Einführung in die Neuroinformatik SoSe 2019

Institut für Neuroinformatik

PD Dr. F. Schwenker

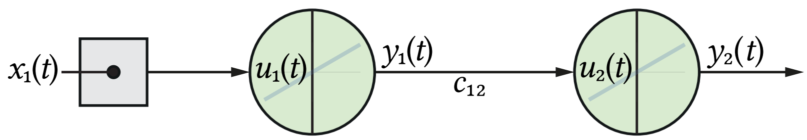
1. Aufgabenblatt (Abgabe bis 14. Mai 2019 zur Vorlesung)

Aufgabe 1 (10 Punkte): Lineares Neuronenmodell

Wir wollen uns in dieser Übung der Modellgleichung für Neuronenmodelle nähern

$$\tau \dot{u}_j(t) = -u_j(t) + x_j(t) + \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, y_i(t - d_{ij}), \qquad \tau > 0. \tag{1}$$

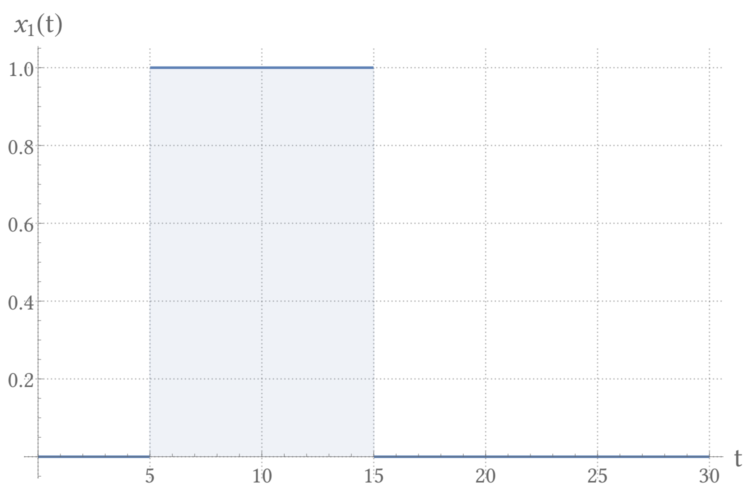
Um den Aufwand und die Komplexität zu reduzieren, werden wir die Situation jedoch stark vereinfachen, indem wir uns auf die Analyse von zwei einfachen linearen Neuronen beschränken. Dabei erhält das 1. Neuron einen externen Input von der Außenwelt (z. B. ein sensorisches Signal wie Lichtwellen) und gibt dieses an ein 2. Neuron weiter:



Wir werden den Zeitbereich $t \in [0; 30]$ betrachten, indem der externe Input definiert sei als

$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 5 \\ 1 & 5 \le t \le 15 \\ 0 & t > 15 \end{cases}$$

bzw. wie auch in folgender Grafik dargestellt:



Ein paar der Parameter wollen wir direkt definieren:

- $d_{ij} = 0$: es gibt keine Übertragungszeit zwischen den Neuronen.
- $\forall t : x_2(t) = 0$: das 2. Neuron erhält keinen externen Input.
- $y_i(t) = u_i(t)$: lineare Transferfunktionen (damit entspricht das dendritische Potenzial dem axonalen Potenzial in unserem Modell).
- $c_{11} = c_{21} = c_{22} = 0$: es existiert nur die in der Grafik gezeigte Verbindung.

Beginnen wir nun mit der Analyse.

1. [Pen and Paper] Stelle die Differentialgleichungen des dendritischen Potenzials für die beiden Neuronen auf (Gleichung 1)

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= \dots \\ \dot{u}_2(t) &= \dots \end{aligned} \tag{2}$$

2. [Pen and Paper] Was ist die maximal mögliche Ausgabe jedes Neurons?

3. [Python] Mit Gleichung 2 haben wir eine Definition, wie sich die dendritischen Potenziale über die Zeit verändern, aber eigentlich sind wir an den Werten der dendritischen Potenziale selbst interessiert. Eine gängige Lösung für Differentialgleichungen ist, die Funktionswerte $u_i(t)$ über die Zeit mit Hilfe des Differenzenquotienten

$$\dot{u}_i(t) \approx \frac{u_i(t + \Delta t) - u_i(t)}{\Delta t}$$

zu diskretisieren. D. h., wir starten ausgehend vom initialen Wert für $u_i(t)$, berechnen die Ableitung zum Zeitpunkt t und verändern dann den folgenden Funktionswert $u_i(t + \Delta t)$ ausgehend vom vorherigen Funktionswert $u_i(t)$ und dem Wert der approximierten Ableitung $\dot{u}_i(t)$, was uns zur Gleichung

$$u_i(t + \Delta t) = u_i(t) + \Delta t \cdot \dot{u}_i(t). \tag{3}$$

führt. In diesem Sinne können wir uns den realen Funktionswerten durch lokale lineare Approximation annähern.

Implementiere eine Funktion `lin_model(tau, weight)`, welche die Diskretisierungen (Gleichung 3) von $u_i(t)$ mit Hilfe der bestimmten Ableitungen (Gleichung 2) anhand der Zeitkonstante τ und des Gewichtes c_{12} berechnet. Alle Funktionswerte sollen in einem Vektor gespeichert werden. Berechne und speichere zudem auch die Ableitungswerte $\dot{u}_i(t)$. Beginne mit $u_i(0) = 0$ und berechne die Werte bis einschließlich $t_{end} = 30$ bei einer Schrittweite von $\Delta t = 0.1$. Die Funktion soll die folgenden Vektoren zurückgeben:

- Vektor mit den diskreten Zeitschritten $0, 0.1, \dots, 30$.
- Vektor mit den Ableitungswerten $\dot{u}_1(t)$.

- Vektor mit den Ableitungswerten $\dot{u}_2(t)$.
- Vektor mit den Potenzialen $u_1(t)$.
- Vektor mit den Potenzialen $u_2(t)$

4. [Python] Wir wollen nun das Ergebnis grafisch darstellen.
   a) Implementiere eine Funktion `plot_model(tau, weight)`, welche die dendritischen Potenziale $u_i(t)$ sowie die Ableitungen $\dot{u}_i(t)$ in einer Grafik anzeigt (hierfür bietet sich z. B. `matplotlib.pyplot.subplots` an).
   b) Um den Einfluss der verschiedenen Parameter zu testen, bietet sich die Verwendung von interaktiven Widgets an. Definiere dazu `FloatSlider` (aus dem `ipywidgets` -Paket) für die Parameter τ und c_{12} und zeige das Ergebnis mit Hilfe von `interact` an.
5. [Pen and Paper] Wir wollen nun unsere Ergebnisse noch diskutieren.
   a) Erkläre, wieso die Funktionswerte bei $t = 15$ abfallen und welche biologische Motivation es dafür gibt.
   b) Welchen Einfluss hat die Zeitkonstante τ? Gehe dazu auf die Fälle
      i. $\tau > 1$
      ii. $\tau < 1$

      ein und interpretiere die Veränderungen.
   c) Was für ein Ergebnis erhalten wir für $u_1(t)$ und $u_2(t)$, wenn wir $\tau = 0$ setzen (d. h., wenn wir diesen Fall doch noch in Gleichung 1 zulassen)?
   d) Beschreibe kurz den Einfluss des Gewichtes c_{12}.
   e) Beschreibe kurz (keine Rechnung notwendig), wie sich der Graph für $u_2(t)$ verändern würde, wenn wir doch noch eine Übertragungszeit zwischen den Neuronen modellieren würden, d. h. wenn $d_{12} > 0$?