

# Домашнее задание №1 по курсу «Машинное обучение»: ОСНОВЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Колесов Алексей

3 сентября 2019 г.

На проверку необходимо прислать pdf-файл.

## 1 Задания

1. Пусть  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  — обратимая функция, а  $X$  — случайная величина. Докажите, что если для любого  $t > 0$   $\mathbb{P}[X > t] \leq f(t)$ , то для любого  $\delta > 0$  с вероятностью как минимум  $1 - \delta$  выполняется, что  $X \leq f^{-1}(\delta)$ .
2. На лекции мы рассмотрели вот такой классификатор:

$$h_S(x) = \begin{cases} y_i & \text{если } \exists i \in [m] \text{ такой что } x_i = x \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Пусть  $X = \mathbb{R}$ . Рассмотрим класс **пороговых полиномиальных классификаторов**:

$$h_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \geq 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Докажите, что в классе  $h_p$  найдётся классификатор, совпадающий с  $h_S$ . Какой вывод можно сделать о ERM-парадигме в классе пороговых полиномиальных классификаторов?

3. Это задание о **прямоугольниках со сторонами, параллельными осям координат**. Такой классификатор выглядит следующим образом:

$$h_{a_1, b_1, a_2, b_2}((x_1, x_2)) = \begin{cases} 1 & \text{если } a_1 \leq x_1 \leq b_1 \text{ и } a_2 \leq x_2 \leq b_2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Будем считать, что выполнено предположение о реализуемости.

Пусть алгоритм  $A$  выбирает наименьший прямоугольник, содержащий все точки положительного класса. Докажите, что  $A$  является реализацией ERM-алгоритма

4. Пусть  $X = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , а классификаторы:

$$h_r((x_1, x_2)) = \begin{cases} 1 & \text{если } x_1^2 + x_2^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Предложите полиномиальный от длины выборки алгоритм нахождения ERM-гипотезы

5. **Бонус:** предложите решение для предыдущей задачи, если центр круга, задаваемого классификатором, может находиться в любой точке, а не только в начале координат.