Фурье в $\mathbb{T}$

Пусть $f \in L^1\left(\mathbb{T}, \frac{d\theta}{2\pi}\right)$. Ранее вы выяснили, что $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$. Тогда $\hat{f}$ есть функция на $\mathbb{Z}$, то есть двухсторонняя последовательность:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right)e^{-int}dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формула $\left(\hat{f}\right)^{\vee} = f$ в этом случае не является буквально верной, но должна выглядеть так:

$$f\left(e^{it}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}.$$

Этот ряд называется *рядом Фурье*, и составить его можно независимо от того, сходится он или нет. Перед тем, как двигаться дальше, стоит напомнить некоторый результат из функционального анализа, который нам ещё не раз понадобится.

Теорема 5 (Стоуна-Вейерштрасса): Пусть K – компакт, B – самосопряжённая подалгебра в $C(K)$, содержащая константы и разделяющая точки:

$$k_1, k_2 \in K,\ k_1 \neq k_2 \quad \Rightarrow \quad \exists h \in B : h(k_1) \neq h(k_2).$$

Тогда алгебра B плотна в $C(K)$ в смысле равномерной сходимости.

Теорема 6 (о единственности): Если $f \in L^1(\mathbb{T})$ и $\hat{f}(n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, то $f = 0$.

Доказательство:

$$\Phi(g) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} f(t)g(t)dt$$

– линейный непрерывный функционал на $C(\mathbb{T})$. По условию он обращается в ноль на всех экспонентах $t \longmapsto e^{-int}$.

Линейная оболочка этих экспонент – самосопряжённая подалгебра в $C(\mathbb{T})$, содержащая функцию 1 и разделяющая точки окружности (ведь уже функция e^{it} разделяет). По теореме Стоуна-Вейерштрасса она плотна в $C(\mathbb{T})$. Следовательно, $\Phi = 0$, а тогда $f = 0$. □

5.3. Преобразование Фурье в $\mathbb{R}$

Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}),\ \xi \in \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, тогда

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Формула обращения (верная далеко не всегда), должна выглядеть так:

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

5.4. Преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$

Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n),\ \xi \in \Gamma(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, тогда

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx.$$

Пример: Рассмотрим функцию $f = \chi_{[-1,1]}$ в $\mathbb{R}$, тогда

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{-1}^{1} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int\limits_{-1}^{1} \cos 2\pi x \xi dx = \frac{1}{2\pi\xi} \sin 2\pi x \xi \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi\xi} \sin 2\pi\xi,$$

мы получили не суммируемую функцию, так что формулу обращения вообще не написать.

Некоторое время будем заниматься окружностью $\mathbb{T}$, снабдив её нормированной мерой Лебега $\dfrac{d\theta}{2\pi} = m$.

6. Ортогональность

6.1. Ортогональность характеров

Пусть μ – произвольная неотрицательная мера на пространстве S. Тогда на пространстве $L^2(\mu)$ можно стандартным образом ввести скалярное произведение:

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_S f(t)\overline{g(t)}d\mu(t).$$

В частном случае, когда $S = \{1, ..., n\}$, а мера μ считающая, для $a = \{a_j\}_{j=1}^n$, $b = \{b_j\}_{j=1}^n$:

$$\langle a, b\rangle = \sum_{j=1}^n a_j\overline{b_j}.$$

Это отличается от того, что было на первом курсе комплексным сопряжением над b, потому что тогда мы работали с $\mathbb{R}^n$, а сейчас с $\mathbb{C}^n$, но кому я это пишу, это и так понятно.

$$\langle f, f\rangle = \|f\|_{L^2(\mu)}, \quad \langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}.$$

Также вспомним неравенство Коши-Буняковского (частный случай неравенства Гёльдера):

$$|\langle f, g\rangle| \le \|f\|_{L^2(\mu)} \cdot \|g\|_{L^2(\mu)}.$$

Предложение 2: Пусть G – компактная абелева группа с нормированной мерой Хаара λ. Тогда для любого характера γ на G

$$\int\limits_G \gamma d\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma \equiv 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство: Пусть $x, y \in G$. Проинтегрируем равенство $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$ по y:

$$\gamma(x)\int\limits_G \gamma(y)d\lambda(y) = \int\limits_G \gamma(x+y)d\lambda(y) = \int\limits_G \gamma(y)d\lambda(y).$$

Тогда если $\gamma(x) \ne 1$ хотя бы для одного x, то искомый интеграл равен нулю. □

Следствие: Если γ_1, γ_2 – различные характеры, то $\langle \gamma_1, \gamma_2\rangle = 0$.

Доказательство: Действительно, $\gamma_1\overline{\gamma_2}$ – тоже характер, причём раз γ_1 и γ_2 различны, то он не тождественная единица, а значит

$$\int\limits_G \gamma_1(t)\overline{\gamma_2(t)}d\lambda(t) = 0.$$

□

Определение 6: Две функции $f, g \in L^2(\mu)$ называются ортогональными, если

$$\langle f, g\rangle = 0.$$

Кто бы мог подумать.

Таким образом, характеры компактной абелевой группы попарно ортогональны, более того, если мера Хаара сама нормированна, то характеры тоже:

$$\|\gamma\|_{L^2(\mu)} = \langle \gamma, \gamma \rangle = \int\limits_G \mathbf{1} d\lambda = 1.$$

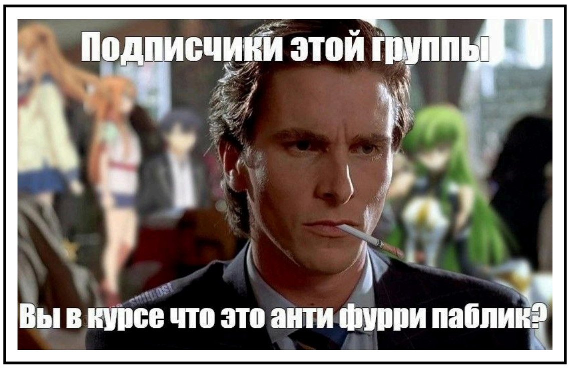


Рис. 2: ⊂(◉‿◉)つ

6.2. Ортонормированные системы

Опять же многие нижеизложенные вещи нам будут известны, но а что вы хотели.
Пусть (S, μ) – пространство с мерой.

Определение 7: Семейство функций $\{f_j\}_{j \in \mathcal{J}} \subseteq L^2(S, \mu)$ называется ортонормированной системой, если

$$\|f_j\|_{L^2} = 1 \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

$$\langle f_j, f_k \rangle = 0 \quad \forall j \neq k.$$

Например, характеры окружности $\{e^{ik\theta}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – ортонормированная система на $[-\pi, \pi]$, если мера Лебега нормированная. То же самое работает на любом отрезке длины 2π.

Определение 8: Коэффициентами Фурье функции $f \in L^2(\mu)$ по ортонормированной системе $\{f_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ называются $c_j = \langle f, f_j \rangle$.
Рядом Фурье функции f по данной ортонормированной системе называется $\sum\limits_{j \in \mathcal{J}} c_j f_j$.

Ближайшей нашей целью является увидеть, что ряд Фурье всегда сходится по норме пространства $L^2(\mu)$.

Теорема 7 (Пифагор): Пусть $f, g \in L^2(\mu)$ ортогональны, тогда

$$\|f + g\|^2_{L^2} = \|f\|^2_{L^2} + \|g\|^2_{L^2}.$$

Доказательство:

$$\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

□

Свойства:

- Пусть $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ – ортонормированная система, $j_1, \ldots, j_k \in \mathcal{J}$ – конечный набор индексов. Тогда

$$f - \sum_{s=1}^{k} c_{j_s} f_{j_s} \perp f_{j_t} \quad \text{при } t = 1, \ldots, k.$$

  Действительно,

$$\langle f - \sum_{s=1}^{k} c_{j_s} f_{j_s}, f_{j_t}\rangle = \langle f, f_{j_t}\rangle - \sum_{s=1}^{k} c_{j_s} \langle f_{j_s}, f_{j_t}\rangle = \langle f, f_{j_t}\rangle - c_{j_t} = 0.$$

- Тем самым, если $g = \sum_{s=1}^{k} c_{j_s} f_{j_s}$, то $f - g \perp g$. По теореме Пифагора

$$\|f\|^2 = \|f-g\|^2 + \|g\|^2 \geq \|g\|^2.$$

- Если $\{e_1, \ldots, e_k\}$ – конечная ортонормированная система, а $d_1, \ldots, d_k$ – комплексные числа, то вновь по теореме Пифагора

$$\|d_1 e_1 + \ldots + d_k e_k\|^2 = |d_1|^2 + \ldots + |d_k|^2.$$

- Таким образом, из двух предыдущих пунктов следует, что

$$\|g\|^2 = \left|c_{j_1}\right|^2 + \ldots + \left|c_{j_k}\right|^2,$$

  и получается

$$\left|c_{j_1}\right|^2 + \ldots + \left|c_{j_k}\right|^2 \leq \|f\|^2.$$

  Следовательно, числа $\left\{\left|c_j\right|^2\right\}_{j\in\mathcal{J}}$ образуют суммируемое семейство, при этом выполняется неравенство Бесселя:

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} \left|c_j\right| \leq \|f\|^2$$

  Далее мы докажем, что здесь всегда достигается равенство. А пока вернёмся к общей ситуации.

Пусть $\{f_j\}_{j\in A}$ – ортонормированная система в $L^2(S,\mu)$, причём A счётно.
Пусть $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ – конечные множества, дающие в объединении всё A:

$$\bigcup_{k\geq 1} A_k = A.$$

Тогда частичные суммы $\sigma_k = \sum_{j\in A_k} c_j f_j$ сходятся (c_j – коэффициенты Фурье функции f).
Действительно, пусть $l > k$, тогда

$$\|\sigma_l - \sigma_k\|^2_{L_2(\mu)} = \sum_{j\in A_l\setminus A_k} \left|c_j\right|^2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Значит частичные суммы сходятся благодаря критерию Коши. То есть ряд сходится безусловно: можно суммировать не подряд, а по любой системе конечных множеств.
Что можно сказать про сумму этого ряда?
Пусть H – замыкание линейной оболочки векторов $\{f_j\}$. Разумеется, сумма σ этого ряда лежит в H.
При этом $f - \sigma \perp f_j$ при всех j. Действительно, если $u_k, u, v \in L^2$ и $u_k \underset{L^2}{\longrightarrow} u$, то

$$|\langle u, v\rangle - \langle u_k, v\rangle| = |\langle u - u_k, v\rangle| \leq \|u - u_k\| \cdot \|v\| \longrightarrow 0.$$

Поэтому $\langle f-\sigma, f_j\rangle = \lim\limits_{k\to\infty} \langle f-\sigma_k, f_j\rangle$, а тут получаем ноль как только $A_k \ni j$.

Предложение 3: Разложение функции $f \in L^2(S,\mu)$ на составляющие $f = u + v$, где $u \in H$, а $v \perp H$ единственно.

Доказательство: Пусть есть ещё одно такое разложение: $f = u_1 + v_1$. Тогда $u + v = u_1 + v_1$, положим $w = v - v_1 = u_1 - u$. Получается, что $w \in H$ и $w \perp H$, значит $w \perp w$, тогда $\|w\|^2_{L^2} = 0$. □

Определение 9: Ортонормированная система $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ в $L^2(\mu)$ называется полной, если замыкание её линейной оболочки совпадает с $L^2(\mu)$.

Теорема 8: Следующие условия эквивалентны:

а) Ортонормированная система $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ полна.

б) Если $u \in L^2(\mu)$ и $\langle u, f_j\rangle = 0$ при всех $j \in \mathcal{J}$, то $u = 0$.

в) Выполнено равенство Парсеваля:

$$\|u\|^2 = \sum_{j\in\mathcal{J}} \left|\langle u, f_j\rangle\right|^2 \quad \forall u \in L^2(\mu).$$

г) Ряд Фурье $\sum\limits_{j\in\mathcal{J}} \langle u, f_j\rangle f_j$ всякой функции $u \in L^2(\mu)$ сходится к u.

Доказательство: Пусть H – замыкание линейной оболочки системы $\{f_j\}_{j\in\mathcal{J}}$. Мы уже поняли, что если $f \in L^2(\mu)$, то ряд $\sum\limits_{j\in\mathcal{J}} \langle f, f_j\rangle f_j$ сходится к некоторой функции g такой, что $f - g \perp H$.

- а $\Rightarrow$ г. По условию $H = L^2(\mu)$, значит $f - g \perp f - g$, из чего следует $f = g$.
- г $\Rightarrow$ а. Любая функция приближается частичными суммами ряда Фурье.
- б $\Rightarrow$ г. $f - g \perp H$, значит $f = g$, то есть ряд Фурье сходится к f.
- г $\Rightarrow$ б. Ряд Фурье функции u нулевой, значит сходится к нулю. Следовательно, $u = 0$.
- г $\Rightarrow$ в. Для $F \subseteq \mathcal{J}$, $|F| < \infty$ следующее выражение стремится к $\|u\|^2$:

$$\sum_{j\in F} \left|\langle u, f_j\rangle\right|^2 = \left\| \sum_{j\in F} \langle u, f_j\rangle f_j \right\|^2$$

- в $\Rightarrow$ б. Если все $\langle u, f_j\rangle$ равны нулю, то по равенству Парсеваля $\|u\|^2 = 0$, откуда $u = 0$.

□

Переходим к окружности (точнее, к отрезку $[-\pi, \pi]$ или вообще любому отрезку длины 2π), мера Лебега на которой нормированна: $\frac{d\theta}{2\pi}$. Когда изучают ряды Фурье, принято рассматривать поведение симметричных частичных сумм ряда

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int},$$

$$S_N f(t) = \sum_{|n|\le N} \hat{f}(n) e^{int}$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins}.$$

Систему характеров окружности $\{e^{int}\}$ очень часто называют *тригонометрической системой*, как мы знаем, она ортонормированна.
Коэффициенты Фурье определены для $f \in L^1([-\pi, \pi])$, но сейчас мы займёмся L^2-теорией. Заметим, что $L^2([-\pi, \pi]) \subseteq L^1([-\pi, \pi])$, так как для конечных мер в принципе выполнено $L^q \subseteq L^p$ для $1 \leq p \leq q \leq \infty$, поэтому так-то проблем нет, но...
На $\mathbb{R}$ будет не так: нам захочется понять, что такое $\hat{f}$ для $f \in L^2(\mathbb{R})$, но формула

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

неприемлима, вообще говоря, поскольку $L^2(\mathbb{R}) \not\subseteq L^1(\mathbb{R})$.
Из общих соображений мы знаем неравенство Бесселя:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt,$$

а верно ли равенство Парсеваля? То есть полна ли тригонометрическая система в $L^2([-\pi, \pi])$? Если вкратце: да, а подробнее

Теорема 9: Система $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ является полной в $L^2([-\pi, \pi])$.

Доказательство: Тригонометрические полиномы образуют самосопряжённую подалгебру $\mathcal{P}$ в $C(\mathbb{T})$ (чтобы получить сопряжённую функцию достаточно заменить все n на $-n$).
Уже функция e^{it} разделяет точки. Несмотря на то, что она принимает одинаковые значения в точках π и $-\pi$, этим точкам отрезка соответствует одна и та же точка на окружности. Тогда по теореме Стоуна-Вейерштрасса тригонометрические полиномы плотны в $C(\mathbb{T})$, и раз они плотны по равномерной метрике, то и по метрике L^2 тоже. В свою очередь $C(\mathbb{T})$ плотно в $L^2([-\pi, \pi])$ и тем самым мы получили требуемое. □

7. Частичные суммы

7.1. Ядро Дирихле

Пусть $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Распишем чему равны частичные суммы ряда Фурье:

$$S_N f(x) = \sum_{|k| \leq N} \hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \cdot e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{|k| \leq N} e^{-ikt} e^{ikx} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{|k| \leq N} e^{ik(x-t)} dt$$

Тогда в последней формуле виднеется некоторая свёртка. Можем определить ядро Дирихле как

$$D_N(v) = \sum_{|k| \leq N} e^{ikv},$$

на самом деле это просто некоторый тригонометрический полином, такой, что

$$S_N f = f * D_N,$$

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x - t) dt.$$

а) Петер Густав Лежён Дирихле (1805 – 1859)

б) Жан-Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830)

Рис. 3: мужики

Посчитаем формулу для ядра Дирихле:

$$D_N(v) = e^{-iNv}\left(1 + e^{iv} + \ldots + e^{2Niv}\right) = e^{-iNv} \cdot \frac{e^{(2N+1)iv} - 1}{e^{iv} - 1} =$$

$$= \frac{e^{(N+1)iv} - e^{-Niv}}{e^{iv} - 1} = \frac{e^{(N+\frac{1}{2})iv} - e^{-(N+\frac{1}{2})iv}}{e^{\frac{iv}{2}} - e^{-\frac{iv}{2}}} = \frac{2i\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)v}{2i\sin\frac{v}{2}} = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)v}{\sin\frac{v}{2}}.$$

На отрезке $[-\pi, \pi]$ знаменатель обращается в ноль лишь при $v = 0$, и вблизи нуля эта дробь близка к $2N + 1$. Также нетрудно видеть, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(u)du = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|k| \le N} e^{iku}du = \sum_{|k| \le N} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iku}du = 2\pi + \sum_{0 < |k| \le N} \left.\frac{e^{iku}}{ik}\right|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi.$$

Тем самым,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(u)du = 1.$$

7.2. Сходимость частичных сумм

Как можно пытаться проверить, что для данной точки $S_N f(x) \longrightarrow A$?

$$S_N f(x) - A = f * D_N - A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_N(y)dy - \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - A)D_N(y)dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-y) - A}{\sin\frac{y}{2}} \cdot \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)ydy.$$

Лемма 1 (Римана-Лебега): Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда

$$\lim_{M\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\cos Mx = 0,$$

$$\lim_{M\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\sin Mx = 0.$$

Доказательство: Докажем для синуса (с косинусом всё аналогично).

1. Пусть сначала $f \in D(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp} f \subseteq [-a, a]$. Тогда

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\sin Mx dx = -\int\limits_{-a}^{a} \frac{f(x)}{M} d(\cos Mx) = -\frac{1}{M}\int\limits_{-a}^{a} f'(x)\cos Mx dx + \frac{1}{M} f(x)\cos Mx\Big|_{-a}^{a}$$

   По модулю это выражение не превосходит $\frac{C}{M}$, где C – некоторая константа. Тем самым исходный интеграл стремится к нулю при $M \to \infty$.
2. Теперь докажем общий случай. Тогда f можно приближать функциями $g \in D(\mathbb{R})$ с компактным носителем.

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\sin Mx dx\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx + \left|\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\sin Mx dx\right| \le 2\varepsilon.$$

   То есть первое слагаемое можно сделать сколь угодно маленьким выбирая g, а второе стремится к нулю при $M \to \infty$.

$\square$

Вернёмся теперь к тому, что мы делали выше. Теперь нам видно, что если функция

$$y \longmapsto \frac{f(x-y) - A}{\sin\frac{y}{2}}$$

оказалась суммируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$, то $S_N f(x) \longrightarrow A$. Но нам мешает знаменатель: $\sin\frac{y}{2} \sim \frac{y}{2}$ при $y \to 0$, следовательно у $\frac{1}{\sin\frac{y}{2}}$ в нуле несуммируемая особенность, но она может компенсироваться, если знаменатель мал.

Теорема 10: Пусть $f \in L^1([-\pi, \pi])$, 2π-периодична ($f(\pi) = f(-\pi)$) и удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$ в точке x:

$$|f(x-y) - f(x)| \le C|y|^\alpha.$$

Тогда $S_N f(x) \longrightarrow f(x)$.

Доказательство: $\dfrac{|f(x-y) - f(x)|}{\left|\sin\frac{y}{2}\right|} \le C|y|^{\alpha-1}$, а это суммируемая функция. Искомое стремление $S_N f(x)$ к $f(x)$ следует из сказанного выше. $\square$

Можно сказать, что сходимость здесь равномерная, если (например) f непрерывно дифференцируема всюду. Это условие можно ещё ослабить, но мы наоборот, докажем нечто достаточно грубое.

Факт: Если f 2π-периодична и дважды непрерывно дифференцируема, то $S_N f \rightrightarrows f$.

Отложим ненадолго доказательство, и скажем пока почему множество тригонометрических полиномов $\mathcal{P}$ плотно в $C(\mathbb{T})$ в смысле равномерной сходимости. Мы уже видели это, но в доказательстве использовали теорему Стоуна-Вейерштрасса. Теперь мы обойдёмся без неё.[1]
Действительно, пусть $f \in C(\mathbb{T}),\ \varepsilon > 0$. Найдём $g \in C^2(\mathbb{T})$, такую что $\sup\limits_{\xi \in \mathbb{T}} |f(\xi) - g(\xi)| < \varepsilon$.
Теперь применив факт мы получаем $S_N g \rightrightarrows g$ и тем самым всё доказано.

Рис. 4: honorable mention

В частности, из всего этого следует, что если $f \in L^2(\mathbb{T})$, то $\left\{\hat{f}(n)\right\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$,

$$f = \lim_{N \to \infty} S_N f,$$

где сходимость подразумевается в L^2. К тому же выполнено $\|f\|_{L^2\left(\mathbb{T}, \left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)\right)} = \left\|\hat{f}\right\|_{l^2(\mathbb{Z})}$ – равенство Парсеваля. Ещё заметим, что если $\sum\limits_{j \in \mathbb{Z}} \left|c_j\right|^2 < \infty$, то ряд $\sum\limits_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{ijt}$ сходится в $L^2\left(\mathbb{T}, \frac{d\theta}{2\pi}\right)$ и коэффициенты Фурье его суммы это как раз c_j.
Сходимость уже видели: $\left\|S_{N_2} - S_{N_1}\right\|^2 = \sum\limits_{N_1 < |j| \leq N_2} \left|c_j\right|^2 \underset{N_1 \to \infty}{\longrightarrow} 0$, где S_K – K-ая симметрическая частичная сумма этого ряда. Итак, класс $L^2(\mathbb{T})$ полностью описан в терминах преобразования Фурье.
Перед тем как доказать тот факт, полезно сделать несколько замечаний о размерах коэффициентов Фурье.

Предложение 4: Если $f \in L^1([-\pi, \pi])$, то

$$\left|\hat{f}(n)\right| \leq \|f\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$$

и $\hat{f}(n) \longrightarrow 0$ при $|n| \longrightarrow \infty$.

Доказательство: Первая часть просто следует из определения:

$$\left|\hat{f}(n)\right| = \left|\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \cdot \left|e^{-int}\right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt.$$

Вторая часть – из леммы Римана-Лебега:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt - i \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \underset{|n| \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

□

[1] зато будем использовать пока даже недоказанный факт, вкусно

Предложение 5: Если $f \in C^{(k)}$ и 2π-периодична, то

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (-in)^k \hat{f}(n),$$

в частности, из предыдущего предложения следует, что $\left|\hat{f}(n)\right| \leq C|n|^{-k}, \quad n \neq 0.$

Доказательство:

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-int} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{in}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Первое слагаемое обнуляется из-за 2π-периодичности, то есть $\widehat{f'}(n) = (-in)\hat{f}(n)$, а дальше всё понятно по индукции. □

Доказательство факта: Уже знаем, что $S_N f \longrightarrow f$ поточечно, поскольку $f'(t)$ существует всюду. Но для ряда $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$ имеем $\left|\hat{f}(n) e^{int}\right| \leq C|n|^{-2}, \ n \neq 0$. Поэтому он сходится равномерно. □

Заметим, что если $|c_n| \leq C|n|^{-(k+2)}, \ n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$ сходится равномерно к 2π-периодической функции из $C^{(k)}$.
Действительно, после почленного дифференцирования j раз, где $j \leq k$, он по-прежнему мажорируется абсолютно сходящимся числовым рядом, то есть сходится абсолютно и равномерно.

Следствие: C^∞ (пространство всех 2π-периодических бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$) описывается так:

$$f \in C^\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \hat{f}(n) = O\Big(|n|^{-k}\Big), \ |n| \longrightarrow \infty.$$

7.3. Мало-мальски приличные функции

Напишем ещё вариант формулы для S_N:

$$S_N f(x) - A = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - A) \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right) y}{\sin \frac{y}{2}}}_{D_N} dy = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} (f(x+y) - f(x-y) - 2A) D_{N(y)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \left(\frac{f(x+y) - f(x-y)}{2} - A \right) D_{N(y)} dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \underbrace{\frac{1}{\sin \frac{y}{2}} \left(\frac{f(x+y) - f(x-y)}{2} - A \right)}_{\varphi(y)} \sin\left(N + \frac{1}{2}\right) y dy.$$

И вновь мы имеем, что если функция $\varphi(y)$ суммируема, то по лемме Римана-Лебега получаем

$$S_N f(x) \longrightarrow A.$$

Предположим, что f имеет разрыв первого рода в точке x, то есть

$$\exists \lim_{y \to 0+} f(x+y) = f_+(x), \quad \exists \lim_{y \to 0+} f(x-y) = f_-(x).$$

Предположим, например, что у f в точке разрыва существуют производные справа и слева:

$$\exists \lim_{y \to 0+} \frac{f(x+y) - f_+(x)}{y}, \quad \exists \lim_{y \to 0+} \frac{f(x-y) - f_-(x)}{y}.$$

Тогда если в качестве A взять величину $\frac{f_+(x)+f_-(x)}{2}$. то ряд Фурье в точке x сходится к A. Тем самым, при некоторой регулярности функции, её ряд Фурье сходится к полусумме её предельных значений.

8. Восстановление функции по ряду Фурье

8.1. Известные результаты

На самом деле всё зависит от класса, например ранее мы поняли, что в L^2 и C^∞ всё однозначно восстанавливается, то есть ряд Фурье сходится, в случае L^2 по метрике, в случае C^∞ равномерно вместе со всеми производными.
Пусть теперь $f \in L^p([-\pi, \pi])$ и мы знаем её коэффициенты Фурье $\hat{f}(n)$. Можно, конечно, составить частичные суммы

$$S_N = \sum_{|j| \le N} \hat{f}(j) e^{ijt}$$

и смотреть куда они сходятся. Сразу дадим ответ:
1. $S_N \longrightarrow f$ в L^p, если $1 < p < \infty$.
2. Существует $f \in C[-\pi, \pi]$, 2π-периодичная, такая, что $S_N f(0)$ расходится, разумеется, сдвигом 0 заменяется на любую другую точку. Это называется теоремой Дюбуа-Реймонда, доказана в конце 19 века.
3. Существует $f \in L^1([-\pi, \pi])$, ряд Фурье которой расходится почти всюду. Даже существует такая, что он расходится всюду, но это уже изыски. Это называется теоремой Колмогорова-Сильвестрова.

Не обязательно смотреть сходимость частичных сумм, может можно его как-то просуммировать.

$$\sum a_n \quad \rightsquigarrow \quad \sum b_n(\sigma) a_n$$

Надо предположить про коэффициенты b_n, что все такие ряды сходятся, далее устремить σ к какому-то σ_0. Если такие штуки сходятся, то тогда и говорят, что ряд суммируется.

8.2. Аппроксимативные единицы

Определение 10: Семейство $\{\Phi_\sigma\}$ суммируемых функций на окружности (отрезке $[-\pi, \pi]$) называется аппроксимативной единицей для $L^p(\mathbb{T})$ (или $C(\mathbb{T})$), если

$$\Phi_\sigma * f \underset{\sigma \to \sigma_0}{\longrightarrow} f$$

для любой $f \in L^p(\mathbb{T})$ (или из $C(\mathbb{T})$ соответственно).

σ_0 в определении это некоторое направление, например если индексация идёт по натуральным числам, то $\sigma_0 = +\infty$. Из общих свойств преобразования Фурье мы знаем, что

$$\widehat{\Phi_\sigma * f}(n) = \hat{\Phi}_\sigma(n)\hat{f}(n),$$

$$(\Phi_\sigma * f)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\Phi}_\sigma(n)\hat{f}(n)e^{int}.$$

То есть как и описывалось выше, мы суммируем ряд с некоторыми коэффициентами. Коэффициенты Фурье функции $\hat{f}$ явно должны быть ограничены, так что если коэффициенты $\hat{\Phi}_\sigma(n)$ достаточно быстро убывают, то такие ряды сходятся, и даже равномерно, например, достаточно, чтобы функции Φ_σ были дважды гладкие, и тогда ряды сходятся как ряды обратных квадратов.
Тепреь напишем достаточные условия для того, чтобы последовательность была аппроксимативной единицей для всех классов $L^p(\mathbb{T})$ $(1 \le p < \infty)$, $C(\mathbb{T})$.
1. Условия в терминах Φ_σ:
   a) $\|\Phi_\sigma\|_{L^1} \le C$, где C не зависит от σ.

б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_\sigma dm = 1$, где m – нормированная мера Лебега на окружности.

в) $\sup\limits_{|x|\geq\delta}\left|\Phi_{\sigma(x)}\right| \underset{\sigma\to\sigma_0}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\delta > 0$.

2. Условия в терминах $\hat{\Phi}_\sigma$:
   (а) и (б) сохраняются (б означает, что $\hat{\Phi}_\sigma(0) = 1$), а вместо (б) предположим что $\hat{\Phi}_\sigma(n) \underset{\sigma\to\sigma}{\longrightarrow} 1 \quad \forall n$.

Докажем второе условие. Как и прежде, за $\mathcal{P}$ мы обозначаем множество тригонометрических полиномов.

- Условие 2 влечёт $\forall p \in \mathcal{P} \quad \Phi_\sigma * p \longrightarrow p$ равномерно, потому что коэффициенты Фурье p просто умножаюся на коэффициенты Фурье Φ_σ, которые при $\sigma \longrightarrow \sigma_0$ стремятся к 1, поэтому так как слагаемых конечное число, сходимость равномерная.
- Множество $\mathcal{P}$ плотно в $C(\mathbb{T})$ относительно равномерной сходимости.

$$f \in C(\mathbb{T}), \quad \Phi_\sigma * f(z) - f(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} f\left(z\overline{\zeta}\right)\Phi_\sigma(\zeta)dm(\zeta) - f(z)$$

$$\varepsilon > 0,\ p \in \mathcal{P}: \quad |f(z) - p(z)| \leq \varepsilon \quad \forall z \in \mathbb{T}$$

$$\Phi_\sigma * f(z) = \Phi_\sigma * f - \Phi_\sigma * p + \Phi_\sigma * p = \Phi_\sigma * p + \int\limits_{\mathbb{T}} \left(f\left(z\overline{\zeta} - p\left(z\overline{\zeta}\right)\right)\right)\Phi_\sigma(\zeta)dm$$

Первое слагаемое равномерно стремится к p. Второе слагаемое оценим так:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{T}} (f(\eta) - p(\eta)\Phi_\sigma(z\overline{\eta}))dm(\eta)\right| \leq \int\limits_{\mathbb{T}} \sup_{\xi\in\mathbb{T}}|f(\xi) - p(\xi)| \cdot |\Phi_\sigma(z\overline{\eta})|dm(\eta)$$

Если σ достаточно близко к σ_0, то $\sup\limits_{\zeta\in\mathbb{T}}|\Phi_\sigma * f - p| \leq C\varepsilon, \quad \sup\limits_{\zeta\in\mathbb{T}}|\Phi_\sigma * f(\zeta) - f(\zeta)| \leq C\varepsilon + \varepsilon$.
Мы доказали всё в равномерной метрике, а хотелось в метрике L^p, но непрерывные функции в L^p плотны, поэтому приближая функцию непрерывными, а непрерывные приближая свёртками, всё будет хорошо.

Рис. 5: (o･ω･o)

Приведём теперь антипример. Посмотрим на ядра Дирихле: $D_N = \dfrac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}} = \sum\limits_{|j|\leq N} e^{ijt}$.

$\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|dt \sim \log N$, поэтому нормы D_N в L_1 не заведомо не ограничены. А остальные условия выполнены. Давайте покажем эту эквивалентность хотя бы с одной стороны.

$$\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right|}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}dt \geq C\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}dt = C\int_0^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)} \frac{|\sin s|}{s}ds \geq$$

$$\geq C\sum_{k=1}^{N}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin s|}{s}ds \geq C\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|dt \geq C'\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k+1} \geq C''\log N.$$

То есть мы разбили отрезок на подотрезки от $k\pi$ до $(k+1)\pi$ и заменили s на наибольшее значение. Кажется, там лучше суммирование до $N-1$ вести, чтобы всё корректнее было. Оценка сверху оставляется читателю в качестве упражнения.

Замечание: в условиях пункта 2, если $\Phi_\sigma \geq 0 \quad \forall \sigma$, то тогда то предположение, которое мы сделали вместо (б), влечёт (а), потому что

$$\int_{\mathbb{T}} |\Phi_\sigma| dm = \int_{\mathbb{T}} \Phi_\sigma dm = 1.$$

В связи с этим всем, надо вспомнить про суммирование по Чезаро.

$$\sigma_N f = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k f = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f * D_k = f * \left(\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{n} D_k\right).$$

Определение 11: Ядром Фейера называется

$$K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k$$

Формула для коэффициентов Фурье ядра Фейера видна из определения ядра Дирихле.

$$\widehat{K}_N(j) = \frac{N+1-|j|}{N+1}, \quad |j| \leq N+1,$$

$$\widehat{K}_N(j) = 0, \quad |j| > N+1.$$

Тем самым,

$$\widehat{K}_N(j) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Теперь докажем, что $K_N \geq 0$, из чего будет следовать их ограниченность в L^1, потому что, как говорилось выше, модуль интеграла ограничивается интегралом модуля, который равен просто интегралу, который равен единице по аналогичному факту для ядер Дирихле. Вспомним стандарную формулу для ядра Дирихле через синусы и распишем через неё ядра Фейера.

$$D_k(t) = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}},$$

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\underbrace{\left(\sin\frac{t}{2} + \sin\left(1+\frac{1}{2}\right)t + \ldots + \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}_{S} \circleddash$$

$$S = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{N} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t}\right) = \operatorname{Im} e^{\frac{it}{2}}\left(\sum_{k=0}^{N} e^{ikt}\right) = \operatorname{Im} e^{\frac{it}{2}}\frac{e^{i(N+1)t}-1}{e^{it}-1} = \operatorname{Im}\frac{e^{i(N+1)t}-1}{e^{\frac{it}{2}}-e^{-\frac{it}{2}}} =$$

$$= \operatorname{Im} \frac{\cos(N+1)t - 1 + i\sin(N+1)t}{2i\sin\frac{t}{2}} = -\frac{\cos(N+1)t - 1}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{2\sin^2(N+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$$\circleddash \frac{1}{N+1} \cdot \frac{\sin^2(N+1)\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}} \geq 0.$$

Стало быть, это стандартная аппроксимативная единица.

Теорема 11 (Фейера):
Ряд Фурье функции из $L^p(\mathbb{T})$ (или из $C(\mathbb{T})$) суммируется к ней методом Чезаро.

Доказательство: Мы всё уже проделали: среднее арифметическое частичных сумм это свёртка с ядрами Фейера, которые, в свою очередь, образуют стандартную аппроксимативную единицу. □

8.3. Суммирование рядов Фурье методом Абеля-Пуассона

Для начала напомним в чём заключается суть метода.

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{j=0}^{\infty} r^j a_j, \quad 0 \leq r < 1.$$

Тогда если существует $\lim\limits_{r\to 1-} \sum\limits_{j=0}^{\infty} r^j a_j = A$, то говорят, что ряд суммируется к A методом Абеля-Пуассона.
Во втором семесте мы доказывали, что этот метод регулярен, то есть сходящиеся ряды суммируются к их стандартной сумме, и смотрели на иные свойства. Но нас интересует как суммировать этим методом ряд Фурье.
Рассмотрим $f \in L^1(\mathbb{T})$ и её ряд Фурье. Сперва нам надо обойти тот факт, что ряд двухсторонний, но это сделать легко.

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{f}(j)e^{ij\theta} = \hat{f}(0) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\hat{f}(k)e^{ik\theta} + \hat{f}(-k)e^{-ik\theta}\right)$$

Теперь этому ряду сопоставляется ряд $\hat{f}(0) + \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} r^k\left(\hat{f}(k)e^{ik\theta} + \hat{f}(-k)e^{-ik\theta}\right)$, обозначим его за $\varphi_r(\theta)$.

$$\varphi_r(\theta) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{-|j|}\hat{f}(j)e^{ij\theta} = P_r(\theta) * f,$$

где $P_r(\theta) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|}e^{ij\theta}$ – *ядро Пуассона*, которое заведомо сходится как геометрическая прогрессия.
Теперь мы хотим доказать, что $\{P_r\}_{0\leq r<1}$ это аппроксимативная единица. Для этого достаточно показать:

1. $P_r \geq 0$.
2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = 2\pi$
3. $\hat{P}_r(j) \underset{r\to 1-}{\longrightarrow} 1 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.

Всё понятно, кроме первого, которое проверяется простыми вычислениями.

$$P_r(\theta) = \sum_{j\geq 0} r^j e^{ij\theta} + \sum_{j\geq 1} r^j e^{-ij\theta} = \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{i\theta}}{1-re^{-i\theta}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} \geq 0$$

Тем самым, методом Абеля-Пуассона все ряды Фурье суммируются.

8.4. Интеграл Пуассона

Если мы обозначим $re^{i\theta}$ за z, то z будет некоторой точкой круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Тогда

$$P(z) = P_r(\theta) = \sum_{j\geq 0} z^j + \overline{\left(\sum_{j>0} z^j\right)}.$$

Первое слагаемое аналитично в круге, второе слагаемое на самом деле вещественная часть некоторой аналитической функции, значит $P(z)$ гармоническая в $\mathbb{D}$. Значит, если $z = x + iy$, то P удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta P(x+iy) = 0$. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Тогда

$$P_r(\theta) * f = \sum_{j\geq 0} \hat{f}(j) z_j + \overline{\sum_{j\geq 1} \overline{\hat{f}(-j)} z_j},$$

это тоже гармоническая функция, так как первое слагаемое аналитично, а второе гармонично как сопряжённое к аналитической функции.

$$P_r * f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \pi) \cdot \frac{1-r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} dt$$

Эта штука называется интегралом Пуассона и она решает задачу Дирихле в круге.

8.5. Как получать аппроксимативные единицы?

Пусть $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z})$, предположим, что она вещественна и чётна, то есть $\varphi(-n) = \varphi(n)$, к тому же $\|\varphi\|_{l^2} = 1$.

$$\Phi(n) = \varphi * \varphi(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(n-k)\varphi(k)$$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n)\xi^n$$

Согласно равенству Парсеваля $\|\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\varphi\|_{\ell^2} = 1$.
Пусть φ не только квадратично суммируема, но и просто суммируема, то есть $\varphi \in \ell^1(\mathbb{Z}) \cap \ell^2(\mathbb{Z})$.

$$\hat{\Phi}(\zeta) = (\hat{\varphi}(\zeta))^2 \geq 0$$

Ведь потому что φ чётна, её преобразование Фурье вещественно.

Например, если взять $\varphi = \dfrac{\chi_{[-M,M]}}{\sqrt{2M+1}}$, то в свёртке получится нечто похожее на ядра Фейера.

9. Интегралы Фурье

Поговорим про преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$.
Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ранее мы уже говорили, что $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi\rangle} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$.

Всё будет не так хорошо, как на окружности, ну например потому что $L^2(\mathbb{R}^n) \not\subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$.

9.1. Основные свойства

1. $\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \|f\|_{L^1}$ – очевидно.
2. $\hat{f}$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$. Следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.
3. $\lim\limits_{\xi\to\infty} \left|\hat{f}(\xi)\right| = 0$. Следует из леммы Римана-Лебега.
4. Определим сдвиг функции. Для $t \in \mathbb{R}^n$ положим $f^t(x) = f(x-t)$, тогда
$$\widehat{f^t}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i\langle y,\xi\rangle} e^{-2\pi i\langle t,\xi\rangle} dy = \widehat{f^t}(\xi) e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}.$$
5. Если взять $g(x) = f(x) e^{2\pi i\langle x,u\rangle}$, то
$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i\langle x,u\rangle} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} dx = \hat{f}(\xi - u).$$
6. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и все $\frac{\partial}{\partial x_j} f$ суммируемы. Тогда

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial x_j}} f(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx$$

Чтобы было удобно интегрировать по частям, предположим также что f и все $\frac{\partial}{\partial x_j} f$ стремятся к нулю на бесконечности. Теперь, если для определённости взять $j = 1$, получится

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_1} f e^{-2\pi i x_1 \xi_1} dx_1 \right) e^{-2\pi i (x_2 \xi_2 + \ldots + x_n \xi_n)} dx_2 \ldots dx_n.$$

Внутренний интеграл возьмём по частям, подстановка пропадёт.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_1} f e^{-2\pi i x_1 \xi_1} dx_1 = -\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x_1 \xi_1} (-2\pi i \xi_1) dx_1 = 2\pi i \xi_1 \hat{f}(\xi)$$

Тем самым, $\widehat{\frac{\partial}{\partial x_j}} f(\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi)$.

7. Из предыдущего пункта следует, что если $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и все производные начиная с нулевой суммируемы и стремятся к нулю на бесконечности, то

$$\left(\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f\right)^\wedge = (2\pi i \xi_1)^{\alpha_1} \ldots (2\pi i \xi_n)^{\alpha_1} \hat{f}(\xi).$$

8. Если f как в пункте 7, то $\hat{f}$ убывает быстрее любой степени ξ:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \left|\hat{f}(\xi)\right| \left(1 + |\xi|^k\right) \underset{|\xi| \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Объясняется это так: если f суммируема k раз и все её производные до порядка k суммируемы, то для $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_n \leq k$ выполнено

$$\left(\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f\right)^\wedge = (2\pi i \xi_1)^{\alpha_1} \ldots (2\pi i \xi_n)^{\alpha_1} \hat{f}(\xi).$$

Тут Кисляков написал перед множителями минусы, но видимо это проблема обозначений и нормировок, раз у нас в Фурье экспонента с минусом, то тут он не возникнет.

Мы знаем, что у суммируемой функции преобразование Фурье ограничено, значит $\exists C$ такая, что

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq C \quad \text{и} \quad (2\pi|\xi|)^{\alpha_1} \ldots (2\pi|\xi_n|)^{\alpha_n} \left|\hat{f}(\xi)\right| \leq C$$

для всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Просуммировав по всем мультииндексам, не превосходящим k, получим

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq k} \left(1 + |\xi_1|^{\alpha_1} \cdot \ldots |\xi_n|^{\alpha_n}\right)}_{\geq A(1+|\xi|)^k} \leq C',$$

где оценка на сумму получена из неравенства $\frac{1}{\sqrt{n}}(|\xi_1| + \ldots + |\xi_n|) \leq \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2} \leq |\xi_1| + \ldots + |\xi_n|$.

Поэтому $\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \dfrac{C''}{(1 + |\xi|)^k}$.

9.2. Простейший вариант формулы обращения

Как мы не раз замечали, верна она далеко не всегда. Напомним, речь идёт о равенстве $(f^\wedge)^\vee = f$ для $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ещё раз вспомним формулы для прямого и обратного:

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi \langle x, \xi \rangle} dx, \quad \check{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi).$$

Оказывается, эти операции более или менее взаимно обратны для достаточно хороших функций. Работать мы будем на $\mathbb{R}$, то есть $n = 1$, и пусть $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то есть бесконечно дифференцируема с компатным носителем.[1] Покажем, что в таком случае формула обращения верна буквально. Пусть R – настолько большое число, что носитель функции $\varphi(x) = f(Rx)$ лежит в отрезке $[-\pi, \pi]$.

$$f(Rx) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(Rx) e^{-int} dx.$$

Сделав замену $Rx \rightsquigarrow x$ получаем $f(x) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\frac{x}{R}}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{-R\pi}^{R\pi} f(t) e^{-in\frac{t}{R}} dt = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i n \frac{t}{2\pi R}} dt = \frac{1}{2\pi R} \mathcal{F}(f)\left(\frac{n}{2\pi R}\right).$$

Тем самым, $f(x) = \dfrac{1}{2\pi R} \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)\left(\dfrac{n}{2\pi R}\right) e^{2\pi i x \frac{n}{2\pi R}}$. Эта сумма близка к интегралу от $-R$ до R, а в пределе при $R \longrightarrow \infty$ хотим получить стремление к $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$.

Пусть K – большое число, и пусть $\left|\dfrac{n}{2\pi R}\right| > K$. Оценим хвост ряда:

$$\frac{1}{2\pi R} \sum_{\left|\frac{n}{2\pi R}\right| > K} \left| \mathcal{F}\left(\frac{n}{2\pi R}\right) \right| \leq C \cdot \frac{1}{2\pi R} \sum_{\left|\frac{n}{2\pi R}\right| > K} \left(\frac{2\pi R}{|n|}\right)^A \leq \frac{C'}{K^{A-1}}$$

Константу $A > 0$ можно выбрать сколь угодно большой, потому что коэффициенты Фурье убывают быстрее любой степени. Для удобства обозначим $G(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi i x \xi}$. Оценим оставшуюся часть:

$$\frac{1}{2\pi R} \sum_{\left|\frac{n}{2\pi R}\right| \leq K} G\left(\frac{n}{2\pi R}\right) \xrightarrow[R \to \infty]{} \int\limits_{-K}^{K} G(\xi) d\xi.$$

Значит, для класса $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ формула обращения действительно верна.

9.3. Снова про $\mathbb{R}^n$

Вернёмся в $\mathbb{R}^n$ и вновь напишем формулу для преобразования Фурье:

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx.$$

Хочется узнать, сколько раз можно дифференцировать эту формулу. Надо дифференцировать под знаком интеграла и смотреть суммируемая ли функция получилась. Пусть $(1 + |\xi|) f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, тогда $\frac{\partial}{\partial x_j} \hat{f}$ существует для любого $j = 1, \ldots, n$ так как

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \hat{f}\right)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} 2\pi i x_j f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx$$

и подынтегральная функция суммируема по теореме Лебега. Отсюда следует, что

$$\left(2\pi i x_j f(x)\right)^{\wedge} = \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{f}.$$

Проблема класса $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в том, что преобразование Фурье функции оттуда не может иметь компактный носитель, потому что получается целая функция с компактным носителем, а по теореме единственности это ноль. Лечится это классом Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ – бесконечно гладкие функции, у которых любая

[1] То есть мы будем смотреть на крышечки от шапочек.

производная убывает на бесконечности быстрее любой степени. Тем самым, мы априори потребовали, чтобы

$$|D^{\alpha} f(x)| \le \frac{C_{\alpha,f,A}}{\left(1+|x|^{A}\right)},$$

и преобразование Фурье можно дифференцировать сколько угодно раз. Более того, из сказанного выше следует, что преобразование Фурье переводит класс Шварца на себя.

$$\mathcal{F}(S(\mathbb{R}^n)) \subseteq S(\mathbb{R}^n)$$

позже мы поймём, что на самом деле тут равенство.

9.4. Растянутые и сдвинутые функции

Хотим понять, как ведёт себя преобразование Фурье при растяжении функции.
Пусть $t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Положим $f^{(t)}(x) = f(tx)$.

$$\widehat{f^{(t)}}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(tx) e^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle dx} = \frac{1}{|t|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \frac{\xi}{t}\rangle} = \frac{1}{|t|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{t}\right).$$

Тем самым, $\left(\dfrac{1}{s^n} f\left(\frac{x}{s}\right)\right)^{\wedge} = \hat{f}(s\xi)$.

Теперь рассмотрим сдвиг: пусть $y \in \mathbb{R}^n$, определим $f_{(y)} = f(x-y)$. Выше мы уже видели, что

$$\hat{f}_{(y)}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} dx = e^{-2\pi i \langle \xi, y\rangle} \hat{f}(\xi).$$

9.5. Общая теория про формулу обращения

Лемма 2: Если $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) g(y) dy$.

Доказательство: Для начала стоит заметить, что формула действительно осмысленная: преобразование Фурье функции из L^1 ограничено, так что умножая на суммируемую мы получаем суммируемую.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(t) e^{-2\pi i\langle t,x\rangle} dt \right) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) g(t) e^{-2\pi i \langle t,x\rangle} dx dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(t)\hat{f}(t)dt.$$

Теорема Фубини работает, так как функция $(x,y) \longmapsto f(x)g(y)e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}$ суммируема на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. □

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-u)\hat{g}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle u,s\rangle} \hat{f}(s) g(s) ds.$$

Давайте считать, что g чётная. Тогда $\hat{g}$ также чётная, это видно из формулы для растяжения при $t = -1$. Тогда в левом интеграле можно заменить x на $-x$, также заменим u на $-u$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u-x)\hat{g}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle u,s\rangle} \hat{f}(s) g(s) ds.$$

Теперь подставим $g(ts)$ вместо $g(s)$.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u-x) \cdot \frac{1}{t^n} \cdot \hat{g}\left(\frac{x}{t}\right) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle u,s\rangle} \hat{f}(s) g(ts) ds.$$

Тут виднеется формула свёртки с аппроксимативной единицей, надо потребовать, чтобы

$$\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(v)dv = 1.$$

Было бы неплохо, чтобы $g(0) = 1$, g была бы непрерывна и $\hat{f}$ суммируема, тогда по теореме Лебега правая часть будет стремится к обратному преобразованию Фурье для функции $\hat{f}$.

Предложение 6: Пусть $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)dx = 1$. Положим $h_t(x) = \frac{1}{t^n} h\left(\frac{x}{t}\right)$ для $t > 0$. Тогда

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad f * h_t \xrightarrow[t \to 0]{L^1} f.$$

Доказательство: Так как интеграл h_t останется единичным, надо оценить интеграл по x от модуля следующего выражения:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h_t(y)dy - f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} h_t(y)dy.$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h_t(y)dy - f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} h_t(y)dy \right| dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| dx |h_t(y)| dy \ominus$$

Далее применим непрерывность сдвига в L^1:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |y| < \delta \quad \Rightarrow \varphi(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| dx < \varepsilon.$$

$$\ominus \int\limits_{|y|<\delta} \varphi(y)|h_t(y)|dy + \int\limits_{|y|\geq\delta} \varphi(y)|h_t(y)|dy \leq \varepsilon \int\limits_{|y|<\delta} |h_t(y)|dy + \int\limits_{|y|\geq\delta} \varphi(y)|h_t(y)|dy \leq$$

$$\leq \varepsilon \|h\|_{L^1} + 2\|f\|_{L^1} \underbrace{\int\limits_{|y|\geq\delta} \frac{1}{t^n} \left| h\left(\frac{y}{t}\right) \right| dy}_{= \int\limits_{|u|\geq\delta t} |h(u)| du \xrightarrow{t \to 0} 0}$$

$\square$

9.6. «Шаблон» для обращения преобразования Фурье

Имеется $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ – фиксированная. Мы требовали от неё, чтобы она была чётная, непрерывная в нуле (хотя раньше сказали, что везде) и $g(0) = 1$.

$$\text{ЛЧ} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-u) \cdot \frac{1}{t^n} \cdot \hat{g}\left(\frac{u}{t}\right) du = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) g(ty) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy = \text{ПЧ}$$

Чтобы получить свёртку с аппроксимативной единицей, нужны ещё условия: $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(u)du = 1$, и тогда $\frac{1}{t^n} \hat{g}\left(\frac{u}{t}\right)$ действительно будет аппроксимативной единицей. Но как такую g найти?

Пусть пока что $n = 1$. Возьмём чётную $g_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $g_1(0) = 1$ – это сделать легко. Тогда $\widehat{g_1} \in L^1$, так как она лежит в классе Шварца. Так как для класса $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ формула обращения верна, можем написать

$$g_1(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{g_1}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

Подставив туда $x = 0$ получим $1 = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{g_1}(\xi) d\xi$.

А в $\mathbb{R}^n$ мы можем взять $g(x) = g_1(x_1) \cdot \ldots \cdot g_1(x_n)$, для неё $\hat{g}(\xi) = \widehat{g_1}(\xi_1) \cdot \ldots \cdot \widehat{g_1}(\xi_1)$ и всё что надо выполнено. Теперь можем смело такую g зафиксировать.

$$\text{ЛЧ} \xrightarrow{L^1} f.$$

Давайте предположим, что $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда так как g ограничена, можно перейти к пределу под интегралом, и

$$\text{ПЧ} \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy = \left(\hat{f}\right)^{\vee}.$$

Тем самым, мы получили следующий результат:

Теорема 12: $f = \left(\hat{f}\right)^{\vee}$ почти всюду, если f и $\hat{f}$ суммируемы.

''Почти всюду'' можно не писать, потому что прямое и обратное преобразования Фурье непрерывны, так что раз f совпадает почти всюду с непрерывной функцией, её можно поправить, чтобы она стала непрерыной.

Следствие: $\mathcal{F}(S(\mathbb{R}^n)) = S(\mathbb{R}^n)$

Доказательство: Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. По теореме $\varphi = (\hat{\varphi})^{\vee}$. Обозначим $\beta = \hat{\varphi}$. Получили, что φ это чьё-то обратное преобразование Фурье, но если взять $\gamma(x) = \beta(-x)$, то

$$\hat{\gamma}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma(\xi) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \beta(-\xi) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \beta(\xi) e^{2\pi \langle x, \xi \rangle} d\xi = \check{\beta}(x) = \varphi(x).$$

$\square$

Для удобства будем называть g порождающей для формулы обращения.

9.7. Теорема Планшереля

Напомним, что выполнялось на окружности:

$$f \in L^2(\mathbb{T}) \Longleftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right|^2 < +\infty,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right|^2.$$

Теорема Планшереля говорит, что нечтно подобное выполнено и в $\mathbb{R}^n$. Формулу для преобразования Фурье можно написать для $L^1(\mathbb{R}^n)$, но для функций из L^2 не всегда, так что можно рассмотаривать $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. А это множество плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$, так что потом можно будет приближаться функциями этого класса.

Теорема 13: Если $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, то

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle.$$

Следствие: Если взять $f = g$, то получим, что $\|f\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}$ для функций из класса Шварца.

Доказательство теоремы: Пусть $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Тогда по лемме 2 $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\hat{\psi}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x)\psi(x)dx$.

Положим $\psi = \check{u}$, где $u \in S(\mathbb{R}^n)$ – произвольная. Получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)u(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\check{u}(x)dx.$$

Положим $u = \overline{v}$, тогда $\check{u}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{v(\xi)}e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(\xi)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi} = \overline{\hat{v}(x)}$. □

Задачим линейный оператор $\mathcal{F} : \varphi \longmapsto \hat{\varphi}$, только что мы доказали, что в норме L^2 это изометрия, то есть $\|\mathcal{F}\varphi\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$. По теореме о продолжении с плотного множества, $\mathcal{F}$ можно линейно продолжить до линейного оператора на всём L^2. Для тех, кто с ней незнаком, поясним:
Пусть $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Приблизим её функциями $\varphi_n \in S(\mathbb{R}^n) : \quad \|\varphi_n - h\|_{L^2} \longrightarrow 0$. Тогда $\{\mathcal{F}\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность Коши в L_2, так как $\|\mathcal{F}(\varphi_n) - \mathcal{F}(\varphi_k)\| = \|\mathcal{F}(\varphi_n - \varphi_k)\| = \|\varphi_n - \varphi_k\|$.
Поэтому, так как L^2 банахово, эта последовательность куда-то сходится: $\mathcal{F}(\varphi_n) \longrightarrow g$. Это g не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности и $\|h\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}$.
Теперь за $\mathcal{F}$ обозначаем уже продолженный на всё L^2 оператор, его мы и будем называть преобразованием Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n)) = L^2(\mathbb{R}^n)$ потому что раз это изометрия, то образ является замкнутым подпространством, но так как класс Шварца там лежит и плотен, то образ совпадает с $L^2(\mathbb{R}^n)$. Из всего сказанного вытекает следующий факт.

Факт. Пусть $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $v_n \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ и $v_n \xrightarrow{L^2} h$. Тогда $\hat{v}_n \xrightarrow{L^2} \mathcal{F}(h)$.

Также ясно, что $\langle \mathcal{F}(u), \mathcal{F}(v)\rangle = \langle u, v\rangle$. Это следует либо из поряризационного тождества, либо из сохраняния нормы для предела по функциям класса Шварца.

9.8. Ещё про формулы обращения

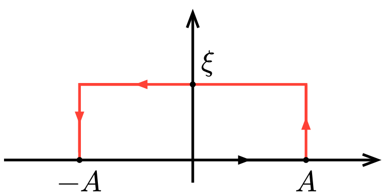
Обозначим $\mathcal{F}\_(h)(x) = \mathcal{F}(h)(-x)$. Тогда $\mathcal{F}\_ = \mathcal{F}^{-1}$, потому что для функций класса Шварца это верно. То есть формула обращения в L^2 верна.

Напишем ещё одну порождающую функцию: $g(x) = e^{-\pi|\pi|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$. Она лежит в классе Шварца, давайте посчитаем её преобразование Фурье.
1. $n = 1$. $g(x) = e^{-\pi x^2}$.

$$\hat{g}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i x\xi}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(x^2+2ix\xi+(i\xi)^2\right)}e^{-\pi\xi^2}dx = e^{-\pi\xi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} = 1$$

ТУТ ЖЕ НЕ 1, ДА???

Для $\xi = 0$ нам это известно, иначе рассмотрим следующий прямоугольник:



Интеграл по нему функции $e^{-\pi(x+i\xi)^2}$ равен нулю, так как она аналитична. На нижнем отрезке он равен единице, это просто случай $\xi = 0$, по верхней стороне это интеграл, который нам нужен с противоположным знаком. Теперь разберёмся с боковыми сторонами

$$\int\limits_0^\xi e^{-\pi(\pm A+y)^2} dy = \int\limits_0^\xi e^{-\pi A^2 \pm 2\pi A i y + \pi y^2} dy \underset{A\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

2. n любое. Тогда $e^{-\pi|x|^2} = e^{-\pi x_1^2} \cdot \ldots \cdot e^{-\pi x_n^2}$. То же самое верное и тут, так как

$$\left(e^{-\pi|x|^2}\right)^\wedge = e^{-\pi|\xi|^2}.$$

Возьмём функцию $f \in L^2(\mathbb{R})$, обозначим

$$f_A = \chi_{[-A,A]} \cdot f.$$

Она лежит в пересечении $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Тогда существует $\widehat{f}_A$.

$$f_A \underset{A\to\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} f,$$

$$\mathcal{F} f = \lim_{A\to\infty} \widehat{f}_A = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx,$$

где пределы понимаются в смысле пространства L^2.

Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\varphi = \mathcal{F}(f)$. Тогда верна такая формула:

$$f(x) = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} \varphi(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi,$$

где, опять же, предел в смысле L^2. Это правда так как $\chi_{[-A,A]} \cdot \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Возьмём $h = \chi_{[-1,1]}$. Где-то раньше мы считали, что

$$\widehat{h}(\xi) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin 2\pi\xi}{\xi}.$$

Эта штука не суммируема, но лежит в L^2. По теореме Планшереля

$$\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 \pi\xi}{\xi^2} d\xi = 2.$$

Напишем опять ту общую формулу, из которой мы выводили формулу обращения, предположения про g всё те же.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot \frac{1}{t^n} \cdot \hat{g}\left(\frac{y}{t}\right) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(s) e^{2\pi i \langle x,s\rangle} g(ts) ds.$$

$n = 1, \quad g = \chi_{[-1,1]}$.

$$\int\limits_{-\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t}} \hat{f}(s) e^{2\pi i x s} ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi y}{t}}{\frac{y}{t}}, \quad A = \frac{1}{t}$$

$$\int\limits_{-A}^{A} \hat{f}(s) e^{2\pi i x s} ds = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \frac{\sin 2\pi A y}{y} dy$$

В несобственном смысле,

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{\sin 2\pi Ay}{\pi y}=1.$$

Предполагаем $f\in L^1(\mathbb{R})$ и x фиксированно.

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\frac{\sin 2\pi Ay}{\pi y}dy-a=\int_{-\infty}^{\infty}(f(x-y)-a)\frac{\sin 2\pi Ay}{\pi y}dy=$$

$$=\int_{-M}^{M}\frac{f(x-y)-a}{\pi y}\sin 2\pi Ay dy+\int_{\mathbb{R}\setminus[-M,M]}f(x-y)\frac{\sin 2\pi Ay}{\pi y}dy+a\int_{\mathbb{R}\setminus[-M,M]}\frac{\sin 2\pi Ay}{\pi y}dy=$$

$$=I_1(x)+I_2(x)+I_3.$$

Проведём оценки, для начала убедимся, что второе и третье слагаемые малы при любом A, если M велико.

- $\varepsilon>0$. Покажем, что $|I_2(x)|<\varepsilon$, если M велико (равномерно по A).

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-M,M]}|f(x-y)|\cdot\frac{1}{\pi|y|}\leq\frac{1}{\pi M}\int_{|y|>M}|f(x-y)|dy\leq\frac{1}{\pi M}\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|dy=\frac{1}{\pi M}\|f\|_{L^1}.$$

- То же самое для I_3.

$$I_3=\int_{-\infty}^{-M}\frac{\sin 2\pi Ay}{\pi y}dy+\int_{M}^{\infty}\frac{\sin 2\pi Ay}{\pi y}dy=2\int_{M}^{\infty}\frac{\sin 2\pi Ay}{\pi Ay}d(Ay)=2\int_{AM}^{\infty}\frac{\sin 2\pi\tau}{\pi\tau}d\tau.$$

Так как A нас интересует на бесконечности, то, например, при $A\geq 1$ интеграл оценивается тем же самым без A, а он стремится к нулю при $M\to\infty$.

- Если нам повезло, и функция $y\longmapsto\frac{f(x-y)-a}{y}$ суммируема на любом отрезке $[-M,M]$, то в силу леммы Римана-Лебега $I_1(x)\longrightarrow 0$ при $A\longrightarrow\infty$.

Следствие: Если $y\longmapsto\dfrac{f(x-y)-a}{y}$ суммируема на любом отрезке $[-M,M]$, то

$$\int_{-A}^{A}\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi\underset{A\to\infty}{\longrightarrow}a.$$

Следствие: Если у f существует производная, то сходимость имеет место и происходит к $a=f(x)$.

Эти следствия называются классической формулой обращения. То есть по обратному преобразованию Фурье функция восстанавливается там, где есть минимальная гладкость.

9.9. Ядро Пуассона для верхнего полупространства

Это ещё один вариант общей формулы обращения.

Напомним, h – гармоническая в $\mathbb{R}_d$, если $\Delta h=0$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2h+\ldots+\left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^2h=0$$

Функция $r^{-(d-2)}$ гармонична, где $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$. При $d = 2$ вместо неё рассматривают логарифм $\log r$. Посчитаем частные производные:

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{1}{2r} \cdot 2x_j = \frac{x_j}{r},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} r^{-(d-2)} = -(d-2) r^{-(d-2)-1} \cdot \frac{x_j}{r} = -(d-2) r^{-d} x_j,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} r^{-(d-2)} = d(d-2) r^{-(d-1)} \cdot \frac{x_j}{r} \cdot x_j - (d-2) r^{-d},$$

$$\Delta r^{-(d-2)} = -(d-2) r^{-d} + d(d-2) r^{-(d-2)} \sum_{j=1}^{d} x_j^2 = 0.$$

Добавим ещё одну переменную $t > 0$, полученное полупространство обозначим за $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Тогда функция $\left(t^2 + |x|^2\right)^{-\frac{n-1}{2}}$ гармонична в $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^2 + |x|^2\right)^{-\frac{n-1}{2}} = C \frac{t}{\left(t^2 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} = C \frac{t}{t^{n+1}\left(1 + \left|\frac{x}{t}\right|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} = C \frac{1}{t^n\left(1 + \left|\frac{x}{t}\right|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Обозначим $p(x) = \frac{C'}{\left(1 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$. Тогда сверху мы получили $\frac{1}{t^n} p\left(\frac{x}{t}\right) = p_t(x)$. Функция p неотрицательна, суммируема на $\mathbb{R}^n$, и если выбрать C' так, чтобы интеграл был равен единице, то получим, что $\{p_t\}_{t>0}$ – аппроксимативная единица. На неё можно смотреть как на функцию от двух переменных, и тогда она будет гармонична в верхнем полупространстве.

$$h \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad H(x,t) = h * p_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y) p_t(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) p_t(x-y) dy.$$

H гармонична в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ так как можно дифференцировать под знаком интеграла, потому что дифференцируя два раза степень при $|x|^{-1}$ останется больше размерности пространства, то есть
Замечание: $D\, p_t(x)$ – суммируемая функция для любого дифференциального опертора.

$$\varphi = \hat{p}, \quad \hat{p_t}(x) = \varphi(tx).$$

Ниже мы покажем, что φ радиальна, то есть $\varphi = \psi(|x|)$, где ψ – некоторая функция на $\mathbb{R}_+$. Тогда

$$\hat{p_t}(x) = \psi(t|x|).$$

Обозначим $P(t,y) = p_t(y)$.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y_1^2} + ... + \frac{\partial^2 P}{\partial y_n^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi(t|x|)}{\partial t^2} + (2\pi i x_1)^2 \psi(t|x|) + ... + (2\pi i x_n)^2 \psi(t|x|) = 0,$$

$$|x|^2 \psi''(t|x|) - 4\pi^2 |x|^2 \psi(t|x|) = 0.$$

Возьмём $|x| = 1$, тогда $\psi''(t) - 4\pi^2 \psi(t) = 0$. Курс дифференциальных уравнений говорит нам, что решением служит

$$\psi(t) = C_1 e^{2\pi t} + C_2 e^{-2\pi t}.$$

$$\hat{p}(x) = \psi(|x|), \quad \hat{p}(0) = \psi(0).$$

C_1 должна быть равна нулю, чтобы было стремление к нулю преобразования Фурье, а что $C_2 = 1$ следует из равенства выше.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)p_t(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}e^{-2\pi t|\xi|}d\xi.$$

Левая часть сходится к f в L^1 из-за аппроксимативной единицы, и в L^2 происходит то же самое. Если правую часть рассматривать как функцию u от $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, то u гармоническая и если $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, то $L^p - \lim\limits_{t\to 0} u(\cdot,t) = f(\cdot)$. Если $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и равномерное непрерывна[1], то $u(\cdot,t) \underset{t\to 0}{\rightrightarrows} f(\cdot)$.
Получили ещё одну формулу – способ получать нечто вроде формулы обращения с помощью свёртки с ядром Пуассона. Восполним то, чем воспользовались выше.

9.10. Преобразование Фурье при ортогональных преобразованиях

Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – ортогональное преобразование, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\widehat{f\circ V}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(V(x))e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx = \int\limits_{\mathbb{R}_n} f(u)e^{-2\pi i\langle V^{-1}u,\xi\rangle}du =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i\langle u,V\xi\rangle}du = \hat{f}(V\xi) = \left(\hat{f}\circ V\right)(\xi).$$

Отсюда следует, что если функция f зависит только от длины f, то есть радиальна, то её преобразование Фурье тоже радиально.

9.11. Функция Пуанкаре в круге

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i(x-\theta)}\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{inx}.$$

Посмотрим на случай $n = 1$.

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\frac{t}{\pi(t^2+y^2)}dy,$$

$$\frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^2+2r(1-\cos\theta)} = \frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

Заметно, что получаются весьма схожие вещи: t похоже на $1-r$, а x похоже на $2\sin\dfrac{\theta}{2}$.

10. Сходимость свёрток почти всюду

Из сходимости функций в L^p следует, то можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду, но для каждой функции такая последовательность будет своя.

10.1. Максимальная функция Харди-Литтлвуда

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Посмотрим на

$$(Mf)(x) := \sup_{r>0}\frac{1}{|B_r(x)|}\int\limits_{B_r(x)} |f(t)dt|,$$

где под модулем шарика подразумевается его объём. Получилась измеривая функция, ведь супремум можно брать по рациональным радиусам и тогда получится счётный супремум измеримых функций.

[1]если не требовать равеномерную непрерывность, то сходимость будет поточеченой

Пример: $n = 1$, $f = \chi_{[-1,1]}$. Тогда $Mf(x) \geq \frac{c}{|x|}$ для достаточно больших x, так что она получилась не суммируемой.

Напомним неравенство Чебышёва: для $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$|\{|g| > t\}| \leq \frac{1}{t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx = \frac{\|g\|}{t}.$$

Откуда $|\{|g| > t\}| = O\left(\frac{1}{t}\right)$ – условие не сильнее, чем $f \in L^1$.

Теорема 14 (Харди-Литтлвуда): Существует константа $C = C_n$, что $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\quad \forall t > 0$

$$|\{x : Mf(x) > t\}| \leq \frac{C_n \|f\|_{L^1}}{t}.$$

Для знающих функциональный анализ это будет означать, что M имеет слабый тип $(1, 1)$.

Определение 12: T – сублинейный функционал на измеримых функциях, если

$$|T(\alpha f + \beta g)| \leq C(|\alpha| \cdot |T(f)| + |\beta| \cdot |T(g)|).$$

- Он имеет сильный тип $(1, 1)$, если
$$\|Tf\|_{L^1} \leq C\|f\|_{L^1}$$
- Он имеет слабый тип $(1, 1)$, если
$$|\{|Tf| > \lambda\}| \leq \frac{C\|f\|_{L^1}}{\lambda}$$

То есть в первом случае T действует из L^1 и L^1, а во втором из L^1 в почти L^1, этим и обуславливается название.

Лемма 3 (Винера): Пусть $B_1, B_2, ..., B_N$ – конечное множество шаров в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует конечный поднабор попарно непересекающихся шаров $U_1, U_2, ..., U_k$, такой, что

$$3U_1 \cup 3U_2 \cup ... \cup 3U_k \supseteq \bigcup_{s=1}^{N} B_s,$$

где $AB_r(x) = B_{Ar}(x)$.

Доказательство: Пусть U_1 – шар наибольшего радиуса среди набора. Все шары, которые он пересекает содержатся в $3U_1$. Теперь пусть U_2 – шар наибольшего радиуса среди тех, которые не пересекаются с U_1. Строя последовательность таким образом получим необходимый поднабор. $\square$

Доказательство теоремы Харди-Литтлвуда: Требуется оценить меру $A = \{x : Mf(x) > t\}$. Возьмём комакт $K \subseteq A$ и докажем, что

$$|K| \leq \frac{C_N \|f\|_{L^1}}{t}.$$

Если $y \in K$, то $Mf(y) > t$, значит существует шар $B^{(y)}$ с центром в y такой, что

$$\frac{1}{|B^{(y)}|}\int\limits_{B^{(y)}}|f(t)|dt > t.$$

Шары $B^{(y)}$ покрывают K, значит можно выбрать конечное подпокрытие $B_1, ..., B_N$, для которых всё так же

$$|B_i| < \frac{1}{t}\int\limits_{B_i}|f(t)|dt.$$

По лемме Винера можем выбрать среди них дизъюнктные $U_1, ..., U_M$, такие что $3U_1 \cup ... \cup 3U_M \supseteq K$. Теперь можно написать оценку

$$|K| \leq \sum_{j=1}^{M}|3U_j| = 3^n\sum_{j=1}^{M}|U_j| \leq \frac{3^n}{t}\sum_{j=1}^{M}\int\limits_{U_j}|f(t)|dt \leq \frac{3^n}{t}\|f\|_{L^1}.$$

По регулярности меры можно приближать A компактами, чтобы мера тоже приближалась. $\square$

Замечание: Пусть μ – конечная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$.

$$M\mu(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B_r(x)|}|\mu|(B_r(x)).$$

Тогда $|\{x : M\mu(x) > t\}| \leq \frac{3^n}{t}|\mu|(\mathbb{R}^n)$. Работает абсолютно аналогичное доказательство.

10.2. Сильная теорема о дифференцировании

Определение 13: Дифференциальный базис – совокупность измеримых множеств $\{C_r\}_{r>0}$, $|C_r| > 0$, что существуют не зависящие от r константы a и b, такие что

$$C_r \subseteq B_{ar}(0) \text{ и } |C_r| \geq b|B_r(0)|.$$

Теорема 15 (о дифференцировании): Если h локально суммируема, то почти всюду

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|C_r|}\int\limits_{C_r+x}h(y)dy = h(x).$$

Её можно усилить теоремой Лебега, перенеся h в левую часть и поставив модуль под интеграл.

Замечание: Пусть $f = \chi_E$, где E – измеримое множество положительной меры. Возьмём в теореме о дифференцировании $C_r = B_r(0)$, тогда для почти всех x

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B_r(x)|}|B_r(x)\cap E| = \begin{cases}1, & x \in E\\ 0, & x \notin E\end{cases}$$

Теорема 16 (Лебега): Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то для почти всех x

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{|C_t|}\int\limits_{C_t+x}|f(u) - f(x)|du = 0.$$

На самом деле понятно, что f можно считать локально суммируемой. Обозначим

$$(\tau f)(x) = \overline{\lim_{t \to 0}} \frac{1}{|C_t|} \int\limits_{C_t + x} |f(u) - f(x)| du$$

Тем самым надо показать, что $\tau f = 0$ для почти всех x и всякой $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство: Докажем, что $\lambda^*(\{x : \tau f(x) > s\}) = 0$ для всех $s > 0$, где λ^* – внешняя мера Лебега (иначе могут быть проблемы с измеримостью).

$$\tau f(x) \le \sup_{t>0} \left(\frac{1}{|C_t|} \int\limits_{C_t + x} |f(u)| du \right) + |f(x)|,$$

$$\frac{1}{|C_t|} \int\limits_{C_t + x} |f(u)| du \le \frac{1}{bt^d} \int\limits_{B_{at}(x)} |f(u)| du = \frac{A}{|B_{at}|} \int\limits_{B_{at}(x)} |f(u)| du,$$

$$\sup_{t>0} \left(\frac{1}{|C_t|} \int\limits_{x + C_t} |f(u)| du \right) \le A(Mf)(x),$$

$$\lambda^*\{x : \tau f(x) > s\} \le \lambda\left\{AMf > \frac{s}{2}\right\} + \lambda\left\{|f| > \frac{s}{2}\right\} \le C \cdot \frac{2A}{S} \cdot \|f\|_{L^1} + \frac{2}{s} \cdot \|f\|_{L^1} = C' \cdot \frac{1}{s} \cdot \|f\|_{L^1}$$

Звёздочки мы убрали, потому что тут множества измеримые. Если φ – непрерывная функция с компактным носителем, то

$$\tau\varphi \equiv 0,$$

$$\tau(f + g) \le \tau(f) + \tau(g)$$

$f \in L^1(\mathbb{R}^d),\ \varepsilon > 0,\ \exists\, \varphi$ – непрерывная с компактным носителем такая, что $\|f - \varphi\|_{L^1} \le \varepsilon$.

$$\tau(f) \le \tau(f - \varphi) + \tau\varphi = \tau(f - \varphi)$$

□

Дополнение: Пусть ν – сингулярная борелевская мера на $\mathbb{R}^d$. Тогда почти всюду

$$\frac{1}{|C_t|} \nu(x + C_t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

План доказательства:

- Если ν сосредоточена на компакте K и $\lambda(K) = 0$, то это очевидно.
- Если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K : |\nu - \nu_K| \le \varepsilon, \quad \nu_K(e) = \nu(K \cap e)$, $\lambda(K) = 0$, то тоже верно.
- Всякая конечная борелевская мера на $\mathbb{R}_d$ – такая, как требуется в предыдущем пункте.

Пусть ρ – конечная борелевская мера на $\mathbb{R}^d$. Тогда $\rho = f \cdot \lambda + \nu$, где ν сингулярная относительно меры Лебега и

$$\frac{1}{|C_t|} \rho(x + C_t) \underset{\text{п.в.}}{\longrightarrow} f(x)$$

Следствие (Лебег): Монотонная функция на $\mathbb{R}$ дифференцируема почти всюду.

Доказательство: Φ – возрастающая функция, нужен предел

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\Phi(x + h) - \Phi(x)}{h}.$$

Пусть ρ – мера Лебега-Стилтьеса, порождённая функцией Φ. Можем считать, что x и $x+h$ – точки непрерывности, ведь точек разрыва не более чем счётное число. Под пределом стоит

$$\frac{\rho([x, x+h))}{|[x, x+h)|},$$

и это должно сойтись к плотности абсолютно непрерывной части меры ρ и производная как у функции f из разложения ρ (осторожно, какой-то скам). Если в $x+h$ нет непрерывности, то всё равно всё хорошо, ведь скачки там не очень большие за счёт непрерывности в x. $\square$

Теорема 17: T_α – семейство операторов, что для каждого α оператор T_α отображает функции из $L^1(\mathbb{R}^d)$ в измеримые функции. Фиксировано некоторое α_0, к которому стремятся α.

- Пусть $\forall f \in L^1$, для почти всех x выполнено $\sup\limits_\alpha |T_\alpha(f(x))| \leq C(Mf(x) + |f(x)|)$.
- Существует плотное в L^1 множество E, что $\forall g \in E$ почти всюду выполнено $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} T_\alpha g(x) = 0$.
- Пусть операторы T_α субаддитивные: $\exists D : |T_\alpha(f_1 + f_2)| \leq D(|T_\alpha(f_1)| + |T_\alpha(f_2)|)$.

Тогда $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ почти всюду выполняется $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} T_\alpha f(x) = 0$

Доказательство:

$$\tau f(x) = \overline{\lim_{\alpha \to \alpha_0}} |T_\alpha f(x)|$$

$$\lambda^*\{\tau f > s\} \leq \lambda\left\{Mf > \frac{s}{A}\right\} + \lambda\left\{|f| > \frac{s}{A}\right\} \leq \frac{C' \|f\|_{L^1}}{s}.$$

Если $\varphi \in E$, то $\tau f \leq D'(\tau(f - \varphi) + \tau\varphi)$.

$$S_t f(x) = f * u_t(x) = \frac{1}{t^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u\left(\frac{y}{t}\right) f(x-y) dy,$$

$$u \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) dx = 1, \quad u_t(x) = \frac{1}{t} u\left(\frac{x}{t}\right).$$

$$T_t f(x) = \frac{1}{t^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|u\left(\frac{y}{t}\right)\right| \cdot |f(x-y) - f(x)| dy$$

Хотим чтобы $\lim\limits_{t \to 0} T_t f(x) = 0$ почти всюду.

$$\sup_{t>0} T_t f(x) \leq \sup_t \frac{1}{t^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|u\left(\frac{y}{t}\right)\right| \cdot |f(x-y)| dy + |f(x)|$$

Из следующей теоремы будет следовать что

$$\sup_t \frac{1}{t^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|u\left(\frac{y}{t}\right)\right| \cdot |f(x-y)| dy \leq CMf(x) \qquad (\star)$$

$\square$

Теорема 18: Оценка $(\star)$ верная, если u допускает суммируемую убывающую радиальную мажоранту, то есть $\exists \varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, φ убывает, $\varphi(|x|)$ суммируема на $\mathbb{R}^n$ и $|u(x)| \leq \varphi(|x|)$.

Доказательство:

$$\frac{1}{t^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|u\left(\frac{y}{t}\right)\right|\cdot|f(x-y)|dy \le \frac{1}{t^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\frac{|y|}{t}\right)|f(x-y)|dy =$$

$$= \frac{1}{t^n}\int\limits_{|y|\le t}\varphi\left(\frac{y}{t}\right)|f(x-y)|dy + \frac{1}{t^n}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{F}\varphi\left(\frac{|y|}{t}\right)|f(x-y)|dy \le$$

$$\le C\left(\frac{1}{|B_t(0)|}\int\limits_{B_t(0)}|f(x-y)|dy\cdot\varphi(0) + \frac{1}{t^n}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(2^k\right)\int\limits_{|y|<2^{k+1}t}|f(x-y)|dy\right) \le$$

$$\le C\left(Mf(x) + \sum_{k=1}^{\infty}|B_{2^{k+1}t}(0)|\cdot\frac{1}{|B(2^{k+1}t)(0)|}\cdot\int\limits_{B_{2^{k+1}t}(0)}|f(x-y)|dy\cdot\varphi\left(2^k\right)\right) \le$$

$$\le CMf(x)\left(\varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{k+1}\right)^d\cdot\varphi\left(2^k\right)\right) \le C'Mf(x)\left(\varphi(0) + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(|x|)dx\right).$$

$F = \{y \in \mathbb{R}^n :\ 2^k t < |y| < 2^{k+1}t\}$. □

Пример:

1. $u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Тогда такая φ существует. Действительно, носитель u лежит в некотором шаре радиуса R. Легко построить функцию, равную единице на отрезке $[0, R]$ и имеющую компактный носитель. Домножив её на $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)$ получим нужную φ.
2. Ядро Пуассона. Такая функция сама по себе радиальна и суммируема.

$$u(x) = \frac{C}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}},\quad u_t(x) = \frac{Ct^n}{\left(t^2+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

3. Гаусово ядро $u(x) = e^{-\pi|x|^2}$.

10.3. Случай окружности

$$M_{\mathbb{T}}f(\zeta) = \sup_{I\ni\zeta}\frac{1}{|I|}\int\limits_I|f(\tau)|d\tau,$$

где I – дуги с центром в ζ.

Теорема 19: $|\{M_{\mathbb{T}}f > \alpha\}| \le \frac{C}{\alpha}\cdot\|f\|_{L^1(\mathbb{T})},\quad \alpha > 0.$

Доказательство: Периодично продолжаем функцию на отрезок $[-3\pi, 3\pi]$, на остальной части ноль. Получившаяся функция $\tilde{f}$ лежит в $L^1(\mathbb{R})$, более того,

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \le 3\|f\|_{L^1(\mathbb{T})},\quad M\tilde{f} \ge M_{\mathbb{T}}f,$$

$$|\{M_{\mathbb{T}}f > \alpha\}| \le \left|\left\{M\tilde{f} > \alpha\right\}\right| \le \frac{C}{\alpha}\left\|\tilde{f}\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \frac{3C}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

□

Рассмотрим $P_r(s) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos s + r^2}$ – ядро Пуассона.
Нас будут интересовать свёртки $(f * P_r)(x)$ и сходятся ли они к f. Для сходимости достаточно доказать, что

$$\sup_{r\in[0,1)} |f * P_r(-)| \le C M_{\mathbb{T}} f(-).$$

$$P_r(s) = (1+r)\cdot \frac{1-r}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos s)} = (1+r)\cdot \frac{1-r}{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{s}{2}}.$$

Видно, что штука выше напоминает ядро Пуассона для полуплоскости: $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{t}{t^2+x^2}$. Положим $t = 1-r$.

$$P_r(s) \le C\cdot \frac{t}{t^2+s^2}.$$

Тем самым, искомая сходимость действительно есть, если $f \in L^1(\mathbb{T})$. Теперь ответим на тот же вопрос для ядер Фейера.

$$\Phi_N(s) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)s}{\sin\frac{s}{2}}\right)^2 \le C\cdot \begin{cases} N+1 \\ \frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{s^2}\end{cases} \le C\cdot \frac{\frac{1}{N+1}}{\frac{1}{(N+1)^2}+s^2}, \quad t = \frac{1}{N+1}.$$

$$\sup_N |f * \Phi_N| \le C M_{\mathbb{T}} f.$$

11. Многообразия и дифференциальные формы

В связи с тем, что в третьем семестре времени у нас было мало, мы не успели пройти такие важные вещи. В общем сейчас это упущение наверстаем. Суть проста – интеграл по границе многообразия выражается через интерграл по всему многообразию.

Пример: Пусть Γ это стандартно ориентированная граница прямоугольника $[a,b]\times[c,d]$, $\Phi = f dx + g dy$ – дифференциальная форма. Тогда

$$\int_\Gamma \Phi = \int_\Gamma f dx + g dy = \int_a^b f(s,c)ds - \int_a^b f(s,d)ds + \int_c^d g(b,t)dt - \int_c^d g(a,t)dt =$$

$$= -\int_a^b \int_c^d = \text{бля ну нахуя сразу стирать}$$

$$\int_\Gamma \Phi = \iint_P (\partial_1 g - \partial_2 f)$$

Общая формула Стокса выглядит так:

$$\boxed{\int_G d\Omega = \int_{\partial G} \Omega}$$

где Ω – внешняя дифференциальная форма, d – внешний дифференциал, G – ориенируемое многообразие с краем ∂G, $\dim G = k$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$.
Тут разгон про дифференциальные формы, который я не записал.

Абоба