АМВ ДЗ №1

Максим Пасько

7 марта 2019 г.

Задание 1

i

Считаем, что $x_{i-1} > yi - 1$.
Пусть $x_{i-1} = ky_{i-1} + p$, где $0 \leq p < y_{i-1}$, а $k \in \boldsymbol{N}$.
Тогда

$$s_{i-1} = x_{i-1} + y_{i-1} = (k+1)y_{i-1} + p,$$
$$s_i = y_{i-1} + (x_{i-1} mod y_{i-1}) = y_{i-1} + p$$

Попробуем оценить разность:

$$\frac{2}{3}s_{i-1} - si = \frac{2}{3}y_{i-1}(k+1) + \frac{2}{3}p - yi - 1 - p = y_{i-1}(\frac{2}{3}k - \frac{1}{3}) - \frac{1}{3p} = \frac{1}{3}(y_{i-1}(2k-1) - p)$$

Так как $2k-1 \geq 0$ и $p < y_{i-1}$, то эта разность больше нуля, что доказывает требуемое неравенство.

ii

$$gcd(F_{m+2}, F_{m+1}) = gcd(F_{m+1}, F_{m+2} mod F_{m+1})$$
$$F_{m+2} = F_{m+1} + F_m \Rightarrow F_{m+2} mod F_{m+1} = F_m$$

Тогда получаем, что

$$gcd(F_{m+2}, F_{m+1}) = gcd(F_{m+1}, F_m)$$

Таким образом, мы "спустимся"до $gcd(3, 2) = 1$.

Задание 2

То, количество чего спрашивается в задаче, есть непосредственно правильная скобочная последовательность из $2n - 2$ скобок, и все эти последовательности заключены в ещё одни скобки. А число таких последовательностей - число Каталана $C(n-1)$.

Задание 3

Пусть мы знаем количество способов замостить полосу длиной до $n - 1$ (назовём это $F(i), i \in [0, n-1]$) включительно. Попробуем посчитать количество способов замостить полосу длиной n:
Разделим сначала полосу на две длиной $n - 1$ и 1 соответственно. Тогда

вариантов совместного замощения этих полос $F(n-1)*F(1) = F(n-1)$. Теперь разделим исходную полосу на две длиной $n-2$ и 2 соответственно. Вариантов совместного их замощения $F(n-2)*F(2) = 4F(n-2)$. При этом заметим, что мы и в первом и во втором разбиениях посчитали вариант, когда последний прямоугольничек размера $2*1$ в полосе $2*n$ замощён серым вертикальным прямоугольником.
Также заметим, что в этих разбиениях мы учли все те варианты, когда полоса $2*n$ разбивается на полосы размера $2*(n-k)$ и $2*k$ cooветственно, так как полоса дилны $n-2$ разбивается на полосы длины $n-3$ и 1 и так далее.

Определим $F(0)$ как количество способов замостить полосу длиной 0, то есть как количество способой не брать никакие квадратики, прямоугольники. Логично сказать, что мы только одним способом можем выбрать такое замощение - это ничего не трогать.

Таким образом, получаем рекуррентное соотношение

$$F(n) = F(n-1) + 3F(n-2)$$

.

Найдём явное выражение для $F(n)$:

$$\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$$

. Отсюда получаем $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. Тогда

$$F(n) = C_1(\frac{1+\sqrt{13}}{2})^n + C_2(\frac{1-\sqrt{13}}{2})^n$$

$F(0) = 1, F(1) = 1$. Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\frac{1+\sqrt{13}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{13}}{2} = 1 \end{cases}$$

Решая её, получаем:

$$C_1 = \frac{\sqrt{13}-1}{2\sqrt{13}}, C_2 = \frac{\sqrt{13}+1}{2\sqrt{13}}$$

Из этого получается явная формула для $F(n)$ и асимптотика, которая равна $\Theta((\frac{1+\sqrt{13}}{2})^n)$.

Задание 4

По условию задачи $u \approx \frac{k}{4}$, так что

$$G(k) = 4G_3(\frac{k}{4}) + \Theta(k^3)$$