Алгоритмы 2

Максим Пасько

17 февраля 2018 г.

1

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i^3+2i+5}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i^3(1+\frac{2}{i^2}+\frac{5}{i^3})}\leq\sum_{i=1}^{n}\sqrt{n^3(1+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3})}=O(n^{\frac{5}{2}})$$

С другой стороны:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i^3+2i+5}>\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i^3}>\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\sqrt{(\frac{n}{2})^3}=\Omega(n^{\frac{5}{2}})$$

То есть,

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i^3+2i+5}=\Theta(n^{\frac{5}{2}})$$

2

$$f(n)\leq(3+1)^n+\Theta(n^{100})=4^n+\Theta(n^{100})$$

Так как показательная функция растёт быстрее полинома, то, начиная с некоторого n_0, справедливо:

$$4^n+\Theta(n^{100})\leq 4^n+4^n=2^{2n+1}$$

Логарифмируем, получаем:

$$\log(f(n))\leq 2n+1\leq 3n$$

С другой стороны аналогичным способом:

$$f(n)\geq(3-1)^n+\Theta(n^{100})\ =2^n+\Theta(n^{100})\geq 2^n$$

Логарифмируя, получаем:

$$\log(f(n))\geq n$$

То есть, утверждение $\log(f(n))=\Theta(n)$ верно.

3

Второй внутренний цикл будет выводить всегда одинаковое колиество слов, а именно $\log n$, а первый внутренний будет выводить линейное количество слов, поэтому, считая ассимптотику, можно не учитывать второй внутренний цикл, считая лишь по первому. Тогда нам надо посчитать сумму

$$\sum_{b=1}^{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{b} \frac{i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{b} i = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+2)}{6}$$

Тогда $g(n) = \Theta(n^{\frac{3}{2}})$.

5

Алгоритм дойдёт до $x = 0$. Соответственно, $(q, r) = (0, 0)$. Если мы будем таким образом идти с конца, то каждый раз x будет увеличиваться в 2 раза, аналгоично q и r, но т.к. q есть частное, а $0 \leq r < y$, в необходимых случаях алгоритм будет прибавлять единицу к q, а из r вычитать y, вгоняя r в нужный полуинтервал.

Если $x' = qy + r$, то $2x' = 2qy + 2r$, $2x' + 1 = 2qy + r + 1$. А так как $x' = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, то $x = 2x'$ или $x = 2x' + 1$ (в зависимости от чётности).

Так как алгоритм на каждом шагу делит x на два, то его двоичная запись укорачивается на единицу. Тогда, на каком-то шаге двоичная запись числа x требовала n цифр, то на следующем потребуется $n-1$ цифр. Таких шагов будет n штук, тогда ассимптотика алгорима будет:

$$\sum_{i=1}^{n} i = O(n^2)$$

.