ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.И.Полякова Л.П.Постникова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Утверждено
редсоветом института
в качестве учебного пособия

Москва 1994

УДК 517.21

П о л я к о в а Е.И., П о с т н и к о в а Л.П. **Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике.** М.: МИФИ, 1994. – 76 с.

Содержит набор задач для проведения занятий по основным темам курса "Теория вероятностей и элементы математической статистике".

Предназначен для студентов, изучающих курс теории вероятностей только один семестр, и преподавателей.

Для удобства студентов и преподавателей задачи разбиты по темам курса с небольшим теоретическим вступлением. Необходимые ссылки на теоретический материал (определения, теоремы и т.д.) приведены по учебнику В.П.Чистякова [1]. При написании использовались пособия [2] и [3], в которых разобрано большое число задач, что будет полезно при самостоятельной работе студентов.

© *Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет), 1994*

ISBN 5-7262-0016-0

§ 1. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

При решении задач по теории вероятностей необходимо иметь четкое представление о таких понятиях, как **пространство элементарных событий, случайное событие** (или просто событие), **алгебра событий, вероятность** (аксиомы вероятности и вытекающие из них свойства) ([1], гл.1). Классическое определение вероятности дано в работе [1] на с.24.

Пусть $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,..,\omega_N\}$ - пространство элементарных событий, а $\mathcal{F}$ – алгебра событий, содержащая все 2^N подмножеств $A=\{\omega_{i1},\omega_{i2},..,\omega_{ik}\}$ множества Ω. В классическом определении вероятности полагают, что $P(\omega_i)=\frac{1}{N}$, $i=1,2,...N$ (т.е. все элементарные события равновозможны). Поэтому вероятность $P(A)$ события $A=\{\omega_{i1},\omega_{i2},...,\omega_{ik}\}$ равна отношению числа элементарных событий ω_i, входящих в A, к общему числу элементарных событий в Ω:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{k}{N}. \qquad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем число элементов любого конечного множества B будем обозначать $|B|$ ([1], гл.2, § 1). При вычислении вероятностей различных событий, связанных с экспериментами, имеющими конечное число исходов, важную роль играют методы комбинаторики.

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий расположение объектов в соответствии со специальными правилами и методы подсчета числа всех возможных способов, которыми эти расположения могут быть сделаны.

Основной принцип комбинаторики (правило умножения): если некоторый выбор A можно осуществить m различными способами, а для каждого из этих способов некоторый другой выбор B можно осуществить n способами, то выбор A и B (в указанном порядке) можно осуществить $m \times n$ способами.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий основной принцип комбинаторики.

Пример 1.1. В розыгрыше первенства страны по футболу принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали?

Решение. Золотую медаль может получить одна из 16 команд. После того как определен владелец золотой медали, серебряную может иметь одна из 15 команд. Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены золотая и серебряная медали, равно 16х15=240.

Рассмотрим теперь несколько примеров описания структуры конечного пространства элементарных событий.

Пусть из урны, содержащей n перенумерованных шаров, выбирают m шаров.

Пример 1.2 (выбор с возвращением). Так называют опыт, в котором на каждом шаге извлеченный шар возвращается обратно. В этом случае каждая выборка из m шаров символически может быть записана в виде $(a_1,a_2,...,a_m)$, где a_i – номер шара, извлеченного при i-м шаге, очевидно, каждое a_i может принимать любое из n значений 1, 2,...,n.

Описание пространства элементарных событий существенно зависит от того, считаем ли мы выборки тождественного состава, но отличающиеся порядком следования элементов (как скажем, (3,2,1,1) и (1,2,3,1)) различными или одинаковыми.

В связи с этим принято различать два типа выборки: упорядоченные и неупорядоченные. В первом типе выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но отличающиеся порядком следования этих элементов, объявляются различными. Во втором типе порядок следования элементов не принимается во внимание, и такие выборки объявляются тождественными. Для того, чтобы различать эти типы, будем употреблять обозначения: $(a_1,a_2,..,a_m)$ – упорядоченная выборка; $[a_1,a_2,..,a_m]$ – неупорядоченная выборка (таблица).

Таблица

Структура соответствующих пространств элементарных событий для $n=3$, $m=2$

Выборки		Выбор
упорядоченные	неупорядоченные	
$N_1=3^2=9$ (1,1) (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)	$N_2=C_4^2=6$ [1,1], [1,2], [1,3], [2,2], [2,3], [3,3]	с возвращением
$N_3=A_3^2=6$ (1,2), (1,3), (2,1) (2,3), (3,1), (3,2)	$N_4=C_3^2=3$ [1,2], [1,3], [2,3]	без возвращения

Тогда в случае упорядоченных выборок пространство элементарных событий Ω имеет следующую структуру:

$$\Omega_1=\{\omega=(a_1,a_2,..,a_m), a_i=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}\}$$

и число (различных) исходов:

$$|\Omega_1|=n^m=N_1 \tag{1.2}$$

Если же рассматриваются неупорядоченные выборки, то

$$\Omega_2=\left\{\omega=[a_1,a_2,..,a_m], a_i=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}\right\}$$

и

$$|\Omega_2|=C^m_{n-1+m}=N_2 \tag{1.3}$$

Пример 1.3 (выбор без возвращения). Пусть $m \le n$, и извлеченный шар обратно не возвращается. При этом также рассматриваются упорядоченные и неупорядоченные выборки.

В первом случае (упорядоченные выборки) пространство элементарных событий:

$$\Omega_3 = \{\omega = (a_1, a_2, ..., a_m), a_i, a_j = \overline{1,n},\ i,j = \overline{1,m} \\ i \ne j \to a_i \ne a_j\}, \tag{1.4}$$
$$|\Omega_3| = n(n-1)...(n-m+1) = A_n^m = N_3.$$

Во втором (неупорядоченные выборки):

$$\Omega_4 = \{\omega = [a_1, a_2, ..., a_m], a_i, a_j = \overline{1,n},\ i,j = \overline{1,m}; \\ i \ne j \to a_i \ne a_j\}, \tag{1.5}$$
$$|\Omega_4| = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m = N_4.$$

В заключение рассмотрим три комбинаторных результата о распределении различимых и неразличимых частиц по ячейкам (уровням), играющих важную роль в статистической физике.

1. Предположим, что m **различимых** частиц распределяются по n ячейкам (областям пространства, энергетическим уровням). Тогда число всех возможных размещений частиц равно n^m **(модель Максвелла-Больцмана).** Все возможные размещения в этом случае могут быть описаны наборами $(a_1, a_2, ..., a_m)$, где a_i – номер ячейки, занятой i-й частицей ($a_i = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}$).

2. Пусть m **неразличимых** частиц распределяются по ячейкам. Тогда число всех возможных расположений частиц равно C_{n-1+m}^m (модель Бозе-Эйнштейна). Эта модель описывается наборами $[a_1, a_2, ... a_m]$, где a_i – номера ячеек, занятых частицами ($i = \overline{1,m}$). Совпадение $a_k = a_e$ означает, что две частицы находятся в одной и той же ячейке с номером $a_k (a_k = \overline{1,n})$.

3. Если же частицы **неразличимы** и подчиняются **принципу запрета** Паули, т.е. на одном уровне (в одной ячейке) не может находиться более одной частицы, то число всех возможных размещений частиц равно C_n^m (модель Ферми-Дирака). Здесь возможные размещения описываются наборами $[a_1, a_2, ... a_m]$, где a_i – номера ячеек, занятых частицами $i = \overline{1,m}$. Условие запрета Паули означает, что $a_i \ne a_j \forall i,j = \overline{1,m}$, т.е. две частицы не могут попасть в одну ячейку ($a_i = \overline{1,n}$).

Известно, например, что электроны, протоны и нейтроны подчиняются статистике Ферми-Дирака, фотоны и пи-мезоны – статистике Бозе-Эйнштейна.

При выборе пространства элементарных событий Ω особое внимание следует обращать на то, чтобы все элементарные события, действительно, были равновероятными.

Пример 1.4. Числа 1,2,..., n расставлены случайным образом. Найти вероятность события $A = \{$ три фиксированных числа l, r, k окажутся рядом $\}$.

Решение. В этой задаче элементарными исходами опыта (случайной расстановки чисел) являются различные перестановки этих чисел. Мы имеем схему выбора без возвращения, упорядоченный выбор. Число таких перестановок $n!$ согласно (1.2) и все они равновероятны (числа расставлены случайным образом). Но нас интересует лишь взаимное расположение трех чисел l, r и k. Поэтому все перестановки с фиксированным расположением чисел l, r, и k (например, на i-м месте, на j-м месте и s-м местах от начала) объединяем в одно новое "элементарное" событие (i, j, s). Каждое такое событие содержит $6 \cdot (n-2)!$ прежних элементарных событий, так как на выбранных трех местах числа l, r и k можно расположить $3! = 6$ различными способами, а при каждом из этих шести расположений l, r и k остальные (n-3) числа в одно "объединенное" могут быть расставлены (n-2)! способами. Таким образом, согласно (1.1) получаем $P(A) = \frac{6(n-2)!}{n!} = \frac{6}{n(n-1)}$.

Примечание. Можно ограничиться рассмотрением только трех мест (i, j, s) для чисел l, r, k и тогда

$$\Omega=\{\omega=(i,j,s),\ 1\le i<j<s\le n\},|\Omega|=C_n^3$$

и

$$A=\{\omega=(i,i+1,i+2),\ 1\le i\le n-2\},|A|=n-2,$$

и согласно (1.1)

$$P(A)=\frac{n-2}{C_n^3}=\frac{6}{n(n-1)}.$$

ЗАДАЧИ

1. Верно ли утверждение "из $A+B=B$ следует $A=\varnothing$": а) для любых A и B; б) для несовместных A и B?

2. При каких условиях возможно равенство $AB=A+B$?

3. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. Событие A_i состоит в том, что i-й блок первого типа исправен ($i=1,2$); событие B_j – в том, что исправен j-й блок второго типа ($j=1,2,3$). Прибор работает, если исправен хотя бы один блок первого типа и хотя бы два блока второго типа. Событие D состоит в том, что прибор работает. Выразить D и $\bar{D}$ через события $A_i, \bar{A}_i, B_j, \bar{B}_j$.

4. Сколько раз нужно бросить пару игральных костей для того, чтобы появление хотя бы при одном бросании 12 очков имело вероятность большую одной второй?

5. На десяти карточках написаны буквы А, Г, И, Л, О, П, Р, Т, У, Я. Какова вероятность, расположив эти карточки в произвольном порядке, получить слово ПОРТУГАЛИЯ?

6. В урне m белых и n черных шаров. Из урны извлекают два шара: а) одновременно, б) последовательно с возвращением. Каковы вероятности, что оба извлеченных шара окажутся: белыми, черными, разных цветов?

7. В урне m белых и n черных шаров. Из урны вынимают все шары подряд. Какова вероятность того, что k-м будет извлечен белый шар?

8. Выписано три случайные цифры. Найти вероятности событий: A – все выписанные цифры одинаковы; B – все выписанные цифры различны; C – среди выписанных чисел ровно два совпадают.

9. Найти вероятности того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

10. Сравнить вероятности событий: A – при одновременном бросании четырех костей выпала хотя бы одна "1"; B – при 24 бросаниях двух костей выпали хотя бы один раз две "1".

11. События A, B, C удовлетворяют условиям $P(A)=P(B)=$ $=P(C)=P$; A, B, C – попарно независимы (для любой пары из этих событий вероятность произведения событий равна произведению их вероятностей), $ABC=\varnothing$. Вычислить p, если: а) $P(A+B+C)=\frac{3}{4}$; б) $P(A+B+C)=1$.

12. В урне m белых и n черных шаров. Два игрока поочередно вынимают шар и каждый раз возвращают его обратно. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Какова вероятность того, кто начинает? Справедливы ли условия игры?

13. На десяти карточках написаны буквы А, А, А, А, Г, Д, К, М, Р, С. Какова вероятность, расположив эти карточки в произвольном порядке, получить слово МАДАГАСКАР?

14. Доказать, что для любых событий A, B, C $A+B+C=$ $=A+B\bar{A}+C\bar{A}\bar{B}$. Выразить $P(A+B+C)$ через вероятности событий A, B, C, AB, AC, BC, ABC.

15. Судно имеет рулевое устройство, четыре котла и две турбины. Событие A означает исправность рулевого устройства; событие B_i – исправность i-го котла, $i=1,2,3,4$; событие C_j – исправность j-й турбины, $j=1,2$. Событие, состоящее в том, что судно управляемо, имеет место в том случае, когда исправно рулевое устройство, хотя бы один котел и хотя бы одна турбина. Выразить события D и $\bar{D}$ через $A, \bar{A}, B_i, \bar{B}_i, C_j, \bar{C}_j$.

16. На n креслах случайно рассаживаются n человек. Какова вероятность того, что два заранее указанных лица окажутся рядом, если: а) кресла расположены в ряд; б) кресла расположены вкруг?

17. В секции гимнастов факультета занимаются по два человека от каждой из 5 групп первого и второго курса. В

команду случайным образом взято 5 человек. Какова вероятность, что все они с одного курса и из разных групп?

18. В урне 20 красных шаров, 9 зеленых и 1 синий. По схеме случайного выбора с возвращением последовательно взято пять шаров. Какова вероятность того, что среди взятых 2 зеленых, 2 красных и 1 синий шар?

19. Для проведения очередного этапа чемпионата мира по футболу 36 национальных сборных команд разбиты на 6 групп по 6 команд в каждой. Найти вероятность того, что команды Литвы и Латвии окажутся в третьей группе, а команды Эстонии и России соответственно в первой и пятой группах.

20. В группе спортсменов, едущих на сборы, 4 гимнаста, 4 стрелка, 4 боксера и 4 пловца. Для них взяты билеты в 4 купе одного вагона, которые распределяются случайным образом. Найти вероятности событий: A – в каждом купе едут спортсмены, занимающиеся разными видами спорта; B – в каждом купе едут спортсмены, занимающиеся одним видом спорта.

§ 2. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Встречающиеся в формулировках задачи выражения "точка M случайно выбрана из множества Ω", "точка M равномерно распределена на множестве Ω" всегда означают, что вероятность попадания точки M в некоторое подмножество A множества Ω следует вычислять по формуле:

$$P(A) = \frac{\mathrm{mes}\,A}{\mathrm{mes}\,\Omega}, \tag{2.1}$$

где $\mathrm{mes}\,A$ и $\mathrm{mes}\,\Omega$ соответственно меры множеств A и Ω ([1], гл.2, § 3, с.30).

Пример 2.1. В квадрате со стороной 2 случайно выбрана точка M. Какова вероятность, что ее расстояние до ближайшей вершины больше 1?

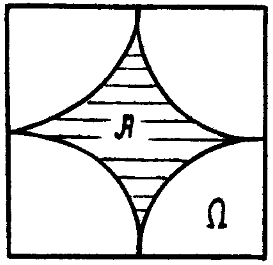

Рис.1

Решение. Пространством элементарных событий является множество точек квадрата Ω со стороной 2 (рис.1). Проведем окружности радиуса 1 с центрами в вершинах квадрата. Расстояние от случайно выбранной в квадрате точки M до ближайшей вершины квадрата будет больше 1, если точка M попадет в заштрихованную часть квадрата (это и есть интересующее нас событие A). Мера в данном случае есть площадь и очевидно, что $\mathrm{mes}\,\Omega = 4$, $\mathrm{mes}\,A = 4 - \pi$.

По формуле (2.1) получаем

$$P(A)=\frac{4-\pi}{4}.$$

В задачах этого параграфа используются понятия "условной вероятности события B при условии, что событие A произошло" (обозначается $P(B/A)$), "независимости событий A и B", а также связанные с этими понятиями формула полной вероятности и формула Байеса ([1], гл.3, §§ 1,2,3).

Пример 2.2. Из множества двузначных чисел случайно выбирается одно число. Найти условную вероятность того, что произведение его цифр делится на 15, если известно, что сумма его цифр делится на 7.

Решение. Пусть A = {сумма цифр случайно выбранного двузначного числа делится на 7}, B = {произведение цифр случайно выбранного двузначного числа делится на 15}. Надо найти $P(B/A)$. По определению "условной вероятности"

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{2.2}$$

В данной задаче

$\Omega = \{10,11,...,99\}$; $|\Omega| = 90$;

$A = \{16,25,34,43,52,59,61,68,70,77,86,95\}$;

$B = \{10,20,30,35,40,50,53,59,60,65,70,80,90,95\}$;

$AB = \{59,70,95\}$; $|A| = 12$, $|B| = 14$, $|AB| = 3$,

поэтому

$$P(B/A)=\frac{3/90}{12/90}=\frac{1}{4}.$$

Равенство (2.2) можно записать в виде "теоремы умножения":

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A). \tag{2.3}$$

Легко получить более общую формулу

$$P(A_1A_2...A_n)= \\ =P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1...A_{n-1}). \tag{2.4}$$

Формулы (2.3) и (2.4) позволяют вычислять вероятности произведения нескольких событий, если известны соответствующие условные вероятности.

Пример 2.3. Случайная точка (ξ_1,ξ_2) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$. При каких значениях r независимы события:

$$A_r=\{|\xi_1-\xi_2|\ge r\} \text{ и } B_r=\{\xi_1+\xi_2\le 3r\} \qquad \text{(рис.2)?}$$

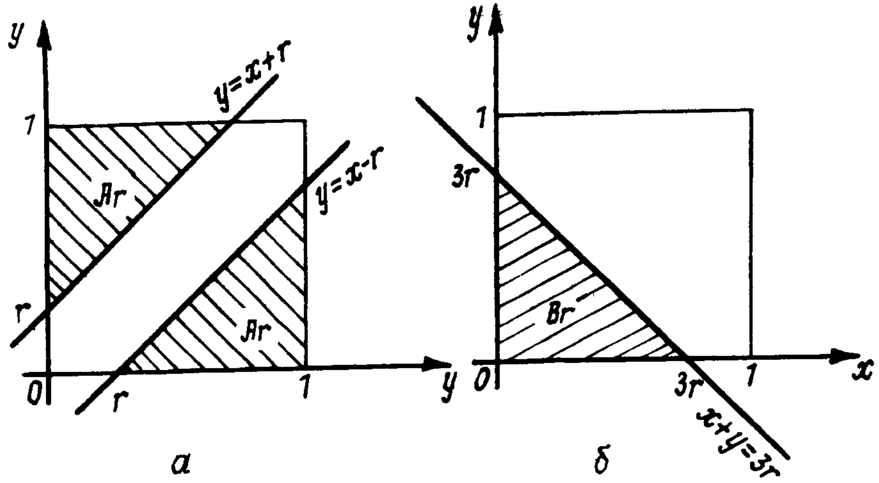

Рис.2

Решение. Используя схему геометрических вероятностей, найдем $P(A_r), P(B_r)$ и $P(A_rB_r)$:

$$P(A_r)=\begin{cases} 1, & r\le 0; \\ (1-r)^2, & 0<r\le 1; \\ 0, & r>1; \end{cases}$$

$$P(B_r)=\begin{cases} 0, & r\le 0;\\ \dfrac{9}{2}r^2, & 0<r\le\dfrac{1}{3};\\ 1-\dfrac{1}{2}(2-3r)^2, & \dfrac{1}{3}<r\le\dfrac{2}{3};\\ 1, & r>\dfrac{2}{3}; \end{cases}$$

$$P(A_rB_r)=\begin{cases} 0, & r\le 0;\\ 2r^2, & 0<r\le\dfrac{1}{3};\\ (1-r)^2-2(1-2r)^2, & \dfrac{1}{3}<r\le\dfrac{1}{2};\\ (1-r)^2, & \dfrac{1}{2}<r\le 1;\\ 0, & r>1; \end{cases}$$

A_r и B_r независимы, если

$$P(A_rB_r)=P(A_r)P(B_r).$$

При $r\le 0$, $P(A_rB_r)=P(A_r)P(B_r)$, так как $P(A_rB_r)=P(B_r)=0$. При $0<r\le\frac{1}{3}$, $P(A_rB_r)=P(A_r)P(B_r)$, если $2r^2=(1-r)^2\frac{9}{2}r^2$, т.е. $r=0$ или $r=\frac{1}{3}$. Если $\frac{1}{3}\le r\le\frac{1}{2}$, то $P(B_rA_r)=P(A_r)P(B_r)$ при $r=\frac{1}{3}$. Если $\frac{1}{2}<r\le\frac{2}{3}$, то $P(A_rB_r)=P(A_r)P(B_r)$ при $r=\frac{2}{3}$. При любом $r\in\left[\frac{2}{3},1\right]$, $P(A_rB_r)=P(A_r)P(B_r)$, так как $P(A_rB_r)=(1-r)^2, P(A_r)=(1-r)^2, P(B_r)=1$.

Наконец, при $r>1$ $P(A_rB_r)=0$, $P(A_r)=0$, $P(B_r)=1$. Таким образом, события A_r и B_r независимы при $r\le 0$, $r=\frac{1}{3}$, $r\ge\frac{2}{3}$.

Пример 2.4. По каналу связи с вероятностями соответственно 0,2; 0,4; 0,4 передается одна из последовательностей букв: ***AAAA***, ***BBBB***, ***CCCC***. Из-за помех каждая буква передаваемой последовательности (независимо от других букв) принимается правильно с вероятностью 0,8, а с вероятностями 0,1 и 0,1 принимается за любую другую букву. Найти вероятность того, что было передано ***AAAA***, если принято ***ABCA***.

Решение. Пусть A = {передано ***AAAA***}, B = {передано ***BBBB***}, C = {передано ***CCCC***}, D = {принято ***ABCA***}. Из условий задачи

$$P(A)=0{,}2;\ P(B)=P(C)=0{,}4;$$
$$P(D/A)=0{,}8^2\cdot 0{,}1^2;$$
$$P(D/B)=P(D/C)=0{,}8\cdot 0{,}1^3.$$

По формуле Байеса

$$P(A/D)=\frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(D)},$$

$P(D)$ находим по формуле полной вероятности:

$$P(D)=P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)=$$
$$=0{,}2\cdot(0{,}8)^2\cdot(0{,}1)^2+2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}8\cdot(0{,}1)^3=0{,}00192.$$

Далее,

$$P(A/D)=\frac{0{,}2\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}1^2}{0{,}00192}=\frac{2}{3};$$
$$P(B/D)=P(C/D)=\frac{1}{6}.$$

ЗАДАЧИ

1. На отрезок [0,1] наудачу брошена точка. Предположим, что ее координата ξ равномерно распределена на [0,1]. Найти функцию. $F(x)=P\{\xi<x\},(-\infty<x<\infty)$.

2. На отрезок [0,1] наудачу брошены 2 точки, разбившие его на 3 отрезка. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно построить треугольник? За множество Ω принять значения пары чисел (ξ_1, ξ_2), являющихся координатами точек на отрезке [0,1]; предположить, что точка (ξ_1, ξ_2) равномерно распределена на квадрате Ω.

3. Брошено две игральные кости. Какова вероятность того, что выпало две "3", если известно, что сумма выпавших очков делится на 3.

4. Брошено две игральные кости. События A – выпадание на первой кости "3", B – выпадание на второй кости "6", C – выпадание хотя бы одной "6". Зависимы или нет события: а) A и B, б) B и C ?

5. Упрощенная схема контроля изделий состоит из двух независимых проверок. В результате k-й проверки ($k=1,2$) изделие, удовлетворяющее стандарту, отбраковывается с вероятностью β_k, а бракованное изделие принимается с вероятностью α_k. Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. Найти вероятности событий: 1) бракованное изделие будет принято; 2) изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано.

6. Изделия поступают на проверку, описанную в задаче 5, предполагая, что каждое изделие удовлетворяет стандарту с вероятностью p, найти следующие вероятности: 1) вероятность того, что поступившее на проверку изделие не будет отбраковано; 2) вероятность того, что неотбракованное изделие удовлетворяет стандарту.

7. Вероятность поступления k вызовов на телефонную станцию за промежуток времени длительностью t равна $P_k(t)$. Считая количества вызовов за любые неперекрывающиеся промежутки времени независимыми, найти вероятности поступления S вызовов за промежуток времени длительностью $2t$.

8. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Случайно выбранный представитель из группы, состоящей из N мужчин и M женщин, оказался дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

9. Употребление стимуляторов роста s_1, s_2, s_3 дает определенный биологический эффект соответственно с вероятностями p_1, p_2, p_3. Поставлено n опытов, причем во всех был использован один и тот же стимулятор. Вероятности того, что был использован s_1, s_2, и s_3 равны соответственно W_1 W_2, W_3. Желаемый эффект имел место в m опытах. Какова вероятность, что был использован стимулятор S_1?

10. Случайная точка A с координатами (ξ_1, ξ_2) равномерно распределена в квадрате $\Omega=\{(x_1, x_2);\ 0\le x_i\le 1,\ i=1,2\}$. Найти функцию $F(x)=P\{\xi_1+\xi_2<x\}$, $F'(x)$, $x\in(-\infty, \infty)$.

11. Парадокс Бертрана. В круге радиуса R случайно проводится хорда. Обозначим ξ ее длину. Найти вероятность $P\{\xi>R\}$ того, что длина хорды больше стороны правильного вписанного шестиугольника, если: а) середина хорды равномерно распределена в круге; б) направление хорды задано, а ее середина равномерно распределена на диаметре, перпендикулярном ее направлению; в) один конец хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.

12. В коробке 12 новых теннисных мячей и 4 игранных. Из коробки наугад взяли 3 мяча. Какова вероятность того, что все эти мячи новые? После игры все мячи возвращают в коробку, а через некоторое время снова берут наугад три мяча. Какова вероятность того, что все эти мячи новые?

13. Прибор может перегореть только в момент срабатывания. Если он сработал k-1 раз, не перегорев, то условная вероятность перегореть при k-м срабатывании равна q_k. Найти вероятности следующих событий: A_n – прибор выдержит не менее n срабатываний; B_n – прибор выдержит не более n срабатываний; C_n – прибор выдержит ровно n срабатываний.

14. Электрическая цепь составлена из элементов A_k, $k=1,2,3$ (элементы A_1 и A_2 соединены параллельно, а A_3 присоединены

к ним последовательно). При выходе из строя любого элемента цепь в месте его включения разрывается. Вероятность выхода из строя за данный период времени элемента A_k равна p_k, $k=1,2,3$. Предполагается, что элементы выходят или не выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за рассматриваемый период по цепи будет проходить ток.

15. Самолет-разведчик посылается в район противника с целью уточнить координаты объекта, который предполагается подвергнуть обстрелу ракетами. Для поражения объекта выделено три ракеты.

При уточненных координатах объекта вероятность его поражения каждой ракетой равна 0,9; при неуточненных 0,8. Разведчик перед выходом в район объекта может быть сбит с вероятностью 0,5. Если он не сбит, то сообщает координаты объекта по радио, которые принимаются с вероятностью 0,8. Найти вероятность поражения объекта.

16. Два орудия открыли стрельбу по наступающему танку. Стрельба ведется поочередно с интервалом в 10 с. За каждые 10 секунд вероятность попадания для каждого орудия увеличивается на 0,05. Вероятность попадания в танк при открытии огня у первого орудия 0,3, а у второго 0,4.

После пяти выстрелов обнаружено, что танк получил одну пробоину, но неизвестно, при каком выстреле. Найти вероятность того, что первым открыло огонь второе орудие.

17. Вероятность того, что молекула, испытавшая в момент $t=0$ столкновение с другой молекулой и не имевшая других столкновений до момента t, испытает столкновение в промежуток времени $(t, t+h)$, равна $\lambda h+o(h), h\to 0$. Найти вероятность того, что время свободного пробега будет больше t.

18. На одну телефонную линию могут поступить вызовы двух типов: срочные и простые. При поступлении срочного вызова разговор по простому вызову прекращается. Вероятности поступления за время $(t, t+h)$ срочного и обычного вызовов равны соответственно $\alpha_1 h+o(h)$; $\alpha_2 h+o(h)$, $h\to 0$. Вероятность прекращения любого разговора за время $(t, t+h)$ равна $\beta h+o(h)$. Пусть $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$ – вероятности того, что в момент t линия свободна, занята срочным вызовом, занята простым вызовом соответственно. Найти $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$, если $P_0(0)=1, P_1(0)=0$, $P_2(0)=0$.

19. На ЭВМ может решаться одна задача или две одновременно. Вновь поступающая задача в момент решения двух не принимается. Вероятность поступления одной задачи за время $h\to 0$ равна $\lambda h+o(h)$; $1-\lambda h+o(h)$ – вероятность непоступления ни одной задачи за время $h\to 0$. При решении одной задачи вероятность окончания ее решения за время $h\to 0$ равна $\mu h+o(h)$; при решении двух задач решение любой из них заканчивается с вероятностью $\frac{\mu}{2}h+o(h)$ независимо от другой. Пусть $P_k(t)$ – вероятность того, что в момент t решается k задач, $k = 0,1,2$. Найти $P_k(t)$, если $P_0(0)=1, P_1(0)=P_2(0)=0$.

20. На рис.3 приведена схема распада радиоактивного ядра. Стрелками отмечены возможные переходы, а рядом указаны их вероятности за время $h\to 0$. Пусть $P_k(t)$, $(k = 0,1,2)$ – вероятность того, что в момент t ядро находится на уровне k. Найти $P_k(t)$, если $P_1(0)=P_2(0)=0$; $P_0(0)=1$.

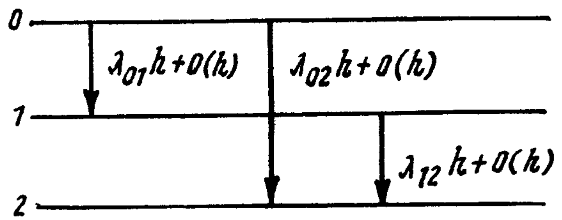

Рис.3

§ 3. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (СХЕМА БЕРНУЛЛИ), РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА, ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Всякая действительная функция $\xi=\xi(\omega)$, определенная на Ω (пространстве элементарных событий), такая, что для каждого действительного x множество $\{\omega;\xi(\omega)<x\}\in\mathcal{F}$, называется **случайной величиной** (см. [1] с.71).

По определению случайной величины следует, что $\{\omega:\xi(\omega)<x\}$ – событие при любых x, поэтому определена вероятность $P\{\omega:\xi(\omega)<x\}$.

Функция действительного переменного x, определенная по всей действительной оси равенством

$$F_\xi(x)=P\{\omega:\xi(\omega)<x\}, \tag{3.1}$$

называется **функцией распределения** случайной величины $\xi(\omega)$ (см. [1], с.71).

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Случайная величина $\xi(\omega)$ называется **дискретной,** если множество ее значений конечно или счетно (будем предполагать, что множество значений не имеет точек накопления).

Если конечное или счетное множество $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ – совокупность различных возможных значений, принимаемых

дискретной случайной величиной $\xi(\omega)$, то события $A_i=\{\omega:\xi(\omega)=x_i\}$ представляют разбиение пространства Ω (т.е. они попарно несовместны и их сумма равна Ω).

Набор вероятностей $p_i=P(A_i)$ называется **законом распределения** случайной величины $\xi(\omega)$. Заметим, что $p_i>0$ при всех i и $\sum\limits_i p_i=1$.

Из соотношения $\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\bigcup\limits_{(i:x_i<x)}\{\omega:\xi(\omega)<x_i\}\in\mathcal{F}$ следует, что дискретная случайная величина полностью определена своим распределением $\forall x\in(-\infty,\infty)$:

$$F(x)=P\{\xi<x\}=\sum_{i:x_i<x}P_i, \tag{3.2}$$

т.е. ее функция распределения кусочно-постоянна с конечным или счетным множеством точек разрыва первого рода.

Если $\xi(\omega)$ дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$, с вероятностями $p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots$, то ее **математическим ожиданием** или **средним значением** называется величина

$$M\xi=\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega)=\sum_k x_kP_k, \tag{3.3}$$

при условии, что ряды абсолютно сходятся (см. [1], с. 95).

Некоторые свойства математического ожидания (см.[I], с.100), непосредственно следующие из его определения:

1) $Mc=c$, c – постоянная;

2) $M(c\xi)=cM\xi$, c – постоянная;

3) если $\eta=h(\xi)$ – случайная величина и ряд $\sum\limits_k h(x_k)P_k$ абсолютно сходится, то

$$M\eta=Mh(\xi)=\sum_k h(x_k)P\{\omega:\xi(\omega)=x_k\}=\sum_k h(x_k)P_k. \tag{3.4}$$

Пример 3.1. Предположим, что производятся независимые испытания и при каждом испытании может быть два исхода: успех с вероятностью $P(0<p<1)$ или неуспех с вероятностью $q=1-p$. Испытания проводятся до первого появления успеха. Пусть $\xi(\omega)$ – число испытаний до первого появления успеха. Случайная величина $\xi(\omega)$ имеет **геометрическое распределение** $P\{\xi=k\}=q^k p,\ k=0,1,\ldots,$ математическое ожидание (среднее число испытаний до первого успеха) случайной величины $\xi(\omega)$ равно

$$M\xi=\sum_{k=0}^{\infty} kq^k p=qp\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}=qp/p^2=q/p.$$

(Здесь использовали соотношения: при $|x|<1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k=\frac{x}{1-x} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.)$$

Пример 3.2. Пусть $\xi(\omega)$ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ. Вычислить $M\frac{1}{\xi+1}$.

Решение. Используя свойство 3, получаем

$$M\frac{1}{1+\xi}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k}P\{\xi=k\}=\sum_{k=o}^{\infty}\frac{1}{1+k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=$$
$$=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda}-1)=\frac{(1-e^{-\lambda})}{\lambda}.$$

Для целых неотрицательных k величина $M\xi^k$, если она определена, называется **моментом k-го порядка.** В этом случае существует также величина $M|\xi|^k$, которая называется **абсолютным моментом k-го порядка.**

Моменты порядка k случайной величины $(\xi-M\xi)$ называются **центральными моментами порядка k.**

Пусть $\xi(\omega)$ – целочисленная неотрицательная случайная величина, для которой $P\{\xi(\omega)=k\}=p_k,\ k=0,1,2\ldots$ **Производящей функцией** $\varphi_\xi(z)$ величины $\xi(\omega)$ называется функция

$$\varphi_\xi(z)=Mz^\xi=\sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k, \tag{3.5}$$

определенная при комплексных z, для которых $|z|\le 1$ (см.[1], с.125). Используя формулы для коэффициентов ряда Тейлора, можно явно указать распределение $\{p_k\}$, соответствующее производящей функции $\varphi_\xi(z)$, а именно:

$$p_k=\frac{1}{k!}\varphi_\xi^{(k)}(0),\quad k=0,1,2,\ldots. \tag{3.6}$$

Зная производную функцию случайной величины $\xi(\omega)$, можно вычислить моменты случайной величины, **если они существуют.**

Факториальным моментом k-го порядка, $k=0,1,2,\ldots$, называется

$$M\xi^{[k]}=M\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1). \tag{3.7}$$

Для вычисления факториальных моментов пользуются формулой

$$M\xi^{[k]}=\varphi_\xi^{[k]}(1), \tag{3.8}$$

где $\varphi_\xi^{[k]}(z)$ – производная k-го порядка производящей функции.

Из этой формулы можно получить формулу для вычисления дисперсии (второго центрального момента случайной величины).

$$D\xi=M[\xi(\xi-1)+\xi]-(M\xi)^2=\varphi_\xi''(1)+\varphi_\xi'(1)-[\varphi_\xi'(1)]^2. \tag{3.9}$$

Пример 3.3. Пусть $\nu_n(\omega)$ – число успехов в серии n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Найти $D\nu_n$.

Решение. Так как случайная величина $\nu_n(\omega)$ имеет биномиальное распределение с параметрами (n,p), то ее производящая функция равна

$$\varphi_{\nu_n}(z) = Mz^{\nu_n} = \sum_{k=0}^{n} z^k C_n^k p^k q^{n-k} = (q+pz)^n;\ q = 1-p$$

(использовали формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Далее $M\nu_n = \varphi'_{\nu_n}(1) = np$, учитывая (3.9), получаем $D\nu_n = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = npq$.

ЗАДАЧИ

1. Монета бросается пять раз, $\mu_5(\omega)$ – число выпадений герба. Найти закон распределения случайной величины $\mu_5(\omega)$, производящую функцию, среднее значение и дисперсию.

2. Из урны, содержащей 5 белых и 5 черных шаров, извлекают наудачу n шаров. Найти наименьшее n, такое, что вероятность извлечь хотя бы один белый шар больше чем 0,8.

3. В каждом разряде лотереи $N=5000$ билетов, $M=500$ выигрышей. Какое наименьшее число билетов n надо купить, чтобы вероятность хотя бы одного выигрыша была больше чем 0,9? Сравнить результаты биномиального и пуассоновского приближений.

4. Автоматическая линия при нормальной настройке может выпускать бракованное изделие с вероятностью p. Сразу после появления брака производится переналадка линии. Найти среднее число хороших изделий, выпущенных между двумя последовательными переналадками линии.

5. Число $\nu(\omega)$ проведенных опытов может изменяться от 0 до $+\infty$, причем $p\{\nu(\omega)=k\} = \frac{a^k}{k!}e^{-a}$. Каждый опыт может оказаться успешным с вероятностью p. Найти закон распределения $\eta(\omega)$ – числа успешных опытов и математическое ожидание $M\eta$.

6. В лотерее всего N билетов. Разыгрываются m_i выигрышей стоимостью k_i рублей, $i=1,2,..m$. Сколько должен стоить билет, чтобы среднее значение выигрыша равнялось половине стоимости билета?

7. Случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы и распределены по закону Пуассона с параметрами, равными соответственно λ_1 и λ_2. Найти закон распределения величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

8. Двое бросают монету n раз. Найти вероятность того, что у них выпадет одинаковое число гербов.

9. Последовательно испытывают пять блоков. Вероятность выдержать испытание для каждого блока равна 0,9. Испытания прекращаются после первой неудачи. Найти закон распределения количества испытаний, среднее значение и дисперсию количества испытаний.

10. Из 36 карт взято шесть карт случайным образом. Найти закон распределения и среднее значение числа вынутых тузов.

11. В урне лежат N шаров, из них M белых и N-M черных. Два игрока вынимают по одному шару. Если шары разноцветные, то выигрывает игрок, доставший белый шар; если шары одноцветные, то их кладут обратно и повторяют розыгрыш. Пусть $\xi(\omega)$ – количество розыгрышей, потребовавшихся для определения победителя. Найти закон распределения $\xi(\omega)$ и $M\xi$.

12. Вероятность успеха в одном испытании $p=0{,}001$. Какова ~~потребность~~ вероят добиться по крайней мере два успеха при $n=5000$ независимых испытаниях? (Сравнить точную формулу с пуассоновским. приближением.)

13. В начале игры игрок A уплачивает игроку B S рублей. Затем бросают монету до первого появления герба. Если герб выпадает при k-м бросании, то B платит A k рублей. Каким должно быть S, чтобы игра была справедливой?

14. Дискретная случайная величина $\xi(\omega)$ принимает значения $x_k = 2^{k/2}$ с вероятностями $p_k = 2^{-k}$, $k = 1,2,\ldots$. Найти $M\xi$. и $D\xi$.

15. Случайная величина $\xi(\omega)$ принимает значения $x_k = (-1)^k k$ с вероятностями $p_k = c/k!$, $k = 0,1,2\ldots$. Вычислить $c, M\xi$ и $D\xi$.

16. Прибор, состоящий из трех блоков A, B_1, B_2 работает, если исправен блок A и хотя бы один из блоков B_1 и B_2. Космическая частица, попавшая в прибор, выводит из строя один и из его блоков с вероятностями $p_A = 0{,}5$; $p_{B_1} = p_{B_2} = 0{,}25$.

Предположим, что частицы попадают в прибор последовательно, и пусть $\nu(\omega)$ – номер частицы, которая выводит его из строя. Найти закон распределения $\nu(\omega)$.

17. A имеет две монеты, B – три монеты одного и того же достоинства. Каждый подбрасывает свои монеты. Выигрывает и забирает все монеты тот, у кого выпадет большее число гербов. В случае равенства числа выпавших гербов бросание повторяется до выявления победителя.

Пусть $\xi(\omega)$ – выигрыш игрока A, $\eta(\omega)$ – игрока B, $\nu(\omega)$ – число бросаний, потребовавшихся для выявления победителя. Найти законы распределения и средние значения введенных случайных величин.

18. Игральная кость бросается до выпадения пяти шестерок (не обязательно рядом). Найти закон распределения, среднее значение и дисперсию случайной величины $\xi(\omega)$ – числа бросаний игральной кости.

19. В коробке лежит N стержней для шариковых ручек, из них 1/6 красные, 1/2 черные, 1/3 синие. Случайным образом последовательно взято по одному n стержней по схеме выбора без возвращения. Найти закон распределения случайной величины $\nu(\omega)$ – числа стержней, взятых до появления первого синего стержня. Построить график функции распределения случайной величины $\nu(\omega)$: а) при $N=60$, $n=5$; б) при $N=12$, $n=10$.

§ 4. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. НОРМАЛЬНОЕ, РАВНОМЕРНОЕ, ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ФУНКЦИЯ ОТ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина $\xi(\omega)$ называется **абсолютно непрерывной,** если существует неотрицательная функция $p_\xi(x)$, называемая **плотностью распределения** $\xi(\omega)$, такая, что при любом действительном x

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(u)\,du. \tag{4.1}$$

Плотность распределения (если она существует) полностью определяет распределение случайной величины (см.[I], с.76-77), причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(u)\,du = 1;\ P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b p_\xi(u)\,du. \tag{4.2}$$

Если x является точкой непрерывности плотности распределения $p_\xi(x)$, то при $\Delta x \to 0$

$$P\{x \le \xi(\omega) < x + \Delta x\} = p_\xi(x)\Delta x + o(\Delta x). \tag{4.3}$$

Пример 4.1. Пусть рассматривается некоторый прибор, начавший работать в момент времени $t=0$. Предположим, что условная вероятность выхода прибора из строя в интервале времени $(t, t+\Delta t)$. При условии, что прибор не выйдет из строя до момента времени t, равна $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$. Пусть $\xi(\omega)$ – продолжительность безотказной работы прибора. Найти функцию распределения случайной величины $\xi(\omega)$.

Решение. Положим $Q(t)=P\{\xi\ge t\}$ (функция надежности). Тогда

$$Q(t+\Delta t)=P\{\xi\ge t\}\cdot P\{\xi\ge t+\Delta t/\xi\ge t\}=$$

$$=Q(t)[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)],$$

$$\frac{Q(t+\Delta t)-Q(t)}{\Delta t}=-\lambda Q(t)+Q(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим

$$\frac{dQ(t)}{dt}=-\lambda Q(t).$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение и принимая во внимание условие $Q(0)=1$, получим, что $Q(t)=e^{-\lambda t}$. Следовательно, функция распределения времени $\xi(\omega)$ безотказной работы прибора равна

$$F_\xi(t)=P\{\xi<t\}=1-Q(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

Плотность распределения случайной величины $\xi(\omega)$ равна

$$p_\xi(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

Пример 4.2. Найти распределение квадрата случайной величины, распределенной по стандартному нормальному закону (с параметрами 0 и 1).

Решение.

$$F_\eta(y)=P\{\omega:\eta(\omega)<y\}=P\{\omega:\xi^2(\omega)<y\}=$$

$$=\begin{cases}P\{\omega:|\xi|<\sqrt{y}\}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}P\{\omega:-\sqrt{y}<\xi<\sqrt{y}\}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{-x^2}{2}}dx, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases};$$

так как

$$P\{\omega:-\sqrt{y}\le\xi<\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} p_\xi(u)du,$$

а плотность распределения при $y>0$

$$p_\eta(y)=\frac{dF_\eta(y)}{dy}=p_\xi(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}-p_\xi(-\sqrt{y})\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2}{\sqrt{y}}e^{-y/2}.$$

Для вычисления математического ожидания абсолютно непрерывной случайной величины пользуются формулой

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xp_\xi(x)dx \tag{4.4}$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|p_\xi(x)dx<\infty. \tag{4.5}$$

Свойства математического ожидания и определения, связанные с этим понятием, сформулированные ранее для дискретных случайных величин, с очевидным изменением переносятся и на случай абсолютно непрерывных случайных величин.

Пример 4.3. Пусть $\xi(\omega)$ —случайная величина с плотностью распределения

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\pi(x^2+1)},\ x\in(-\infty,\infty)$$

(распределение Коши). Вычислить $M\min(|\xi|,1)$.

Решение.

$$M\min(|\xi|,1)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\min\{|x|,1\}\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx+\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\ln 2.$$

Пример 4.4. Плотность распределения случайной величины равна $p_\xi(x)=c/(1+x)^4$ при $x>0$; $p_\xi(x)=0$ при $x\le 0$. Найти постоянную c.

Решение. Так как $\int_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x)dx=1$, то имеем $\int_0^{\infty}\frac{c}{(1+x)^4}dx=1$ и $c=3$, а

$$P\{1\le\xi<9\}=\int_1^9\frac{3}{(1+x)^4}dx=0{,}124.$$

Согласно (2.6)

$$M\xi=\int_0^{\infty}x\frac{3}{(1+x)^4}dx=\frac{1}{2},$$

$$D\xi=\int_0^{\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{(1+x)^4}dx=\frac{3}{4}.$$

Аналогично

$$M(1+\xi)^2=\int_0^{\infty}(1+x)^2\cdot\frac{3}{(1+x)^4}dx=3.$$

ЗАДАЧИ

1. Точка равномерно распределена в круге радиуса R. Найти функцию распределения и плотность расстояния от точки до центра круга.

2. Время $\tau(\omega)$ безотказной работы прибора имеет функцию распределения

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\le 0;\\ 1-e^{-t/T}, & t>0.\end{cases}$$

$T>0$ – постоянная. Найти вероятность того, что: а) $\tau(\omega)\ge T$; б) $\tau(\omega)\ge 2T$; в) $T\le\tau(\omega)<2T$ и среднее время безотказной работы прибора. Какой смысл постоянной T?

3. Плотность вероятностей случайной величины $\xi(\omega)$, определенной в интервале $-a<x<a$, обратно пропорциональна $\sqrt{a^2-x^2}$. Вычислить $M\xi$ и $D\xi$.

4. Случайная величина $\xi(\omega)$ имеет нормальное распределение с $M\xi=0$, $D\xi=1$. Найти $M\xi^k$, $k=1,2,\ldots$

5. Контроль шариков для подшипников производится так. Если шарик не проходит через отверстие диаметра d_1, но проходит через отверстие диаметра d_2, то размер его считается приемлемым ($d_2>d_1$) Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то шарик бракуется. Определить вероятность брака в предположении, что диаметр шарика подчиняется нормальному закону с параметрами $a=\frac{1}{2}(d_1+d_2)$; $\sigma=\frac{1}{4}(d_2-d_1)$.

6. Значения случайной величины $\xi(\omega)$ заключены на отрезке $-h\le x\le h$, $h>0$. Доказать, что $|M\xi|\le h$, $D\xi\le h^2$. Возможно ли в этих условиях равенство $D\xi=h^2$?

7. Точка P равномерно распределена на единичном квадрате $ABCD$. Найти плотность распределения площади прямоуголь-

ника $AB'PD'$, где B', D' – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны AB и AD соответственно.

8. Плотность распределения $\xi(\omega)$, задана формулами

$$P_\xi(x)=\begin{cases} c/x^4, & x\ge 1;\\ 0, & x<1.\end{cases}$$

Найти постоянную c, плотность распределения $\eta(\omega)=\ln\xi(\omega)$; $P\{\omega:0{,}5<\eta(\omega)<0{,}75\}$.

9. Предположим, что абсолютная величина $\xi(\omega)=|\vec{V}|$ скорости молекул газа распределена по закону Максвелла, т.е имеет плотность распределения

$$P_\xi(v)=\begin{cases} \dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v^2 e^{-h^2v^2}, & 0<v<\infty;\\ 0, & v<0.\end{cases}$$

Найти $M\xi$ и средне-квадратическую скорость $(\sqrt{M\xi^2})$.

10. Найти $M\xi, D\xi$, если плотность распределения случайной величины $\xi(\omega)$, имеет вид

$$P_\xi(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\ x\in(-\infty,\infty).$$

11. Точка равномерно распределена в шаре радиуса R. Найти функцию распределения и плотность распределения расстояния от точки до центра шара.

12. Случайная величина $\xi(\omega)$, нормальна с параметрами (0,1). Найти функцию распределения величины $\eta(\omega)=\xi+|\xi|$.

13. Электронная лампа включается в момент $t=0$. Условная вероятность выхода из строя этой лампы в промежуток времени $(t,t+\Delta t)$ при условии, что в момент t лампа еще работала, равна $\alpha\Delta t+o(\Delta t)$, где α – постоянная, не зависящая от t. Вычислить функцию распределения времени безотказной работы $\tau(\omega)$ и найти $M\tau$.

14. Вычислить $M\xi$ и $D\xi$, если плотность распределения $\xi(\omega)$ равна

$$P_\xi(x)=\begin{cases} \dfrac{x^m}{m!}e^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

15. Функция распределения случайной величины $\xi(\omega)$ равна

$$F_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ e^{-1/x^\alpha}, & x>0;\end{cases}$$

где α – параметр, $\alpha>0$. Найти функцию распределения величины $\eta(\omega)=-1/\xi(\omega)$.

16. Функция распределения $F_\xi(x)$ величины $\xi(\omega)$ – строго монотонна и непрерывна. Найти закон распределения величины $\eta(\omega)=F_\xi(\xi(\omega))$.

17. Диаметр шарика, изготавливаемого цехом, можно считать нормально распределенной случайной величиной со средним значением 2 см и дисперсией 0,0004 см^2. В каких границах можно практически гарантировать диаметр шарика, если за вероятность практической достоверности взять 0,9974?

18. Случайная величина $\xi(\omega)$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсий σ^2. Найти $M\xi^k$, $k=1,2,\ldots$.

19. Случайная величина $\xi(\omega)$ имеет стандартное нормальное распределение. Найти $M\cos\xi, D\cos\xi, M\sin\xi; D\sin\xi$.

20. Доказать, что если $F(x)$ – функция распределения, то при любом $h\ne 0$ функции

$$\phi(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}F(u)du \quad \text{и} \quad \psi(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}F(u)du$$

также являются функциями распределения некоторых случайных величин.

21. Случайная величина $\xi(\omega)$ имеет плотность распределения $P_\xi(x)=c\cos x$ при $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ и 0 вне этого интервала. Найти c, функцию распределения $F_\xi(x), M\xi^3$. Построить график функции распределения.

22. Случайная величина $\xi(\omega)$ нормально распределена с параметрами (a,σ^2). Найти плотность распределения случайной величины $\eta(\omega)=\alpha\xi+\beta$, где α и β – некоторые константы.

23. Решить задачу 22, если $\xi(\omega)$ – равномерно распределена на отрезке $[a, b]$.

24. Доказать, что при линейном преобразовании экспоненциально распределенной с параметром случайной величины $\xi(\omega)$ закон распределения не сохраняется.

§ 5. СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ И НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. КОВАРИАЦИЯ И КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Рассмотрим на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ упорядоченный набор случайных величин

$$\xi_1=\xi_1(\omega),\ \xi_2=\xi_2(\omega),\dots,\ \xi_n=\xi_n(\omega);\ \omega\in\Omega,$$

называемый **случайным вектором**, и пусть $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ функция

$$F_{\xi_1\xi_2\dots\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)=P\{\omega:\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,\dots,\xi_n<x_n\} \tag{5.1}$$

является **функцией распределения случайного вектора** $\vec{\xi}$ (см.[1], с.79). $F_{\xi_1\xi_2\dots\xi_n}(x_1,\dots,x_n)$ однозначно определяет функцию распределения

$$F_{\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_k}}(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_k}),$$

где $1\le k\le n$, в частности

$$F_{\xi_1}(x_1)=P\{\xi_1<x\}=F_{\xi_1\xi_2\dots\xi_n}(x_1,\infty,\infty,\dots,\infty).$$

Полиномиальное распределение. Пусть $\vec{\xi}(\omega)=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r)$ – r–мерный случайный вектор. Если n – фиксированное целое, и

$$P\{\xi_1=m_1,\xi_2=m_2,\dots,\xi_r=m_r\}=\begin{cases}\dfrac{n!}{m_1!\,m_2!\dots m_r!}P_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\dots P_r^{m_r} & \text{при } \sum\limits_{i=1}^{r} m_i=n\,(m_i\ge 0);\\ 0, & \text{в остальных случаях}.\end{cases}$$

В остальных случаях, где $p_i>0, \sum\limits_{i=1}^{r} p_i=1$, то говорят, что $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r)$ распределен по полиномиальному закону.

Пример 5.1. Случайный вектор (ξ,η) равномерно распределен в круге радиуса R. Найти плотность распределения случайных величин ξ и η. Зависимы ли эти величины?

Решение. Совместная плотность распределения $P_{\xi,\eta}(x,y)$ равна

$$P_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\le R^2;\\ 0, & x^2+y^2>R^2.\end{cases}$$

Для нахождения $P_\xi(x)$ воспользуемся соотношением

$$P_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy.$$

При $x\notin[-R,R]$, $p_{\xi,\eta}(x,y)=0$ и поэтому $p_\xi(x)=0$. При $x\in[-R,R]$, $p_{\xi,\eta}(x,y)=0$, если $|y|>\sqrt{R^2-x^2}$ и $p_{\xi,\eta}(x,y)=\dfrac{1}{\pi R^2}$, если $|y|\le\sqrt{R^2-x^2}$. Следовательно, при $x\in[-R,R]$

$$P_\xi(x)=\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_{-\sqrt{R^2x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dy=\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2},$$

т.е.

$$P_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}, & x\in[-R,R];\\ 0, & x\notin[-R,R].\end{cases}$$

В силу симметрии

$$P_\eta(y)=P_\xi(y).$$

Для непрерывных случайных величин условие независимости (при $r=2$) равносильно соотношению (при любых x, y)

$$P_{\xi,\eta}(x,y)=P_\xi(x)\cdot P_\eta(y) \tag{5.2}$$

(см. [1], с.85). Так как при $x^2+y^2<R^2$

$$P_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{1}{\pi R^2}\ne P_\xi(x)\cdot P_\eta(y),$$

то случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ зависимы.

Пример 5.2. Случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ **независимы** и нормально распределены с параметрами $(0,1)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta(\omega)=\xi_1^2+\xi_2^2$.

Решение. При $x>0$

$$F_\eta(x)=P\{\eta<x\}=P\{\xi_1^2+\xi_2^2<x\}=\iint\limits_{\{(u,v):u^2+v^2<x\}}P_{\xi_1}(u)P_{\xi_2}(v)\,du\,dv=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\{(u,v):u^2+v^2<x\}}e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\,du\,dv=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{x}}e^{-\rho^2/2}\rho\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{2\pi}2\pi\left(-e^{\rho^2/2}\right)\Big|_{\rho=0}^{\sqrt{x}}=1-e^{\frac{-x}{2}}$$

(здесь в ходе вычисления сделали замену $u=\rho\cos\varphi;\ v=\rho\sin\varphi$).

Таким образом,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}}, & x>0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Ковариацией двух случайных величин $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ называется величина

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = M[(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)]. \tag{5.3}$$

Используя свойства математического ожидания, можно получить (см.[1], с. 107-108):

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = M\xi_1\xi_2 - (M\xi_1)(M\xi_2). \tag{5.4}$$

Если $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы, то $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Коэффициентами корреляции случайных величин $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ называется число

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}}. \tag{5.5}$$

В частности, хотя **условие** $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ является **необходимым условием независимости** случайных величин $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$, это условие **не является достаточным условием** независимости $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$.

Замечание. Если известно, что $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ **нормально распределены**, то условие $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ является и достаточным условием независимости $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$.

Иногда случайную величину удается представить в **виде суммы более простых**, возможно зависимых, **случайных величин.** Остановимся на вычислениях математического ожидания,

дисперсии и других числовых характеристиках случайных величин, используя **представление их в виде суммы.**

Пример 5.3. Найти математическое ожидание $\eta(\omega)$ – суммы очков при бросании n игральных костей.

Решение. Введем вспомогательные случайные величины $\xi_k(\omega)$ – число очков, выпавшее на k-й игральной кости, $k = 1,2,...,n$. Тогда $\eta(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)$. Используя свойства математического ожидания, получаем

$$M\eta = M\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} M\xi_k,$$

где $\xi_k(\omega)$ – дискретная случайная величина с законом распределения

$$P\{\omega : \xi_k(\omega) = l\} = \frac{1}{6}, \; l = 1,2,..,6;$$

$$M\xi_k = \sum_{l=1}^{6} l \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Окончательно

$$M\eta = \sum_{k=1}^{n} (3{,}5) = 3{,}5\,n.$$

Характеристической функцией действительной случайной величины называется

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi}, \tag{5.6}$$

где t – действительное число, $t \in (-\infty, \infty)$.

Известно (см.[1], с.137), что если $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы, то

$$f_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(t)=f_{\xi_1}(t)\cdot f_{\xi_2}(t)\ldots f_{\xi_n}(t). \tag{5.7}$$

Пример 5.4. Найти характеристическую функцию биномиального распределения с параметрами (N,p).

Решение. Представим биномиальную случайную величину $\nu_N(\omega)$ (число успехов в серии испытаний Бернулли) в виде суммы независимых, одинаково распределенных случайных величин $\xi_k(\omega)$:

$$\nu_N(\omega)=\sum_{k=1}^{N}\xi_k(\omega),$$

где $P\{\xi_k(\omega)=1\}=p;$ $P\{\xi_k(\omega)=0\}=q,$ $\xi_k(\omega)$ – число успехов в k-м испытании. Тогда

$$f_{\nu_N}(t)=f_{\sum\limits_{k=1}^{N}\xi_k}(t)=\prod_{k=1}^{N}f_{\xi_k}(t).$$

В силу (5.7)

$$f_{\xi_k}(t)=Me^{it\xi_k}=e^{it\cdot 1}p+e^{it0}q=q+pe^{it}$$

и

$$f_{\nu_n}(t)=(q+pe^{it})^N.$$

Пример 5.5. Доказать с помощью характеристических функций, что сумма независимых, нормально распределенных случайных величин является нормальной случайной величиной.

Решение. Известно, что (см.[1], с.135)

$$f_\xi(t)=e^{ita-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\leftrightarrow\xi(\omega)\sim N(a,\sigma^2). \tag{5.8}$$

Пусть имеется n независимых случайных величин

$$\xi_k(\omega)\sim N(a_k,\sigma_k^2),\ k=1,2,\ldots,n.$$

Так как

$$f_{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}f_{\xi_k}(t)=e^{it\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)-\frac{t^2}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2\right)}, \tag{5.9}$$

то

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)\sim N\left(\sum_{k=1}^{n}a_k,\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\right).$$

ЗАДАЧИ

1. Совместное распределение величин $\xi_1(\omega),\xi_2(\omega)$ является равномерным в круге $\{(x_1,x_2):x_1^2+x_2^2\le 1\}$. Найти вероятность $P\{|\xi_1|<1/\sqrt{2},|\xi_2|<1/\sqrt{2}\}$. Являются ли величины $\xi_1(\omega),\xi_2(\omega)$ независимыми?

2. Координаты вектора $\vec{V}$ независимы и нормально распределены с параметрами (0,1). Найти плотность распределения абсолютной величины вектора V^2: а) на плоскости (распределение Рэлея); б) в пространстве (распределение Максвелла); в) в n-мерном пространстве (распределение χ_n^2).

3. Случайные величины $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ независимы и одинаково распределены: функции распределения равны $F(x)$. Найти функции распределения случайных величин

$$\eta(\omega)=\max_{1\le i\le n}\xi_i \quad \text{и} \quad \Theta=\min_{1\le i\le n}\xi_i.$$

Предположив дополнительно, что существует плотность $p(x)=F'(x)$, вычислить плотности $p_\eta(x)$ и $p_\Theta(x)$.

4. Через точку на окружности радиуса R проведена случайная хорда (любое направление ее равновероятно). Найти функцию распределения и математическое ожидание длины этой хорды.

5. Случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы, неотрицательны и плотности их при $0<x<+\infty$ пропорциональны

$$x^{\alpha}e^{-kx}(\alpha>0, k>0) \quad \text{и} \quad x^{\beta}e^{-kx}(\beta>0).$$

Найти плотность распределения суммы $\xi(\omega)+\eta(\omega)$.

6. Совместное распределение величин $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ определяется формулами $P\{\xi_1=0,\ \xi_2=1\}=P\{\xi_1=0,\ \xi_2=-1\}=P\{\xi_1=1,\ \xi_2=0\}=P\{\xi_1=-1,\ \xi_2=0\}=\frac{1}{4}$. Найти коэффициент корреляции $\rho(\xi_1,\xi_2)$. Зависимы ли ξ_1 и ξ_2?

7. Пусть $\xi(\omega)$ – число комбинаций НУ в $n+1$ испытаниях схемы Бернулли. Найти $M\xi$ и $D\xi$.

8. Кусок проволоки длиной $2l$ изогнут под прямым углом в случайной (равномерно распределенной) точке. Концы куска соединены прямой. Найти функцию распределения площади полученного треугольника.

9. Случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы и одинаково распределены $P\{\xi=k\}=P\{\eta=k\}=2^{-k}$ при k = 1,2.... Найти закон распределения их суммы.

10. Рассмотрим независимые случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$, где $\xi(\omega)$ дискретна с распределением

$$P\{\xi(\omega)=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\dots,n,$$

а $\eta(\omega)$ непрерывна с плотностью $p(x)$. Доказать, что сумма $\xi+\eta$ непрерывна и найти ее плотность распределения.

11. Плотность трехмерной случайной точки Θ с декартовыми координатами (ξ,η,ζ) равна

$(1+x+y+z)^4$

$$p_{\Theta}(x,y,z)=\begin{cases} c(x+y+z)^{-4}, & \text{при } x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0;\\ 0, & \text{в остальных случаях}.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $p_{\xi}(x)$ координаты $\xi(\omega)$, а также плотность распределения суммы координат $\xi+\eta+\zeta$.

12. Случайные величины $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{10}$ попарно некоррелированы, $M\xi_k=0$, $D\xi_k=\sigma^2$, $k=1,2,\dots,10$. Найти коэффициент корреляции сумм $\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_7$ и $\xi_4+\xi_5+\dots+\xi_{10}$.

13. n частиц случайным образом размещают по N ячейкам. Обозначим через $\mu_0(\omega)$ число пустых ячеек. Найти $M\mu_0$ и $D\mu_0$. Указание:

$$\text{ввести } \chi_k(\omega)=\begin{cases}1, & \text{если ячейка с номером } k \text{ пустая};\\ 0, & \text{если ячейка с номером } k \text{ непустая}.\end{cases}$$

Найти асимптотические формулы при $N\to\infty$, $\frac{n}{N}\to\alpha=\text{const}$.

14. В стопке 50 тетрадей, положенных случайным образом; из них 15 тетрадей в клеточку, 25 тетрадей в линейку и 10 тетрадей для первого класса. Обозначим $\xi_1(n)$ – число тетрадей в клеточку среди n первых тетрадей, лежащих сверху; $\xi_2(n)$ – число тетрадей в линейку среди n первых тетрадей, лежащих сверху; $\xi_3(n)$ – число тетрадей для первого класса среди n первых, лежащих сверху. Найти:

а) $P\{\xi_1(n)=m\}$, $m=0,1,\dots,n$;

б) $P\{\xi_1(n)=m_1,\ \xi_2(n)=m_2,\ \xi_3(n)=m_3\}$;

в) $M\xi_1(n)$, $D\xi_1(n)$, $\mathrm{cov}(\xi_1(n),\ \xi_2(n))$.

15. На десяти станках одновременно началась обработка 10 деталей. Предполагая, что времена обработки деталей независимы и имеют показательное распределение с параметром 0,1; найти распределение времени: а) до получения первой обработанной детали; б) до окончания обработки всех деталей.

16. Проводится n независимых испытаний, каждое из которых состоит в случайном выборе двузначного числа (от 00 до 99). Рассмотрим следующие величины: β_n – количество чисел, делящихся на 5; γ_n – количество чисел, содержащих только цифры 1,2,3,4 и 9. Найти $M\beta_n$; $D\beta_n$; $M\gamma_n$, $D\gamma_n$, $\mathrm{cov}(\beta_n,\gamma_n)$.

17. Плотность совместного распределения величин $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ определена формулой:

$$p_{\xi_1\xi_2}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi^2-8}(1-\sin(x+y)) & \left(\begin{array}{l}0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0\le y\le \dfrac{\pi}{2}\end{array}\right)\\ 0 & \text{в остальных случаях}.\end{cases}$$

Найти:

1) одномерные распределения ξ_1 и ξ_2 (Зависимы ли величины ξ_1 и ξ_2?);

2) $M\xi_1$, $M\xi_2$, $D\xi_1$, $D\xi_2$;

3) $M\eta_1$, $D\eta_1$, если $\eta_1=\cos(\xi_1+\xi_2)$;

4) $M\eta_2$, $D\eta_2$, если $\eta_2=\sin\xi_1$;

5) закон распределения $\eta_3=(\xi_1+\xi_2)$.

18. Плотность совместного распределения случайных величин $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ равна:

$$p_{\xi_1\xi_2}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{c}{(1+x+y)^5}, & \text{если } x\ge 0,\ y\ge 0;\\ 0 & \text{в остальных случаях}.\end{cases}$$

Найти:

1) константу c;

2) одномерные функции распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 (Зависимы ли они?);

3) $M\xi_1$; $D\xi_1$; $M\xi_2$; $D\xi_2$;

4) $p_\eta(z)$; $M\eta$; $D\eta$, если $\eta=3\xi_1+\xi_2$; $P\{\xi_1+\xi_2<3\}$.

19. Доказать, что $\rho(\xi_1,\xi_2)=\pm 1$ тогда и только тогда, когда существуют константы $a(a\ne 0)$ и b, такие, что

$$\xi_1(\omega)=a\xi_2(\omega)+b.$$

20. В N ящиков случайно и независимо друг от друга бросают шары до тех пор, пока не останется пустых ящиков. Обозначим $\nu(\omega)$ – число брошенных шаров. Найти $M\nu$.

Указание. Представить $\nu(\omega)$ в виде суммы $\chi_1+\chi_2+\cdot+\chi_n$, где χ_k – число шаров, брошенных с момента, когда число пустых ящиков равно $N-(k-1)$ до изменения числа пустых ящиков на $N-k$, $k=1,2,...,N$.

21. Брошено три игральные кости. Найти среднее значение, дисперсию, начальный, центральный и абсолютный центральный моменты 3-го порядка случайной величины $\xi(\omega)$ – суммы выпавших очков.

§ 6. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА. ТЕОРЕМА ПУАССОНА

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

В вероятностных задачах, являющихся моделями реальных процессов, не всегда бывает легко найти функцию распределения изучаемой случайной величины, но часто удается вычислить ее математическое ожидание и дисперсию. Какие выводы можно сделать о самой случайной величине $\xi(w)$, зная $M\xi$ и $D\xi$?

Оказывается, верна следующая оценка (**неравенство Чебышева**) (см. [1], с.110): если $D\xi < \infty$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$P\{|\xi - M\xi| > \varepsilon\} \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \tag{6.1}$$

Полагая $\varepsilon = c\sqrt{D\xi}$, получим $P\{|\xi - M\xi| > c\sqrt{D\xi}\} \le \frac{1}{c^2}$, т.е. для любой случайной величины $\xi(\omega)$ вероятность отклонения от $M\xi$ (среднего значения) на величину, большую $c\sqrt{D\xi}$, не превосходит $1/c^2$.

Пример 6.1. Из интервала (0,1) независимо друг от друга выбирают 1000 чисел. Оценить вероятность того, что их сумма будет заключена между 400 и 600.

Решение. Представим интересующую нас величину $\eta(\omega)$ в виде суммы $\eta = \sum_{k=1}^{1000} \xi_k$, в которой $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{1000}$ – независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале (0,1), т.е.

$$p_{\xi_k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \notin [0,1], \quad k = 1,2,\ldots,1000. \end{cases}$$

Найдем $M\xi_k$ и $D\xi_k$:

$$M\xi_k = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi_k}(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}; \quad D\xi_k = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}.$$

Тогда

$$M\eta = 500; \quad D\eta = \frac{1000}{12}$$

и

$$P\{400 < \eta < 600\} = P\{-100 < \eta - M\eta < 100\} = P\{|\eta - M\eta| < 100\} =$$
$$= 1 - P\{|\eta - M\eta| \ge 100\}.$$

Используя неравенство Чебышева, находим

$$P\{|\eta - M\eta| \ge 100\} \le \frac{D\eta}{100^2} = \frac{1}{120},$$

следовательно,

$$P\{400 < \eta < 600\} \ge 1 - \frac{1}{120}.$$

Получили для искомой вероятности достаточно хорошую оценку. Точное значение этой вероятности можно вычислить, если найти функцию распределения случайной величины η, что является очень сложной задачей.

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ (ЗБЧ)

Последовательность случайных величин $\xi_n(\omega)$, n = 1, 2, ... сходится по вероятности к a, если при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n - a| > \varepsilon\} = 0. \qquad (6.2)$$

Обозначение:

$$P - \lim_{n\to\infty} \xi_n = a \qquad (\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} a).$$

ЗБЧ гласит (см. [1], с.113): если последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k\right| > \varepsilon\right\} = 0. \qquad (6.3)$$

В частности, если последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, имеющих математическое ожидание $M\xi_k = a$, то

$$P - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k = a.$$

Пример 6.2. Применим ли ЗБЧ к последовательности независимых случайных величин

$$\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}; \quad \xi_k \sim N(0, ck^{\alpha})$$

($c > 0$, $\alpha > 0$ – постоянные)?

Решение. Для независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ $D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$. В данном случае $D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = c\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ растет как $n^{\alpha+1}$ при $\alpha > 0$ и не быстрее n при $\alpha \le 0$. Поэтому при $\alpha + 1 < 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = 0,$$

т.е. при $\alpha < 1$ к последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ применим ЗБЧ.

Пусть теперь $\alpha \ge 1$. Так как сумма нормальных независимых величин тоже нормальна, то

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sim N\left(0, c\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}\right).$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon n/\sigma_n}^{\varepsilon n/\sigma_n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \to \beta < 1$$

$\left(\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n} ck^{\alpha}\right)$, так как n/σ_n не стремится к ∞, значит, при $\alpha \ge 1$ ЗБЧ неприменим.

ЗБЧ дает математическое обоснование следующему эмпирическому факту: если производятся независимые измерения некоторой постоянной величины одним прибором, который не совершает систематических ошибок ("в среднем" ошибка измерения равна нулю), то при увеличении числа измерений их среднее арифметическое будет приближаться к значению измеряемой величины.

ТЕОРЕМА ПУАССОНА

Пусть $\nu_n(\omega)$ распределена по биномиальному закону с параметрами n, p_n. ($\nu_n(\omega)$ заданы на различных вероятностных пространствах.) Теорема Пуассона гласит (см. [1], с.57): если при $n \to \infty$ и $p_n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda = \text{const}, \quad 0<\lambda<\infty,$$

то

$$P\{\nu_n = m\} = C_n^m p_n^m (1-p_n)^{n-m} \underset{n\to\infty}{\to} e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$$

при любом постоянном $m = 0,1,2,\ldots$.

Эта теорема применяется при "больших" n и "малых" p (или $q = 1 - p$), в этом случае биномиальное распределение приближается к пуассоновским (с параметром $\lambda = np$).

Пример 6.3. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти приближенно вероятность попадания в цель двумя и более выстрелами при залпе в 5000 выстрелов.

Решение. Пусть ν_{5000} – число попаданий при 5000 выстрелах.

$$P\{\nu_{5000} \geq 2\} = \sum_{m=2}^{5000} P\{\nu_{5000} = m\} = \sum_{m=2}^{5000} C_{5000}^m (0{,}001)^m (0{,}999)^{5000-m}.$$

Так как $n = 5000$ "велико", $p = 0{,}001$ "малое" число, то воспользуемся теоремой Пуассона с $\lambda = 5$. Тогда

$$P\{\nu_{5000} \geq 2\} \approx \sum_{m=2}^{\infty} e^{-5}\cdot\frac{5^m}{m!} = 1 - \sum_{m=0}^{1} e^{-5}\cdot\frac{5^m}{m!} = 1 - e^{-5}(1-5) = 0{,}9596.$$

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА (ЦПТ)

В приложениях теории вероятностей часто приходится иметь дело с суммами большого числа случайных величин (иногда одинаково распределенными). При изучении свойств таких сумм целесообразно пользоваться ЦПТ (см. [1], с.144): если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимые и одинаково распределенные случайные величины с $M\xi_k = a$ и $D\xi_k = \sigma^2$, то при $n \to \infty$

$$P\left\{\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \Phi(x) \tag{6.4}$$

равномерно по $x \in (-\infty, \infty)$. В схеме Бернулли $\nu_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $P\{\xi_k = 1\} = p$; $P\{\xi_k = 0\} = 1 - p = q$, $K = 1,2,\ldots$, причем $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены и $M\xi_k = p$, $D\xi_k = pq$. Следовательно, (при $\eta\to\infty$ – увеличении числа испытаний) последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ удовлетворяет ЦПТ. И мы получаем частный случай ЦПТ **интегральную теорему Муавра-Лапласа** (см. [1], с.60): если $p = \text{const}$, $0 < p < 1$, то при $n \to \infty$

$$P\left\{\frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \Phi(x). \tag{6.5}$$

Тем самым при больших n число успехов $\nu_n(\omega)$ (точнее, нормированное число успехов) имеет распределение, близкое к нормальному.

Пример 6.4. В поселке *А* 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город *В*, выбирая дни поездок по случайным мотивам и независимо от остальных. Какой наименьшей вместительностью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся не чаще одного раза в 100 дней? (Поезд идет один раз в сутки.)

Решение. Решение жителя поехать в город *В* назовем успехом. Положим, $p = 6/30 = 1/5$; $q = 4/5$ (в этом случае среднее число поездок одного жителя за месяц будет равно 6). Число испытаний $n = 2500$. Пусть ν_n – число жителей, поехавших в город *В*.Требуется найти такое наименьшее x, для которого $P\{\nu_n > x\} \leq 0{,}01$. Так как n велико и $npq = 400$, то используем интегральную предельную теорему Муавра-Лапласа:

$$P\{\nu_n > x\} = P\left\{\frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} > \frac{x-500}{20}\right\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{x-500}{20}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{x-500}{20}}^{\infty} e^{-u^2/2} du,$$

x определяем из равенства:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{x-500}{20}}^{\infty} e^{-u^2/2} du = 0{,}01.$$

Используя таблицы нормального распределения, получим $x = 547$.

Пример 6.5. Суммируются 10000 чисел, округленных до 10^m. Предполагается, что ошибки округления независимы и равномерно распределены в интервале $[-0{,}5\cdot 10^{-m};\ 0{,}5\cdot 10^{-m}]$. Найти границы, в которых с вероятностью, не меньшей 0,99, будет находиться суммарная ошибка.

Решение. Пусть ξ_i – ошибка округления i-го числа. Поскольку случайные величины ξ_i равномерно распределены на отрезке $[-0{,}5\cdot 10^{-m};\ 0{,}5\cdot 10^{-m}]$, то

$$p_i(x) = P_{\xi_i}(x) = \begin{cases} 10^m, & x \in [-0{,}5\cdot 10^{-m};\ 0{,}5\cdot 10^{-m}]; \\ 0, & x \notin [-0{,}5\cdot 10^{-m};\ 0{,}5\cdot 10^{-m}], \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, 10000.$$

Поэтому

$$a = M\xi_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_i(x)\, dx = 0; \quad \sigma^2 = D\xi_i = M\xi_i^2 = \frac{10^{-2m}}{12}.$$

Найдем теперь такое Δ, чтобы

$$P\left\{\left|\sum_{k=1}^{10^4} \xi_k\right| < \Delta\right\} \geq 0{,}99$$

или

$$P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{10^4}}\left|\sum_{k=1}^{10^4} \xi_k\right| < \frac{\Delta}{100\sigma}\right\} \geq 0{,}99$$

Слагаемые – независимые, одинаково распределенные случайные величины, $M\xi_k = 0$ и $D\xi_k = \frac{10^{-2m}}{12}$; число слагаемых велико, следовательно, мы можем воспользоваться ЦПТ:

$$P\left\{\frac{1}{100\sigma}\left|\sum_{k=1}^{10^4} \xi_k\right| < \frac{\Delta}{100\sigma}\right\} \approx \Phi\left(\frac{\Delta}{100\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\Delta}{100\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{100\sigma}\right) - 1$$

(воспользовались равенством: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$), которое вытекает из четности плотности $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ и равенства $\lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$. Остается решить неравенство $2\Phi\left(\frac{\Delta}{100\sigma}\right) - 1 \geq 0{,}99$ или $\Phi\left(\frac{\Delta}{100\sigma}\right) \geq 0{,}995$. По таблице функции $\Phi(x)$ находим, что это неравенство выполняется при $\frac{\Delta}{100\sigma} \geq 2{,}58$. (Таблица значений функции $\Phi_0(x) = \Phi(x) - 0{,}5$ при $x > 0$ приведена в работе [1] на с.235-236.) Окончательно находим

$$\Delta \geq 2{,}58\cdot 100\sigma = \frac{2{,}58}{\sqrt{12}} 10^{-m} \approx 74{,}96\cdot 10^{-m}$$

Итак, с вероятностью, не менее 0,99, суммарная ошибка округления лежит в интервале $[-74{,}96\cdot 10^{-m},\ 74{,}96\cdot 10^{-m}]$.

ЗАДАЧИ

1. Найти $P\{|\xi - M\xi| \geq 3\sqrt{D\xi}\}$, если $\xi(\omega)$ имеет: а) нормальное распределение; б) равномерное распределение на отрезке $[-1,1]$; в) распределение Пуассона с параметром $\lambda = 0{,}09$.

2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ – последовательность случайных величин; $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ – ограниченная числовая последовательность. Верно ли утверждение: если $\xi_n \xrightarrow{P} 0$, то $c_n \xi_n \xrightarrow{P} 0$ при $n \to \infty$?

3. Случайные величины попарно независимы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, причем ξ_k принимает значение $\pm\sqrt{\ln k}$ $(k = 2, 3, \dots, n, \dots)$ с вероятностью 1/2. Подчиняется ли последовательность $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n \dots$ закону больших чисел?

4. Найти характеристическую функцию дискретной случайной величины с распределением:

$$P\{\xi = -b_k\} = P\{\xi = b_k\} = p_k;$$

$$P\{\xi = 0\} = p_0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

5. Какому условию должны удовлетворить неотрицательные числа $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ для того, чтобы функция $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt)$ была характеристической? Какой случайной величины?

6. Вероятность наступления события A в одном испытании равна 0,5. Какова вероятность того, что при проведении 1000 независимых испытаний количество наступлений события A будет заключено в интервале от 450 до 550?

7. Вероятность наступления события A в одном испытании равна $p = 0{,}4$. Сколько надо провести независимых испытаний, чтобы было гарантировано неравенство:

$$P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < 0{,}01\right\} > 0{,}995$$

(n_A – число наступлений события A в n испытаниях).

см. на одл.

8. В книге 500 страниц, вероятность встретить опечатку на случайно выбранной странице равна 0,001. Какова вероятность, что в книге не менее 2-х опечаток?

9. Случайные величины ξ_k при $k = 1, 2, \dots, 4500$ взаимно независимы и имеют одинаковые дисперсии $D\xi_k = 5$. Вычислить (приближенно) вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится от своего математического ожидания не более, чем на 0,04.

10. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ независимы, причем $\xi_k(\omega)$ принимает два значения

$$P\{\xi_k = -\sqrt{k}\} = P\{\xi_k = \sqrt{k}\} = \frac{1}{2}.$$

Методом характеристических функций найти предельное распределение средних арифметических $\frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)$ при $n \to \infty$. Доказать, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ не подчиняется закону больших чисел.

11. Найти $P\{|\xi - M\xi| \geq 3\sqrt{D\xi}\}$, если $\xi(\omega)$ имеет: а) $P\{\xi = 1\} = P\{\xi = -1\} = \frac{1}{18}$, $P\{\xi = 0\} = \frac{8}{9}$; б) показательное распределение.

12. Пусть случайная величина $\xi(\omega)$ имеет нормальное распределение с параметрами (a, σ^2). Оценить по неравенству Чебышева $P\{|\xi - a| > 2\sigma\}$. Сравнить с точным значением этой вероятности.

13. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – центрированные случайные величины с дисперсиями $D\xi_k = \sigma_k^2$. Коэффициенты корреляции заданы $\rho(\xi_k, \xi_j) = a_{kj}$ при $k \neq j$. Рассмотрим сумму $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Найти $\rho(\xi_k, \eta_n)$. Рассмотреть частный случай: когда все некоррелированы и одинаково распределены.

14. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ удовлетворяет трем условиям: все $M\xi_k = a$ и $D\xi_k = c$, все $\rho(\xi_k, \xi_j) \leq 0$ при $k \neq j$. Доказать, что эта последовательность удовлетворяет закону больших чисел.

15. В практически неограниченной совокупности некоторых предметов половина из них обладает свойством A и пятая

часть – свойством B. Свойства A и B распределены между собой независимо. Из совокупности случайно выбрали 1000 предметов. Какова вероятность, что в этой выборке частоты, с которыми встречаются свойства A и B, отличаются от их вероятностей не более, чем на 5%?

16. В таблице случайных чисел цифры сгруппированы по две, найти приближенное значение вероятности того, что среди 200 пар пара 01 встретится не менее трех раз.

17. Найти приближенное значение вероятности того, что число выпадений "1" при 12000 бросаний игральной кости заключено между 1900 и 2150.

18. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотреть два случая: а) зрители приходят парами; б) зрители приходят поодиночке. Предположить, что входы зрители выбирают с равными вероятностями.

19. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ – последовательность взаимно независимых случайных величин. $P\{\xi_k = 2^k\} = P\{\xi_k = -2^k\} = 2^{-2k-1}$, $P\{\xi_k = 0\} = 1 - 2^{-2k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Выполняется ли для данной последовательности закон больших чисел?

20. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение, $\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$.

А. Доказать, что $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\chi_n^2}{n} - 1\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Б. Найти

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\chi_n^2 - M\chi_n^2}{\sqrt{D\chi_n^2}} < 3\right\}.$$

21. Стрелок попадает при каждом выстреле по мишени в десятку с вероятностью 0,45; в девятку с вероятностью 0,35; в восьмерку – с 0,1; в семерку – с 0,05; в шестерку – с 0,05. Стрелок сделал 100 выстрелов. Найти вероятность того, что сумма полученных очков заключена в интервале [880, 940].

22. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{300}$ независимы и равномерно распределены на отрезке [1,7]. Найти $P\left\{1140 < \sum_{k=1}^{300} \xi_k < 1290\right\}$.

23. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{100}$ независимы и распределены по закону Пуассона с $\lambda = 0,25$. Найти $P\left\{11 < \sum_{k=1}^{100} \xi_k < 39\right\}$.

24. Величина $\xi_\lambda(\omega)$ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right\}.$$

25. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин. $P\{\xi_k = 1\} = P\{\xi_k = -1\} = \frac{1}{2}$, $k = 1, 2, \ldots$. Обозначим

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{2^k}.$$

Найти распределение: $\eta = \lim_{n\to\infty} \eta_n$.

§ 7. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ: ВЫБОРКА, ЭМПИРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ВЫБОРОЧНЫЕ МОМЕНТЫ. ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ; СОСТОЯТЕЛЬНЫЕ, НЕСМЕЩЕННЫЕ ОЦЕНКИ. МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНОК. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

ЗАДАЧИ

1. Имеется выборка объема 8:

$$2,\ 4,\ 2,\ 6,\ 4,\ 8,\ 4,\ 10\ . \qquad (7.1)$$

Построить по этой выборке эмпирическую функцию распределения. Найти оценку математического ожидания (выборочное среднее) и несмещенную оценку для дисперсии.

2. Предполагая, что выборка (7.1) является выборкой из элементов экспоненциального распределения с неизвестным параметром λ. Найти оценку максимального правдоподобия для λ.

3. Предполагая, что элементы выборки (7.1) являются элементами выборки из совокупности пуассоновских случайных величин с неизвестным параметром λ. Найти оценку максимального правдоподобия для λ.

4. Проведено 10 испытаний Бернулли с неизвестной вероятностью успеха θ. Результаты испытаний таковы:

$$1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0, \qquad (7.2)$$

где 1 означает успех, а 0 – неуспех в соответствующем испытании. Построить по выборке (7.2) эмпирическую функцию

распределения. Найти по выборке (7.2) выборочное среднее и несмещенную оценку для дисперсии (выборочную дисперсию). Получить оценку максимального правдоподобия для параметра θ.

5. Предполагая, что выборка (7.1) является выборкой из совокупности нормально распределенных случайных величин с параметрами $\theta_1 = a$ и $\theta_2 = \sigma^2$, получить оценку максимального правдоподобия для θ_2 при: 1) $a = 5$; 2) неизвестном a. Какая из этих оценок является несмещенной?

6. Предполагая, что выборка является выборкой из совокупности нормально распределенных случайных величин с параметрами $\theta_1 = a$ и $\theta_2 = \sigma^2$, построить доверительный интервал для:

1) θ_1 с уровнем доверия $1 - 2\alpha = 0{,}9$, если $\sigma^2 = 4$;
2) θ_1 с уровнем доверия $1 - 2\alpha = 0{,}95$, если θ_2 неизвестно;
3) $\theta_2 = \sigma^2$ с уровнем доверия $1 - 2\alpha = 0{,}9$, если $a = 5$;
4) $\theta_2 = \sigma^2$ с уровнем доверия $1 - 2\alpha = 0{,}95$, если $\theta_1 = a$ неизвестно.

7. Предполагая, что выборка (7.1) является выборкой из совокупности нормально распределенных случайных величин с параметрами $\theta_1 = a$ и $\sigma^2 = 9$, проверить с уровнем значимости (ошибкой 1-го рода) $\alpha = 0{,}05$ гипотезы H_0 против альтернативы H_1 в следующих случаях:

1) $H_0 : a = 4,\ H_1 : a > 4;$ 2) $H_0 : a = 6,\ H_1 : a < 6;$ 3) $H_0 : a = 4,\ H_1 : a \neq 4.$

В первых случаях найти ошибку 2-го рода β.

8. По выборке из задачи 4 проверить гипотезу $H_0 : p = \dfrac{1}{2}$ против альтернативы $H_1 : p > \dfrac{1}{2}$ с уровнем значимости $\alpha = 0{,}1$.

9. Дана выборка из некоторой генеральной совокупности:

03	99	11	04	61	93	71	68	94	08	32	46
53	84	60	95	82	32	88	61	81	91	61	38
55	59	55	54	32	88	80	08	35	56	60	04
73	54	77	62	71	29	92	38	53	17	29	13

Проверить гипотезу о равномерном распределении на интервале (0,100) генеральной совокупности (H_0).

10. Дана выборка $x_1, x_2,..., x_n$, из генеральной совокупности, подчиняющейся закону распределения с плотностью $p_\xi(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2}$. Найти оценку параметра $\hat{\alpha}$ и дисперсию оценки.

11. Измерены значения $x_1,..., x_n$ случайной величины $\xi(\omega)$, подчиняющейся равномерному распределению на отрезке $[0,\beta]$:

$$\rho(x,\beta) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,\beta]; \\ \dfrac{1}{\beta}, & x \in [0,\beta]. \end{cases}$$

Найти оценку параметра $\hat{\beta}$ методом максимального правдоподобия. Рассмотреть также случай, когда неизвестны оба параметра равномерного распределения, т.е.

$$\rho(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & x \notin [\alpha,\beta]; \\ \dfrac{1}{\beta-\alpha}, & x \in [\alpha,\beta]. \end{cases}$$

Найти оценки $\hat{\alpha}$; $\hat{\beta}$.

12. Дана выборка $x_1,..., x_n$ из некоторой генеральной совокупности с функцией распределения $F_\xi(x)$. Найти функцию распределения k-й порядковой статистики x_k^*.

13. В условиях задачи 12 доказать, что вероятность

$$P\{x_{k-1}^* \le \xi < x_k^*\} = \frac{1}{n+1}; \quad k = 1,2,\dots,n$$

(принимая $x_0^* = -\infty$; $x_{n+1}^* = \infty$).

14. В условиях задачи 12 найти распределение случайного вектора (x_1^*, x_n^*).

15. В условиях задачи 11 найти методом максимального правдоподобия оценку $M\xi$. Является ли эта оценка несмещенной?

16. В условиях задачи 11 найти методом подстановки оценки параметров $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$.

17. Пусть $x_1,..., x_n$ – выборка из нормально распределенной генеральной совокупности с параметрами (a, σ^2). Доказать, что оценки $\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ и $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \hat{a})^2$ независимы, а случайная величина $\frac{n\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}$ имеет χ-квадрат распределения с $n - 1$ степенью свободы.

18. Дана выборка объема $n = 100$ из некоторой генеральной совокупности. После группировки данных получена таблица.

Таблица

Интервал	(−15;−10)	(−10;−5)	(−5,0)	(0,5)	(5,10)	(10,15)
Число вариант, попавших в интервал	3	12	35	37	11	2

Проверить гипотезу о: а) нормальном распределении генеральной совокупности; б) не превышении измеряемой случайной величины (генеральной совокупности) по абсолютной величине 5.

ОТВЕТЫ

§ 1

1. а) нет; б) да. 2. при $A=B$. 3. $D=(A_1+A_2)(B_1B_2+B_2B_3+B_1B_3)$; $\bar D=(\bar A_1\bar A_2+\bar B_1\bar B_2+\bar B_2\bar B_3+\bar B_1\bar B_3)$. 4. 25. 5. 1/10!. 6. а) C_m^2/C_{m+n}^2, C_n^2/C_{m+n}^2, $m\cdot n/C_{m+n}^2$; б) $\frac{m^2}{(m+n)^2}$, $\frac{n^2}{(m+n)^2}$, $\frac{2m\cdot n}{(m+n)^2}$. 7. $m/(m+n)$.

8. 0,01; 0,72; 0,27. 9. $12!/12^{12}$. 10. $P(A)\cong 0{,}5177$; $P(B)\cong 0{,}4914$.

11. $P(A+B+C)=3p-3p^2$, где: а) $p=\frac{1}{2}$; б) невозможно.

12. $\frac{n+m}{m+2n}$; нет. 13. $4!/10!$ = 1/151200.

15. $D=A(B_1+B_2+B_3+B_4)(C_1+C_2)$; $\bar D=\bar A+\bar C_1\bar C_2+\bar B_1\bar B_2\bar B_3\bar B_4$.

16. $\frac{2}{n}$; $\frac{2}{n-1}$. 17. $2^6/C_{20}^5$. 18. 0,04. 19. $6^2\cdot C_6^2/C_{36}^4$. 20. $p(A)=\frac{24^8}{16!}$; $P(B)=\frac{24^5}{16!}$.

$\frac{32!}{5!\,5!\,4!\,(6!)^3}\Big/\frac{36!}{(6!)^6}$

$\frac{4608}{6125}$ $\frac{2}{18375}$

§ 2

1. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$

2. 0,25. 3. 1/12. 4. а) независимы; б) зависимы. 5. 1) $\alpha_1\alpha_2$;

2) $1-(1-\beta_1)(1-\beta_2)=\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2$. 6. 1) $p(1-\beta_1)(1-\beta_2)+(1-p)\alpha_1\alpha_2=P$; 2) $p(1-\beta_1)(1-\beta_2)/P$. 7. $\sum_{k=0}^{s}P_k(t)P_{s-k}(t)$.

8. $\frac{0{,}05N/M+N}{0{,}05N/M+N+0{,}0025M/M+N}=\frac{1}{1+0{,}05\frac{M}{N}}$.

9. $\frac{p_1^m(1-p_1)^{n-m}W_1}{\sum_{k=1}^{3}p_k^m(1-p_k)^{n-m}W_k}$. 10. $F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x, & 0<x\le 1;\\ 2-x, & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$

10 $\frac{19405}{40900}$ 0,474

11. а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{\sqrt3}{2}$; в) $\frac{2}{3}$. 12. 11/28; 1573/7840.

13. $P(A_n)=(1-q_1)(1-q_2)\dots(1-q_n)$; $P(B_n)=1-\prod_{k=1}^{n+1}(1-q_k)$; $P(C_n)=q_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1-q_k)$. 14. $(1-p_3)(1-p_1p_2)$. 15. 0,7068. 9948 16. $\cancel{\frac{1074}{1759}}$. 17. $e^{-\lambda t}$.

18. $a_1=\alpha_1+\beta$, $a_2=\alpha_1+\alpha_2+\beta$; $P_0(t)=\frac{\beta}{a^2}+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{a_2}e^{-a_2t}$; $P_1(t)=\frac{\alpha_1}{a_1}+\frac{\alpha_1}{a_1}e^{-a_1t}$; $P_2(t)=\frac{\alpha_2\beta}{a_1a_2}-\frac{\alpha_1}{a_1}e^{-a_1t}-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{a_2}e^{-a_2t}$.

19. $a_1=\lambda+\mu-\sqrt{\lambda\mu}$, $a_2=\lambda+\mu+\sqrt{\lambda\mu}$, $c=\frac{1}{\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu}$;

$P_0(t)=c\left[\mu^2+\frac{\lambda}{2}a_2e^{-a_1t}+\frac{\lambda}{2}a_1e^{-a_2t}\right]$; $P_1(t)=c\left[\lambda\mu+\frac{\lambda}{2\sqrt\mu}\left[e^{-a_1t}(\sqrt\lambda-\sqrt\mu)a_2-e^{-a_2t}(\sqrt\lambda+\sqrt\mu)a_1\right]\right]$; $P_2(t)=c\left[\lambda^2+\frac{\lambda\sqrt\lambda}{2\sqrt\mu}\left(-a_2e^{-a_1t}+a_1e^{-a_2t}\right)\right]$.

20. а) $\lambda_{12}\ne\lambda_{01}+\lambda_{02}$, $P_0(t)=e^{-(\lambda_{01}+\lambda_{02})t}$,

$$P_1(t) = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{01}+\lambda_{02}-\lambda_{12}}\left[e^{-\lambda_{12}t} - e^{-(\lambda_{01}t+\lambda_{02}t)}\right], \quad P_2(t) = 1 - \frac{1}{\lambda_{01}+\lambda_{02}-\lambda_{12}}\left[\lambda_{01}e^{-\lambda_{12}t} + (\lambda_{02}-\lambda_{12})e^{-(\lambda_{01}+\lambda_{02})t}\right];$$

б) $\lambda_{12}=\lambda_{01}+\lambda_{02}$, $P_0(t)=e^{-\lambda_{12}t}$, $P_1(t)=\lambda_{01}te^{-\lambda_{12}t}$, $P_2(t)=1-(1+\lambda_{01}t)e^{-\lambda_{12}t}$.

§ 3

1. $P\{\mu_5=m\} = C_5^m \frac{1}{2^5}$, $m=0,1,\dots,5$; $\varphi(z)=(z+1)^5 2^{-5}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{4}$.
2. $n = 3$. 3. В биномиальном приближении $n = 1 + \left[\frac{-\ln 10}{\ln(1-M/N)}\right] = 22$; в пуассоновском приближении $n = 1+\left[\frac{\ln 10}{M/N}\right] = 24$.
4. $M\xi = \frac{1}{p} - 1$; $P\{\xi=k\}=(1-p)^k p$; $k=0,1,\dots$. 5. $P\{\eta=m\} = e^{-ap}(ap)^m/m!$; $m=0,1,\dots$; ap. 6. $a=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{n} m_ik_i$. 7. $P\{\eta=m\} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}$, $m=0,1,\dots n,\dots$. 8. $C_{2n}^n\cdot 2^{-2n}$. 9. $P\{\xi=m\} = 0{,}1\cdot(0{,}9)^{m-1}$, $m=1,2,3,4$; $P\{\xi=5\}=(0{,}9)^4=0{,}6561$; $M\xi=4{,}0951$; $D\xi=1{,}98805$. 10. $P\{\xi=m\}=C_4^m\cdot C_{32}^{6-m}/C_{36}^6$, $m=\overline{0,4}$ $M\xi=\frac{2}{3}$.

11. $P\{\xi=m\}=\frac{2M(N-M)}{N(N-1)}\left[\frac{2M^2+N(N-1)-2MN}{N(N-1)}\right]^{m-1}$, $m=1,2,\dots$; $M\xi=\frac{N(N-1)}{2M(N-M)}$. 12. 0,957481; 0,95957. 13. $s \doteq 2$. 14. $M\xi = (\sqrt{2}-1)^{-1}$; $D\xi$ — не существует. 15. $C = e^{-1}$; $M\xi = -e^{-2}$; $D\xi = 2 - e^{-4}$. 16. $P\{\nu=1\}=\frac{1}{2}$; $P\{\nu=k\}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$; $k=2,3,\dots$.

$D\xi=2{,}0069$

17. $P\{\xi=3\}=P\{\eta=-3\}=\frac{3}{11}$; $P\{\xi=-2\}=P\{\eta=2\}=\frac{8}{11}$; $P\{\nu=n\}=\left(\frac{5}{16}\right)^{n-1}\frac{11}{16}$; $M\xi=-M\eta=-\frac{7}{11}$; $M\nu=\frac{16}{11}$. 18. $P\{\xi=n\}=C_{n-1}^4\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}$; $M\xi=30$; $D\xi=150$. 19. При $n>\frac{2}{3}N$

$$P\{\nu(\omega)=m\}=\begin{cases}\frac{1}{3}, & m=0;\\[4pt] \dfrac{\frac{2}{3}N\left(\frac{2}{3}N-1\right)\dots\left(\frac{2}{3}N-m+1\right)\frac{1}{3}N}{N(N-1)\dots(N-m+1)(N-m)}, & 1\le m\le\frac{2}{3}N;\\[4pt] 0, & m>\frac{2}{3}N.\end{cases}$$

При $0<n\le\frac{2}{3}N$

$$P\{\nu(\omega)=m\}=\begin{cases}\frac{1}{3}, & m=0;\\[4pt] \dfrac{\frac{2}{3}N\left(\frac{2}{3}N-1\right)\dots\left(\frac{2}{3}N-m+1\right)\frac{1}{3}N}{N(N-1)\dots(N-m+1)(N-m)}, & 1\le m\le n-1;\\[4pt] \dfrac{\frac{2}{3}N\left(\frac{2}{3}N-1\right)\dots\left(\frac{2}{3}N-n+1\right)}{N(N-1)\dots(N-n+1)}, & m=n.\end{cases}$$

§ 4

1. $p_\xi(x) = \dfrac{2x}{R^2}(0 \le x \le R)$; $\quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \left(\dfrac{x}{R}\right)^2, & 0 < x \le R; \\ 1, & x > R. \end{cases}$

2. а) e^{-1}; б) e^{-2}; в) $e^{-1} - e^{-2}$; $T = M\tau$. 3. 0; $a^{2}/2$. 4. $M\xi^{2k-1} = 0$; $M\xi^{2k} = (2k-1)!!$; $k = 1, 2, \ldots$. 5. 0,0456. 6. $|M\xi| \le \int_{-h}^{h} |x|\, dF(x) \le h$; $D\xi \le M\xi^2 = \int_{-h}^{h} x^2 dF(x) \le h^2$. Равенство имеет место для $\xi : P\{\xi = -h\} = P\{\xi = h\} = \dfrac{1}{2}$. 7. $p_\xi(x) = -\ln x,\ 0 < x < 1$. 8. $C = 3$; $p_\eta(y) = 3e^{-3y},\ y > 0,\ e^{-1,5} - e^{-2,25}$. 9. $M\xi = \cancel{2/h\sqrt{\pi}}$; $D\xi = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{\pi}\right)/h^2$.

$2/h\sqrt{\pi}$

10. 0,2. 11. $p_\xi(x) = \dfrac{3x^2}{R^3},\ 0 \le x \le R$; $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \left(\dfrac{x}{R}\right)^3, & 0 < x \le R; \\ 1, & x > R. \end{cases}$

12. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{x}{2}\right), & x > 0. \end{cases}$ 13. $F_\tau(t) = \begin{cases} 1 - e^{-at}, & t > 0; \\ 0, & t \le 0; \end{cases}$

$M\tau = \dfrac{1}{a}$. 14. $M\xi = D\xi = m + 1$. 15. $F_\eta(y) = \begin{cases} e^{-|y|\alpha}, & y < 0; \\ 1, & y \ge 0. \end{cases}$

16. $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$ 17. $P\{1{,}94 < \xi < 2{,}06\} = 0{,}9974$.

18. $M\xi^{2k-1} = 0$; $M\xi^{2k} = (2k-1)!!\,\sigma^{2k}$. 19. $M\cos\xi = e^{-1/2}$; $D\cos\xi = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-1})^2$; $M\sin\xi = 0$; $D\sin\xi = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-2})$. 21. $c = \dfrac{1}{2}$; $M\xi^3 = 0$;

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{1}{2}(1 + \sin x), & -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ 22. $f_\eta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,|\alpha|\,\sigma} e^{-\frac{(x - \alpha a - \beta)^2}{2\alpha^2\sigma^2}}$,

$-\infty < x < \infty$. 23. $f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\alpha|} \cdot \dfrac{1}{b - a}, & \alpha a + \beta < x < \alpha b + \beta; \\ 0, & x \notin (\alpha a + \beta;\ \alpha b + \beta), \end{cases}$ $\alpha > 0$;

$f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\alpha|} \cdot \dfrac{1}{b - a}, & \alpha b + \beta < x < \alpha a + \beta; \\ 0, & x \notin (\alpha b + \beta;\ \alpha a + \beta), \end{cases}$ $\alpha < 0$.

§ 5

1. $\dfrac{2}{\pi}$; ξ_1 и ξ_2 — зависимы. 2. Для $x > 0$ $p_{\chi_n^2}(x) = x^{\frac{n}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}} 2^{-\frac{n}{2}} \Big/ \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)$. 3. $F_\theta(y) = 1 - (1 - F(y))^n$, $p_\theta(y) = n(1 - F(y))^{n-1} p(y)$; $F_\eta(y) = [F(y)]^n$, $p_\eta(y) = n(F(y))^{n-1} p(y)$.

4. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - \dfrac{2}{\pi}\arccos\dfrac{x}{2R}, & 0 < x \le 2R; \\ 1, & x > 2R; \end{cases}$ $M\xi = \dfrac{4R}{\pi}$. 5. $p(x) = \dfrac{k^{\alpha + \beta + 2} x^{\alpha + \beta + 1}}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} e^{-kx}$, $x > 0$. 6. $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$; ξ_1 и ξ_2 — зависимы.

7. $M\xi = npq$; $D\xi = npq(p^3 + q^3) + 2p^2q^2$.

8. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - \sqrt{1 - \dfrac{2x}{e^2}}, & 0 < x \le \dfrac{l^2}{2}; \\ 1, & x > \dfrac{l^2}{2}. \end{cases}$ 9. $P\{\xi + \eta = n\} = (n-1)2^{-n}$, $n = 2, 3, \ldots$. 10. $\forall y,\ p_s(y) = \sum_{k=1}^{n} p_k p(y - x_k),\ s = \xi + \eta$. 11. $c = 6$, $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ (1+x)^{-2}, & x > 0; \end{cases}$ $p_{\xi+\eta+\zeta}(t) = \dfrac{3t^2}{(1+t)^4},\ t > 0$. 12. $\rho(\eta_1, \eta_2) = \dfrac{4}{7}$. 13. $M\mu_0 = N\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n \sim Ne^{-\alpha}$; $D\mu_0 = N\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n + N(N-1) \cdot \left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n - \left[N\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\right]^2 \sim Ne^{-\alpha}(1 - (1+\alpha)e^{-\alpha})$. 14. а) $\dfrac{C_{15}^m C_{35}^{n-m}}{C_{50}^n}$, $m = 0, \min(15, n)$; б) $\dfrac{C_{15}^{m_1} C_{35}^{m_2} C_{10}^{m_3}}{C_{50}^n}$, $m_1 + m_2 + m_3 = n$; в) $M\xi_1(n) = \dfrac{3n}{10}$, $D\xi_1(n) = \dfrac{n(50-n)}{7} \cdot 0{,}03$; $\operatorname{cov}(\xi_1(n), \xi_2(n)) = \dfrac{3n(n-50)}{980}$. 15. а) $e^{-x},\ x > 0$; б) $(1 - e^{-0{,}1x})^9 \cdot e^{-0{,}1x},\ x > 0$. 16. $M\beta_n = \dfrac{1}{5}n$; $D\beta_n = \dfrac{4}{25}n$; $M\gamma_n = \dfrac{1}{4}n$; $D\gamma_n = \dfrac{3}{16}n$; $\operatorname{cov}(\beta_n, \gamma_n) = -\dfrac{n}{20}$. 17. $p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = \dfrac{4}{\pi^2 - 8}\left[\dfrac{\pi}{2} - (\sin x + \cos x)\right],\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$; ξ_1 и ξ_2 — зависимы; $M\xi_1 = M\xi_2 = \dfrac{\pi}{4}$; $D\xi_1 = D\xi_2 = \dfrac{4}{\pi^2 - 8}\left(\dfrac{\pi^4}{192} - \dfrac{\pi^2}{8} - \pi + 4\right)$; $M\eta_1 = 0$; $D\eta_1 = \dfrac{9\pi^2 - 68}{18(\pi^2 - 8)}$; $M\eta_2 = \dfrac{\pi - 2}{\pi^2 - 8}$; $D\eta_2 = \dfrac{\pi^4 - 18\pi^2 + 8\pi + 56}{2(\pi^2 - 8)^2}$;

$$p_{\eta_3}(z) = \frac{4}{\pi^2 - 8}\begin{cases} z(1 - \sin z), & 0 \le z \le \dfrac{\pi}{2}; \\ (\pi - z)(1 - \sin z), & \dfrac{\pi}{2} < z \le \pi; \\ 0, & z \notin [0, \pi]. \end{cases}$$

18. $c = 12$; $p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = \dfrac{3}{(1+x)^4},\ x \ge 0$; ξ_1 и ξ_2 — зависимы; $M\xi_1 = M\xi_2 = 1/2$; $D\xi_1 = D\xi_2 = 3/4$; $M\eta = 2$; $D\eta = 9$; $p_\eta(z) = \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{3^4}{(3+z)^4} - \dfrac{1}{(1+z)^4}\right]$; $z > 0$; $P\{\xi_1 + \xi_2 < 3\} = \dfrac{243}{256}$. 20. $M\nu = N\sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k}$. 21. $M\xi = 10{,}5$; $D\xi = \dfrac{35}{\cancel{12}\,4}$; $M\xi^3 = \cancel{573{,}125}$ 1443,25; $M(\xi - 10{,}5)^3 = 0$; $M|\xi - 10{,}5|^3 = \cancel{6{,}375}$ 39,02.

§ 6

0,003

1. а) 0,0269...; б) 0; в) 0,08606... . 2. Да. 3. Да.
4. $p_0 + 2\sum_{k=1}^{n} p_k \cos\beta_k t$. 5. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$; $P\{\xi = n\} = P\{\xi = -n\}\dfrac{a_n}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$; $P\{\xi = 0\} = a_0$. 6. $P = 2\Phi_0(3{,}16) = 0{,}998$. 7. $n \approx 1{,}88 \cdot 10^4$. 8. 0,95957. 9. ~~0,76986~~ 0,3. 11. а) $\dfrac{1}{9} = 0{,}111\ldots$; б) 0,01831... . 12. 1) 0,25; 2) 0,0455. 13. 1) $\rho_{(\xi_k, \eta)} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\sigma_j\left(\sum_{l}^{n}\sum_{j}^{n} a_{lj}\sigma_l\sigma_j\right)^{-1/2}$, где $a_{kk} = 1$; 2) $\rho_{(\xi_k, \eta)} = 1/\sqrt{n}$. 15. Вероятность равна ~~0,955~~ 0,8858 для свойства A; ~~0,68~~ 0,5704 — для свойства B. 16. 0,32332. 17. 0,9929. 18. а) 558; б) 541. 19. Да. 20. б) 0,9987. 21. 0,994. 22. 0,9759. 23. 0,9948. 24. Нормальное распределение с параметрами (0,1). 25. η равномерно распределена на $[-1,1]$.

§ 7

1. $F_n^*(x) = \begin{cases} 0; & x \le 2; \\ 0{,}25; & 2 < x \le 4; \\ 0{,}625; & 4 < x \le 6; \\ 0{,}75; & 6 < x \le 8; \\ 0{,}875; & 8 < x \le 10; \\ 1; & x > 10; \end{cases}$ $\bar{x} = 5$; $S_n^2 = 8$. **2.** $\frac{1}{5}$. **3.** 5.

4. $F_n^*(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0; \\ 0{,}6; & 0 < x \le 1; \\ 1; & x > 1; \end{cases}$ $\bar{x} = 0{,}4$; $\hat{\sigma}_n^2 \approx 0{,}266$; $\Theta = 0{,}4$.

5. 1) $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = 7$ – несмещенная оценка; 2) $\hat{\sigma}_n^2 =$ $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 7$ – смещенная оценка; $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $M\hat{\sigma}_n^2 =$ $= \frac{n-1}{n}\sigma^2$. **6.** 1) (3,83; 6,17), 2) (2,635; 7,365), 3) (3,61; 20,51), 4) (3,5; 33,13). **7.** 1) H_0 не отвергается, 2) H_0 не отвергается, 3) H_c не отвергается. **8.** H_0 не отвергается. **11.** а) $\hat{\beta} = x_n^*$; б) $\hat{\alpha} = x_1^*$; $\hat{\beta} = x_n^*$;

12. $P\{x_1^* < x\} = 1 - (1 - F_\xi(x))^n$; $P\{x_n^* < x\} = [F_\xi(x)]^n$; $P\{x_k^* < x\} =$

$$= \frac{n'}{(k-1)!1'(n-k)!}\int_0^{F_\xi(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt; \quad 1 < k < n.$$

14. $F_{x_1^*, x_n^*}(x,y) = \begin{cases} [F_\xi(x)]^n - [F_\xi(x) - F_\xi(y)]^n, & x \ge y; \\ [F_\xi(x)]^n, & x < y. \end{cases}$ **15.** $\widehat{M\xi} =$ $= \frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}{2} = \frac{x_1^* + x_n^*}{2}$; $M(\widehat{M\xi}) = M\xi$ – несмещенная. **16.** $\hat{\alpha} = \widehat{M\xi} +$ $+ \sqrt{3\hat{\sigma}_n^2}$; $\left(\widehat{M\xi} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k;\ \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \widehat{M\xi})^2\right)$; $\hat{\beta} = \widehat{M\xi} - \sqrt{3\hat{\sigma}_n^2}$.

18. а) не отвергается; б) отвергается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Студенты МИФИ, изучающие курс теории вероятностей, сдают по этому курсу либо зачет (в некоторых группах – с оценкой), либо экзамен. И в том, и в другом случае проверяется знание основных теоретических вопросов курса, а также умение решать задачи. На вопросы, относящиеся к основным понятиям и простейшим задачам, студент должен уметь отвечать без подготовки. Приведем примерный список таких вопросов, разбив его на два пункта: основные понятия и определения, теоремы и формулы.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Определение вероятностного пространства (на примерах классического и геометрического определения и на примере последовательности из n независимых испытаний).
2. Несовместность событий.
3. Независимость двух событий.
4. Случайная величина (определение и примеры).
5. Функция распределения, плотность распределения; закон распределения дискретной случайной величины.
6. Примеры распределений (нормальное, пуассоновское, биномиальное, равномерное).
7. Независимость случайных величин. Независимость дискретных и абсолютно непрерывных величин.
8. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, моменты, коэффициент корреляции.
9. Производящие и характеристические функции (определение, основные свойства).
10. Понятие случайной выборки, оценки неизвестного параметра распределения, состоятельность и несмещенность. Порядковые статистики. Интервальные оценки. Распределе-

ния χ_n^2 и Стьюдента. Критерии Пирсона, Колмогорова. Ошибки I и II рода.

ТЕОРЕМЫ И ФОРМУЛЫ

1. Вероятность заданного числа успехов в схеме Бернулли.
2. Формула полной вероятности и формулы Байеса.
3. Свойства математического ожидания и дисперсии.
4. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел.
5. Центральная предельная теорема.
6. Теорема Пуассона и Муавра-Лапласа для числа успехов в схеме Бернулли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М: Наука, 1987.
2. Методические указания по теме "Случайные величины, элементы математической статистики". М.: МИФИ, 1990.
3. Методические указания к практическим занятиям по курсу "Теория вероятностей". М.: МИФИ, 1991.
4. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1990.

СОДЕРЖАНИЕ

Елена Ивановна Полякова
Людмила Петровна Постникова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Редактор М В Макарова
Техн редактор С И Скитина
Корректор Е Е Шумакова

Тем план 1994 г, поз 74

Лицензия ЛР № 020676 от 09 12 92 г

Подписано в печать 4. 08 94 — Формат 60x84 1/16
Печ.л. 4,75 — Уч-изд.л 4,0 — Тираж 500 экз
Изд. № 017-1 — Заказ 291

Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет) Типография МИФИ 115409, Москва, Каширское шоссе, 31

$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$. $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

$\ln 10 = 2,30259$ $\int_0^\infty e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\ln 9 = 2,19722$

$\Phi_0(3.1)=0,49902$

$\Phi_0(3,2)=0,49931$

6.8. Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице не менее 2-х опечаток.

$\sum_{m=0}^{1} = 0,995321$

$\Phi_0(2)=0,47725$

Е. И. Полякова Л. П. Постникова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Москва 1994