Алгоритмы 10(Юбилейные)

Максим Пасько

22 апреля 2018 г.

Задание 1

а)

Пусть MST(G) имеет вес x. Тогда вес любого другого дерева из G не меньше x. Если мы увеличим все рёбра на ω, то вес того же MST(G) будет $x+\omega(|V|-1)$, а вес любых других деревьев будет не меньше $x+\omega(|V|-1)$. Тогда ответ **верно**.

б)

Пусть ребро e является этим ребром. Предположим, оно не входит в MST(G). Тогда добавим его в это дерево, получим в этом дереве цикл. В этом цикле мы уберём любое ребро, отличное от e. Такое ребро будет тяжелее e, дерево останется остовным, но его вес уменьшится $\Rightarrow$ оно входит в MST(G). Тогда ответ **верно**.

г)

Пусть:

$V = a, b, c, d, \quad E = (a, b, 1), (b, c, 7), (a, c, 11), (b, d, 4), (c, d, 5)$

MST(G)(дерево единственно, т.к. веса всех рёбер различны) состоит из рёбер $(a, b, 1), (b, d, 4), (c, d, 5)$. Кратчайший путь из a в c - $a \longrightarrow b \longrightarrow c = 8$. Тогда ответ **Неверно**.

Задание 2

Мы можем как-то модифицировать алгоритм Прима так, чтобы он нам выдал T. Пусть мы получили дерево T при использовании алгоритма Прима из вершины s. Удалим рёбра из G, чтобы получить H. Тогда, если ребро входит и в T, и в H, то при использовании ещё раз алгоритма Прима из вершины s такое ребро войдёт в MST(H), ибо оно будет наименьшим из разреза, где мы выбираем наименьшее ребро.

Задание 4

Модифицируем алгорим Крускала для нашей задачи таким образом:
Создадим массив на $|U|$ элементов, где мы будем хранить степени вершин. Изначально он заполнен нулями. Когда мы будем проходить по

отсортированному массиву рёбер, будем проверять, смежно ли это ребно какой-либо вершине из U, степень которой не ноль(то есть, единица). Тогда в нашем дереве все вершины из U будут иметь степень 1, а значит, они являются листьями.

Доказательство следует из доказательства алгоритма Крускала.

Асимптотика алгоритма совпадает с асимптотикой алгоритма Крускала, т.к. проверка степени вершины требует $O(1)$.