

# ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Андрей Вячеславович Семёнов

КОНСПЛЕКТ ЗА АВТОРСТВОМ ПАВЛА ЦЫГАНЕНКО И ЛЬВА МУКОСЕЕВА

## Содержание

<b>1. Кольца и модули .....</b>	<b>1</b>
1.1. Групповые алгебры .....	1
1.2. Радикал алгебры .....	2
1.3. Радикал модуля .....	3

## 1. Кольца и модули

### 1.1. Групповые алгебры

**Определение 1:** Групповая алгебра группы  $G$  над полем  $k$ :

$$kG = \langle \{e_g \mid g \in G\} \rangle_k$$

То есть её элементы – формальные комбинации вида  $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ , где ненулевых  $\alpha$  конечное число. Сложение и умножение задаются следующим образом:

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$\left( \sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \cdot \left( \sum_{g \in G} \beta_g g \right) = \sum_{g \in G} \left( \sum_{xy=g} \alpha_x \beta_y \right) g.$$

Пока я не разберусь как нормально писать  $_R M$ , буду писать  $M_R$  вне зависимости от того, правый модуль или левый.

**Определение 2:** Модуль  $M_R$  называется простым, если он не содержит нетривиальных собственных подмодулей.

**Определение 3:** Модуль  $M_R$  называется полупростым, если любой его подмодуль выделяется прямым слагаемым.

То есть  $\forall N \leqslant M : \exists P \leqslant M : M = M \oplus N$ .

Замечание:

1.  $M$  полупрост  $\iff M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ , где все  $M_i$  простые.
2. Кольцо называется полупростым, если оно полупросто как левый модуль над собой. Без доказательства скажем, что это эквивалентно тому, что любой  $R$ -модуль полупрост.

Следующую теорему вам должны были доказать в школьном курсе по некоммутативным кольцам.

**Теорема 1** (Веддерберна – Артина): Если  $R$  артиново, то

$$R \text{ – полуупростое} \iff R = \prod_{j \in I} M_{n_j}(D_j), \quad D_j \text{ – тела.}$$

То есть полуупростое артиново кольцо разлагается в прямое произведение матричных колец над телами, и в предположении артиновости обратное тоже верно.

**Теорема 2** (Машке): Пусть  $k$  – поле,  $|G| < \infty$ ,  $\text{char } k = 0$  или  $\text{char } k \nmid |G|$ . Тогда  $kG$  – полуупростая алгебра.

*Доказательство:* Покажем, что произвольный модуль  $M$  над  $kG$  полуупрост.

Рассмотрим  $N \leq M$  и стандартные отображения

$$N \rightarrowtail M \xrightarrow{\tilde{\pi}} N.$$

Определим усреднение  $\tilde{\pi}$ :

$$\pi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\tilde{\pi}(g^{-1}x).$$

- $\pi$  –  $kG$ -линейный гомоморфизм. Действительно, для  $h \in G$  проверим, что  $\pi(hx)h\pi(x)$ , а остальное и так понятно.

Обозначим  $t = h^{-1}g$ , тогда

$$\pi(hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\tilde{\pi}(g^{-1}hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} ht\tilde{\pi}(t^{-1}x) = h\pi(x).$$

- $N$  неподвижен под действием  $\pi$ . Действительно, если  $x \in N$ , то  $g^{-1}x \in N$  и  $\tilde{\pi}(g^{-1}x) = g^{-1}x$ , так что теперь всё ясно.

Тем самым,  $M = N \oplus \text{Ker } \pi$ .

## 1.2. Радикал алгебры

Далее под  $A$  подразумевается конечномерная алгебра над полем  $k$ .

**Определение 4:** Радикалом  $J(A)$  называется сумма всех двухсторонних нильпотентных идеалов.

**Теорема 3:**

1.  $J(A)$  – нильпотентный идеал в  $A$ .
2. Любой нильпотентный идеал лежит в  $J(A)$ .
3.  $J(A/J(A)) = 0$

*Доказательство:*

1. Во-первых, сумма двух нильпотентных двухсторонних идеалов тоже нильпотентный двухсторонний идеал. Действительно, если  $I_1^{n_1} = 0$  и  $I_2^{n_2} = 0$ , то  $(I_1 + I_2)^{n_1+n_2}$  порождается всеми произведениями длины  $n_1 + n_2$  элементов из  $I_1 + I_2$ , но раскрывая скобки получится либо не менее  $n_1$  множителей из  $I_1$ , либо не менее  $n_2$  из  $I_2$ , а значит  $(I_1 + I_2)^{n_1+n_2} = 0$ . Понятно, что вместо  $n_1 + n_2$  можно было взять  $\max(n_1, n_2)$ .  
Во-вторых, можно считать, что в сумме из определения  $J(A)$  конечное число идеалов, потому что алгебра конечномерна.
2. Если идеал двухсторонний, то всё ясно. Допустим  $I$  – левый идеал и  $I^k = 0$ . Тогда  $IA$  – двухсторонний. Покажем, что  $IA \subseteq J(A)$  и так как алгебра с единицей, из этого будет следовать искомое.

$$(IA)^k = I(\underbrace{AI \dots AI}_{k-1})A \subseteq I^k A = 0.$$

1. Рассмотрим двухсторонний нильпотентный идеал  $\bar{I}$  в  $A/J(A)$ . Пусть  $\bar{I}^k = 0$ . Тогда  $I^k \subseteq J(A)$ . По первому пункту теоремы  $J(A)$  нильпотентен, скажем,  $J^n(A) = 0$ .

$$I^{kn} \subseteq J^n(A) = 0 \implies I^{kn} = 0.$$

По второму пункту  $I$  лежит в  $J(A)$ , а значит  $\bar{I} = 0$ .

Факт:  $A$  полупроста  $\iff J(A) = 0$ .

### 1.3. Радикал модуля

Сейчас мы будем работать с модулями над конечномерной алгеброй над полем.

**Определение 5:** Радикалом модуля  $M$  называется пересечение всех его максимальных подмодулей и обозначается как  $\text{Rad } M$ .

**Лемма 1:**  $M$  полупрост  $\implies \text{Rad } M = 0$ .

*Доказательство:* Допустим существует  $x \in \text{Rad } M \setminus \{0\}$ . Как и всякий подмодуль,  $Ax$  можно выделить в прямую сумму:  $M = A \oplus U$ . Если рассмотреть стандартный эпиморфизм  $A \rightarrow Ax : 1 \mapsto x$ , то станет очевидно, что  $Ax \cong A/\text{Ann } x$ . Вложение  $\text{Ann } x$  в максимальный идеал  $I$ , его содержащий, индуцирует эпиморфизм  $A/\text{Ann } x \twoheadrightarrow A/I$ , причём  $S := A/I$  – простая алгебра. Имеем

$$M \xrightarrow{\pi} M/U \cong Ax \cong A/\text{Ann } x \xrightarrow{f} S,$$

так что будем считать, что  $f\pi : M \rightarrow S$ . Положим  $N := \text{Ker } f\pi$ , тогда так как  $M/N \cong S$ , то  $N$  – максимальный подмодуль.  $U \subseteq N$  по построению и  $x \in N$  по определению радикала. Тогда  $M = Ax + U \subseteq N$ . Противоречие.

Замечание: Мы не пользовались конечномерностью, так что на самом деле это верно для модулей над любым ассоциативным кольцом с единицей.

Перед тем как доказать следующую теорему, упомянем факт, который на лекции был дан как упражнение.

**Предложение 1:**  $X \leqslant \text{Rad } M \Rightarrow \text{Rad } \frac{M}{X} = \frac{\text{Rad } M}{X}$ .

Доказательство: Просто факт о том, что максимальные подмодули фактора  $\overline{\mathfrak{M}} \leqslant \frac{M}{X}$  соответствуют максимальным подмодулям  $X \subseteq \mathfrak{M} \leqslant M$ .

**Теорема 4:**  $\text{Rad } M = J(A)M$ .

Доказательство: Допустим, что включение  $\text{Rad } M \supseteq J(A)M$  уже доказано. Обозначим за  $\overline{A} := A/J(A)$ . Теорема 3 утверждает, что алгебра  $\overline{A}$  полупроста. Рассмотрим  $\overline{M} := M/J(A)M$ , который в силу  $\text{Ann } M \supseteq J(A)$  является  $\overline{A}$ -модулем. По замечанию о полупростоте кольца,  $M$  является полупростым модулем, из чего по предложению 1 следует, что  $\text{Rad } M \subseteq J(A)M$ .

Докажем включение в обратную сторону.

### SCAM ALERT

В этом месте Семенов решил заскамить аудиторию!  
Ведутся работы по устранению скама, сохраняйте  
спокойствие!