Опты, дз 2

Максим Пасько 776

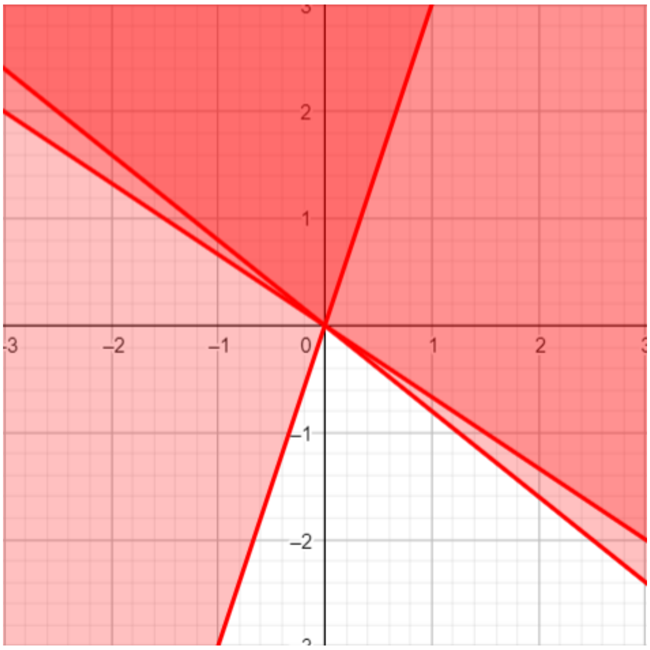
Conjugate sets

1

$S = \textbf{cone}\{(-3,1),(2,3),(4,5)\}$
Используя теорему о сопряжённом к многогранному множеству, получаем

$$S^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad -3x + y \geq 0, \quad 2x + 3y \geq 0, \quad 4x + 5y \geq 0\}$$

(самая яркая красная область и есть S^*)



2

Исходное множество S можно представить как $S = \textbf{conv}\{(0,0),(\frac{4}{3},-\frac{4}{3})\} + \textbf{cone}\{(1,2),(-1,2)\}$.
Тогда, используя теорему о сопряжённом к многогранному множеству, получим, что

$$S^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y \geq -1, \quad x + 2y \geq 0, \quad -x + 2y \geq 0\}$$

При этом, S и S^* являются выпуклыми, замкнутыми и содержат нуль, поэтому
$S^{**} = S$, а $S^{***} = S^*$.

3

Для начала отметим, что $\mathbb{S}^n_+ = \{xx^T \quad | \quad x \in \mathbb{R}^n\}$, а $x^TAx = \langle A, xx^T \rangle$.
Покажем, что $C = \mathbb{S}^n_+$ является самосопряжённым конусом:
$\underline{1) C \subset C^* :}$
Пусть $A \in C$, т.е. $x^TAx \geq 0$. При этом, $x^TAx = \langle A, xx^T \rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle A, B \rangle \geq 0 \quad \forall B \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow A \in C^*$.
$\underline{2) C^* \subset C :}$
Пусть $A \in C^*$. Тогда $\langle A, B \rangle \geq 0 \quad \forall B \in C$. При этом, $\exists x \in \mathbb{R}^n : B = xx^T$. Тогда
$0 \leq \langle A, xx^T \rangle = x^TAx \quad \Rightarrow \quad A \in C$.

4

$K = \{(x, y, z) \quad | \quad y > 0, \quad ye^{\frac{x}{y}} \leq z\}$.
$K^* = \{(a, b, c) \quad | \quad ax + by + cz \geq 0 \quad \forall (x, y, z) \in K\}$.
Так как $y > 0$, справедливо будет $a\dfrac{x}{y} + b + c\dfrac{z}{y} \geq 0$. Рассмотрим три случая:
$\underline{1) c > 0 :}$
Так как K^* тоже конус, то можно считать, что $c = 1$, т.к. верно будет и для $\lambda c, \quad \lambda \geq 0$. Сделаем замену $\dfrac{x}{y} = p, \dfrac{z}{y} = q$. Тогда, при $c = 1$, числа a и b будут находиться из условий $ap + b + q \geq 0, q \geq e^p$. То есть, искомые a и b будут коэффициетом наклона и свободным коэффициентом соответственно таких прямых, которые или не пересекают график экспоненты, или хотя бы касаются его. Такое множество полностью задаётся множеством касательных к экспоненте (просто двигаем вправо касательную, увеличивая коэффициент b). Тогда получаем: $\begin{cases} a = -e^p \\ b = -ap - e^p \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -e^p \\ b = a(1 - \ln(-a)) \end{cases}$. Также надо учесть горизонтальные прямые, которые лежат ниже экспоненты: $q = -b, b \geq 0$. Тогда при $c > 0$ итоговая область будет

$$\{(\lambda a, \lambda b, \lambda) \quad | \quad \lambda \geq 0, \quad b \geq a(1 - \ln(-a)) \text{ или } a = 0, b \geq 0\}$$

$\underline{2) c = 0 :}$
В этом случае просто получаем $ap + b \geq 0 \quad \forall p$, то есть $a = 0, b \geq 0$, а это мы уже учли в первом случае.
$\underline{3) c < 0 :}$
Тогда a и b ищем из условий $q \leq ap + b, \quad q \geq e^p$. Понятно, что таких a и b не существует, т.к. только в верхней полуплоскости, задаваемой прямой, может полностью содержаться надграфик экспоненты.

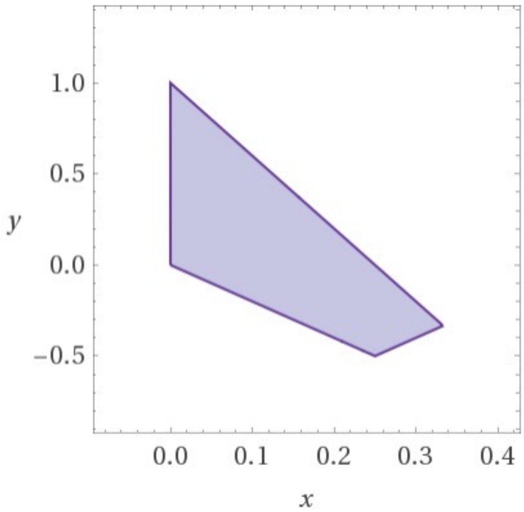
Итого, получаем, что

$$K^* = \{(a, b, c) \quad | \quad c \geq 0, \quad a < 0, \quad -a\ln(-\frac{a}{c}) + a - b \leq 0 \text{ или } a = 0, b \geq 0\}$$

5

Используя теорему о сопряжённом к многогранному множеству, получаем

$$S^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad -4x - y \geq -1, \quad -2x - y \geq -1, \quad -2x + y \geq -1, \quad x \geq 0, \quad 2x + y \geq 0\}$$



6

Пусть $S^* = \{y \quad | \quad \langle x, y\rangle \leq 1 \quad \forall x \in S\}$.
Если $S = S^*$, то $\forall x \in S \quad \langle x, x\rangle \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \|x\| \leq 1$, то есть самосопряжённым множеством будет замкнутый единичный шар с центром в нуле.

7

$S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \langle x, y\rangle \geq -1 \quad \forall x \in S\}$.
$\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Пусть $z_i = |a_i| x_i$. Тогда $S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \dfrac{y_i}{|a_i|} \geq -1 \quad \forall z \in B_\varepsilon(0)\}$.
Пусть $p_i = \dfrac{y_i}{|a_i|}$. Тогда S^* будет сопряжённым к замкнутому шару радиуса ε с центром в нуле, то есть шаром радиуса $\dfrac{1}{\varepsilon}$, то есть $S^* = \{p \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^2 \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2}\}$, или же

$$S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{a_i^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\}$$

Conjugate function

1

$f(x) = -\dfrac{1}{x}, x \in \mathbb{R}_{++}$
$f^*(y) = \sup\limits_{x>0}(xy + \dfrac{1}{x}) = \sup\limits_{x>0} g(x, y)$. Функция $g(x, y)$ неограничена сверху при $y > 0$ (можно подобрать сколь угодно большой x, который даст сколь угодно большой xy), неограничена сверху и при $y \leq 0$ (можно подобрать сколь угодно малый x, который даст сколь угодно большой $\dfrac{1}{x}$). Значит, $f^*(y) = +\infty \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

2

$f(x) = -\dfrac{1}{2} - \ln x, \quad x > 0$
$f^*(y) = \sup\limits_{x>0}(xy + \dfrac{1}{2} + \ln x) = \sup\limits_{x>0} g(x, y)$. Функция $g(x, y)$ неограничена сверху при $y \geq$

$0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{dom}\ f^*(y) = \{y \quad | \quad y < 0\}$.
$\nabla_x g(x,y) = y + \dfrac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad f^*(y) = \ln(-\dfrac{1}{y}) - \dfrac{1}{2}$

3

$f(x) = \ln \sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i}$
$f^*(y) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \ln \sum\limits_{j=1}^{n} e^x_j) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} g(x,y)$. Функция $g(x,y)$ ограничена сверху при $\mathbf{0} \prec y \prec \mathbf{1}$, т.е. $0 < y_i < 1, \quad i = \overline{1,n}$.
$\nabla_{x_k} g(x,y) = y_k - \dfrac{e^{x_k}}{\sum\limits_{j=1}^{n} e^{x_j}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_k = \ln(y_k \sum\limits_{j=1}^{n} e^{x_j})$. Обозначим $\sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i}$ как S. Тогда

$$g = \sum_{i=1}^{n} y_i \ln(y_i S) - \ln(\sum_{j=1}^{n} y_j S) = \sum_{i=1}^{n} y_i \ln S + \sum_{i=1}^{n} y_i \ln y_i - \sum_{j=1}^{n} y_j \ln S = \sum_{i=1}^{n} y_i \ln y_i$$

4

$f(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}, \quad |x| \le a$
$f^*(y) = \sup\limits_{|x|\le a} (xy + \sqrt{a^2 - x^2}) = \sup\limits_{|x|\le |a|} g(x,y)$, функция $g(x,y)$ ограничена при всех y.
$\nabla_x g(x,y) = y - \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \Rightarrow \quad x = ay\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \Rightarrow \quad f^*(y) =$
$= \dfrac{a}{\sqrt{1+y^2}}(y^2+1) = a\sqrt{1+y^2}$.

5

$f(X) = -\ln\det X, \quad X \in S^n_{++}$ $f^*(Y) = \sup(\langle X, Y\rangle + \ln\det X) = \sup g(X,Y)$.
$\nabla_X g(X,Y) = Y^T + X^{-1} = \mathbf{O} \quad \Rightarrow \quad X^{-1} = -Y^T \quad \Rightarrow \quad X = (-Y)^{-T} \quad \Rightarrow$
$f^*(Y) = \langle Y, (-Y)^{-T}\rangle + \ln\det(-Y)^{-T} = \mathbf{tr}(Y^T(-Y)^{-T}) - \ln\det(-Y^T) = -n - \ln\det(-Y)$.

6

$f(x) = g(Ax)$.
$f^*(y) = \sup(\langle x, y\rangle - f(x))$
$g^*(A^{-T}x) = \sup(\langle A^{-T}y, z\rangle - g(z)) = \sup(y^T A^{-1} z - g(z)) = (z = Ax) = \sup(y^T x - g(Ax)) = \sup(\langle y, x\rangle - f(x)) = f^*(y)$.

Subgradient and subdifferential

1

$\Rightarrow$:
Пусть x_0 - точка минимума $f(x)$. Тогда $f(x) \ge f(x_0) \quad \forall x$. При этом, $\langle 0, x - x_0\rangle = 0$. Тогда $f(x) \ge f(x_0) + \langle 0, x - x_0\rangle \quad \forall x \quad \Rightarrow 0$ является субградиентом f в x_0, т.е. $0 \in \partial f(x_0)$.
$\Leftarrow$:
Пусть $0 \in \partial f(x_0)$. Тогда $f(x) \ge f(x_0) + \langle 0, x - x_0\rangle \quad \forall x$. При этом, $\langle 0, x - x_0\rangle = 0$. Тогда $f(x) \ge f(x_0) \quad \forall x$, т.е. x_0 - точка минимума $f(x)$.

2

$f(x) = \max\{0, x\}$.

Используя теорему Дубовицкого-Милютина, в точке $x_0 = 0$ субдифференциал $\partial f(x_0) = \mathbf{conv}(0, 1) = [0, 1]$, а в остальных точках определяется градиентом функции (т.к. она там дифференцируема). Итого, получим:

$$\partial f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ [0,1] & \text{if } x = 0 \\ 1, & \text{if } x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

3

1)$p = 1$:

$f(x) = \|x\|_1 = |x_1| + ... + |x_n| = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i x_i, \quad s_i \in \{-1, 1\}$.

$$g(x) = s^T x \quad \Rightarrow \quad \partial g(x) = \partial(\max\{s^T x, -s^T x\}) = \begin{cases} -s & \text{if } s^T x < 0 \\ \mathbf{conv}(-s, s) & \text{if } s^T x = 0 \\ s & \text{if } s^T x > 0 \end{cases}$$

Тогда, используя теорему Дубовицкого-Милютина, получим, что

$$\partial f(x) = \{g \quad | \quad \|x\|_\infty \leq 1, \quad g^T x = \|x\|_1\}$$

2)$p = 2$:

$f(x) = \|x\|_2$ является дифференцируемой везде, кроме 0. Поэтому, везде, кроме нуля $\partial f(x) = \nabla f(x) = \dfrac{x}{\|x\|_2}$. Покажем, что в нуле $\partial f(0) = B_1(0)$ - замкнутый шар радиуса 1 с центром в нуле.

1)$\partial f(0) \subset B_1(0)$:

Пусть $g \in \partial f(0)$. Тогда $f(x) \geq f(0) + \langle g, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. То есть, $\|x\|_2 \geq \langle g, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Тогда для $x = g$ получим, что $\|g\|_2 \geq \langle g, g \rangle = \|g\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \|g\|_2 \leq 1$. То есть, $g \in B_1(0)$.

2)$B_1(0) \subset \partial f(0)$:

Пусть $g \in B_1(0)$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle g, x - 0 \rangle + f(0) = \langle g, x \rangle \leq \|g\|_2 \|x\|_2 \leq \|x\|_2 = f(x)$, то есть $g \in \partial f(0)$.

В итоге, получаем, что

$$\partial f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\|x\|_2} & \text{if } x \neq 0 \\ B_1(0) & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

3)$p = \infty$:

$f(x) = \max\limits_{i \in \overline{1,n}} |x_i| = s^T x, \quad s_i = \begin{cases} -1, & \text{if } f(x) = -x_i \\ 0 & \text{if } f(x) \neq |x_i| \\ 1 & \text{if } f(x) = x_i \end{cases}$ - это если максимум x_i реализуется только на одной координате.

Теперь пусть максимум x_i реализуется на координатах $x_j, \quad j \in J$. Тогда $s_i = 0 \quad \forall i \notin J$, $\|s\|_\infty = 1$.

В нуле же опять $\partial f(0) = \{g \quad | \quad \|g\|_\infty \leq 1\}$.
Итого, применяя теорему Дубовского-Милютина, получаем:

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{g \quad | \quad \|g\|_1 = 1, \quad g^T x = \|x\|_\infty\} & \text{if } x \neq 0 \\ \{g \quad | \quad \|g\|_\infty \leq 1, \quad g^T x = \|x\|_\infty\} & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

4

$f(x) = \|Ax - b\|_1^2$
$f(x) = \varphi(Ax - b), \quad \varphi(t) = \|t\|_1^2$.
$\partial(\varphi(Ax - b))(x) = A^T \partial\varphi(Ax - b)$.
$\partial\varphi(t) = 2\|t\|_1 \partial(\|t\|_1) = \{2g\|t\|_1 \quad | \quad \|g\|_\infty \leq 1, \quad g^T t = \|t\|_1\}$.
Тогда $\partial f(x) = \{2\|Ax - b\|_1 A^T g \quad | \quad \|g\|_\infty \leq 1, \quad g^T(Ax - b) = \|Ax - b\|_1\}$

5

$f(x) = e^{\|x\|}$.
$\varphi(t) = e^t \quad \Rightarrow \quad f(x) = \varphi(\|x\|)$
Тогда, используя уже найденный субдифференциал к $\|x\|$, получим

$$\partial f(x) = e^{\|x\|} \partial(\|x\|)(x) = \partial f(x) = \begin{cases} B_1(0) & \text{if } x = 0 \\ \dfrac{xe^{\|x\|}}{\|x\|} & \text{if } x \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$