Опты, дз 1

Максим Пасько 776

Matrix Calculus

1

$f(x) = ||Ax||_2 =< Ax, Ax >^{\frac{1}{2}}$
$d(f) = \frac{1}{2} < Ax, Ax >^{-\frac{1}{2}} d(< Ax, Ax >)$
$d(< Ax, Ax >) = d(x^T A^T Ax) = d(x^T)A^T Ax + x^T A^T Adx = 2x^T A^T Adx =$
$2 < A^T Ax, dx > \quad \Rightarrow \quad \nabla f = \dfrac{A^T Ax}{||Ax||_2}$

3

$$\frac{\partial}{\partial X}||X||_F^2 = \frac{\partial}{\partial X} < X, X >= 2 < \frac{\partial X}{\partial X}, X >= 2X$$

4

$$d(f(x)) = \frac{d(< Ax, x >)}{< Ax, x >} = \frac{< Adx, x > + < Ax, dx >}{< Ax, x >} = \frac{< x, Adx > + < Ax, dx >}{< Ax, x >} =$$
$$\frac{< A^T x, dx > + < Ax, dx >}{< Ax, x >} = \frac{< (A^T + A)x, dx >}{< Ax, x >} \quad \Rightarrow \quad \nabla f = \frac{(A^T + A)x}{< Ax, x >}$$

Convex sets

1

Пусть S - выпуклое множество.
$\theta S + (1 - \theta)S \subseteq S \quad \Rightarrow \quad \theta intS + (1 - \theta)intS \subseteq S.$
При этом, $\theta intS + (1 - \theta)intS$ - открытое множество, откуда следует, что
$\theta intS + (1 - \theta)intS \subseteq intS \quad \Rightarrow \quad intS$ - выпуклое.
Обратное, вообще говоря, не верно.

Рис. 1: Контрпример к 1

Внутренностью в данном случае будет открытый квадрат, который явыляется выпуклым множеством, но само множество не является выпуклым.

2

Пусть $A, B \in S^n_{++}$. Тогда $C = \theta A + (1-\theta)B = \theta A^T + (1-\theta)B^T = C^T$ - то есть, С симметричная.
$x^T Ax > 0, x^T Bx > 0$. Тогда $x^T Cx = \theta x^T Ax + (1-\theta)x^T Bx > 0 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad C \succ 0 \quad \Rightarrow \quad C \in S^n_{++}$, а значит, S^n_{++} - выпуклое множество.

3

Пусть $x, y \in H = \{x \in \mathbb{R}^n_+ | \prod\limits_{i=1}^{n} x_i \geq 1\}$.
Тогда для $z = \theta x + (1-\theta)y$ справедливо:
$\prod\limits_{i=1}^{n}(\theta x_i + (1-\theta)y_i) \geq \prod\limits_{i=1}^{n}(x_i^\theta y_i^{1-\theta}) = (\prod\limits_{i=1}^{n} x_i)^\theta (\prod\limits_{i=1}^{n} y_i)^{1-\theta} \geq 1 \Rightarrow z \in H \Rightarrow$
$\Rightarrow H-$ выпуклое.

4

- Пусть сначала S - выпуклое:

$(\alpha+\beta)S \subset \alpha S + \beta S$ - очевидно.
Докажем, что $(\alpha+\beta)S \supset \alpha S + \beta S$:
Пусть $x, y \in S$. Тогда, т.к. S - выпуклое, верно

$$z = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y \in S$$

Тогда $(\alpha+\beta)z = \alpha x + \beta y \quad \Rightarrow \quad (\alpha+\beta)S \supset \alpha S + \beta S$
Значит, $(\alpha+\beta)S = \alpha S + \beta S$.

- Теперь пусть $(\alpha+\beta)S = \alpha S + \beta S \quad \forall \alpha, \beta \geq 0$:

Тогда это эквивалентно $S = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}S + (1 - \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta})S$, что эквивалентно определению выпуклости при $\theta = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

5

1) $\mathbb{P}(x > \alpha) \leq \beta = M$

Пусть $a_{k-1} < \alpha < a_k$. Тогда $\mathbb{P}(x > \alpha) = \sum\limits_{i=k}^{n} p_i \leq \beta$.

Пусть $p, q \in M$. Тогда $\sum\limits_{i=k}^{n} \theta p_i + (1-\theta) q_i = \theta \sum\limits_{i=k}^{n} p_i + (1-\theta) \sum\limits_{i=k}^{n} q_i \leq \theta\beta +$
$+ (1-\theta)\beta = \beta$, т.е. множество выпуклое.

2) $\mathbb{E}|x^{201}| \leq \alpha \mathbb{E}|x| = M$

$\mathbb{E}|x^{201}| = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i |a_i^{201}|$

$\alpha \mathbb{E}|x| = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} p_i |a_i|$

Тогда M задаётся как $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i (|a_i^{201}| - \alpha a_i) \leq 0$ - плоскость, ограниченная линейной по p функцией, то есть M - выпуклое множество.

3) $\mathbb{E}x^2 \geq \alpha = M$

$\mathbb{E}x^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^2$ - по тем же соображениям выпукло.

4) $\mathbb{V}x \geq \alpha = M$

$\mathbb{V}x = \mathbb{E}x^2 - (\mathbb{E}x)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^2 - (\sum\limits_{j=1}^{n} p_j a_j)^2 = < p, a^2 > -(< p, a >)^2 \geq \alpha$

Convex function

2

$D(p,q) = f(p) - f(q) - \nabla f(q)^T (p-q) \geq 0 \Leftrightarrow f(p)$ - выпуклая. Докажем это:
$f(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_i} = \dfrac{\partial}{\partial p_j}(1 + \ln p_i) = \delta_i^j \dfrac{1}{p_i} \Rightarrow H = diag(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, ..., \frac{1}{p_n})$.
То есть f является сильно выпуклой, что доказывает требуемое в задаче.

3

1 $\mathbb{E}x$:
$\mathbb{E}x = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i = p^T a$ - линейная, а значит, выпуклая (и при этом впуклая).

2 $\mathbb{P}(x \geq \alpha)$:

Пусть $a_{k-1} < \alpha < a_k$. Тогда $\mathbb{P}(x \geq \alpha) = \sum\limits_{i=k}^{n} p_i = p^T \mathbf{1}_k$, где $\mathbf{1}_k$ - стоблец, у которого первые $k-1$ элементов нули, а остальные - единицы. Наша функция линейна по p, а значит, выпукла.

3 $\mathbb{P}(\alpha \leq x \leq \beta)$:

Пусть $a_{k_\alpha - 1} < \alpha < a_{k_\alpha}, \quad a_{k_\beta} < \beta < a_{k_\beta + 1}$.

Тогда $\mathbb{P}(\alpha \leq x \leq \beta) = \sum\limits_{i=k_\alpha}^{k_\beta} p_i = p^T \mathbf{1}_{k_\alpha}^{k_\beta}$, где $\mathbf{1}_{k_\alpha}^{k_\beta}$ - столбец с координатами e_i, равными 1 при $k_\alpha \leq i \leq k_\beta$, а остальные нули. Опять получили линейную по p функцию, которая является выпуклой.

4 $f(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$:

$\dfrac{\partial f}{\partial p_i} = 1 + \ln p_i$. Тогда $H = diag(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, ..., \frac{1}{p_n})$, то есть, функция выпуклая.

4

$a(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} x^T \mathbf{1}$ - выпуклая по x, т.к. линейная

$g(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} (x_i)^{\frac{1}{n}}$

$g''_{x_i x_j} = \dfrac{g}{n^2} H, \quad$ где

$$H = \begin{cases} (1-n) x_i^{-2} & \text{if } i = j \\ x_i^{-1} x_j^{-1} & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

При этом, $u^T H u = (\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{u_i}{x_i})^2 - n \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{u_i^2}{x_i^2}$, что, по неравенству Коши-Шварца, не больше нуля, значит, $g(x)$ - впуклая.

6

$f(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$.

$f''(x) = -\dfrac{1}{x(1-x)} \leq 0 \quad \forall x \in (0,1)$, то есть функция впуклая.