Алгоритмы 4

Максим Пасько

4 марта 2018 г.

1

1.1

F(3,5):
$y = 1 \to y = 3 \to y = 9 \to y = 81 \to y = 243$ F(3,5) = 243.

1.2

F(x,m) - возведение числа x в степень m.

1.3

Данный алгоритм на каждом шаге или возводит имеющееся число в квадрат, или умножает его на исходное число x. Удобнее будет сказать, что алгоритм увеличевает степень числа или вдвое, или на единицу. Грубо говоря, на входе у него число 0, а он из него получает число m путём прибавления 1 или умножения на 2. Тогда, если $a[i] == S$, алгоритм умножит степень на 2, а иначе прибавит к ней единицу.

Пусть у нас есть степень M, имеющая такую двоичную запись:

$$M = x_0 + x_1 * 2^1 + x_2 * 2^2 + ... + x_n * 2^n,$$

где $x_i \in 0, 1$. Запишем M иначе:

$$M = x_0 + 2(x_1 + 2(x_2 + ...2(x_{n-1} + 2x_n)...)).$$

А данная запись M - это и есть инструкция, состоящая из прибавления едицы и умножения на два, начиная как раз с первой цифры двоичной записи M.

1.4

Максимальная длина a - $2*n$, где n - кол-во цифр двоичной записи числа m, которая есть $\log m$ Алгоритм проходит по массиву a один раз, выполняя одну арифметическую операцию на каждом шагу $\Rightarrow$ ассимптотика $O(\log m)$.

2

Найдём $\frac{2n}{3}$-ую и $\frac{2n}{3}+1$-ую порядковые статистики. Тогда первая порядковая статистика даст нам l_1 и r_1 - такие точки, которые будут границами искомого множества точек, причём они будут входить в множество, а вторая порядковая статистика даст l_2 и r_2 - другие границы этого множества, но сами эти точки не будут входить в него.

Тогда искомое множество будет: $[l_1, l_2) \bigcup (r_2, r_1]$.

Так как поиск порядковой статистики занимает $O(n)$, то и наш алгоритм будет иметь ассимптотику $O(n)$.

3

Пусть мы разделили массив длины n на группы по семь элеметов, то есть получилось $\lceil \frac{n}{7} \rceil$ групп. В каждой из них найдём медиану, и для этих медиан найдём свою медиану, пусть она равна x. Для x есть не менее половины от общего числа медиан, которые не меньше x. А для таких медиан в соответствующих группах есть 4 числа, не меньших этих медиан. То есть, как минимум половина из $\lfloor \frac{n}{7} \rfloor$ групп даёт 4 числа, не меньших x.

$$4 * \frac{1}{2} * \lfloor \frac{n}{7} \rfloor \geq \frac{2n}{7} - 1$$

Также доказваем, что столько элементов не больших медианы медиан. Тогда Select, вызываемый на 5-ом шаге, будет обрабатывать массив длиной не больше $\frac{5n}{7} + 1$.

Тогда

$$T(n) \leq T(\lceil \frac{n}{7} \rceil) + T(\lfloor \frac{5n}{7} + 1 \rfloor) + O(n)$$

И его ассимптотика будет $O(n)$.

4

Создадим новый массив a длины n, изначально заполненный нулями. Пройдёмся один раз по данному нам массиву, считая количество нулей в нём. Когда дойдём до конца, заполним массив a, начиная с $x + 1$-го элемента и до конца, где x - количество нулей в данном массиве, единицами. Получим отсортированый массив.

5

Нам необходимо получить общее решение уравнения

$$ax + My = -b.$$

Найдём частное решение по расширенному алгоритму Евклида. Пусть оно будет (x_0, y_0). Тогда общее решение уравнения будет

$$x = x_0 + k\frac{M}{gcd(a, M)}; y = y_0 + k\frac{a}{gcd(a, M)}, k \in \mathbf{Z}$$

Ассимптотика алгоритма равна ассимптотике расширенного алгоритма Евклида, то есть $O(n^3)$.

6

6.1

Худший случай - возрастающий массив. Для такого массива быстрая сортировка будет выполнять на каждом уровне рекурсии Partition, который будет проходить весь массив, возвращая предпоследний элемент. Тогда глубина стека будет $\Theta(n)$.