



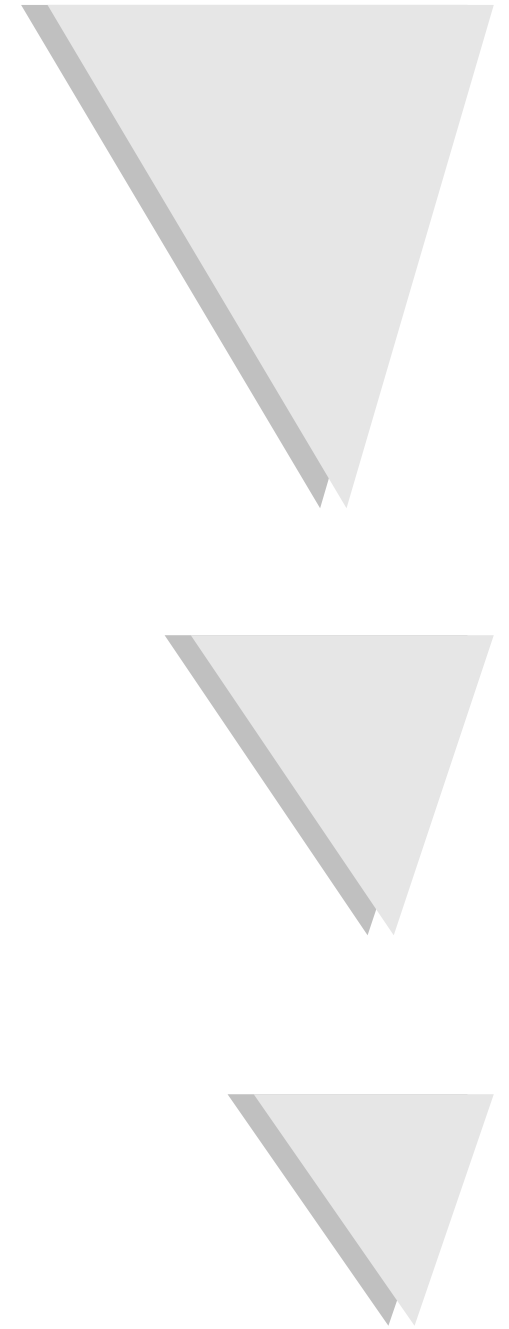
PROGRAMACIÓN FUNCIONAL

Técnicas Formales: Inducción/Recursión



Técnicas Formales

- ◆ Inducción/Recursión
 - ◆ Definición inductiva de conjuntos
 - ◆ Demostración por inducción estructural
 - ◆ Definición de funciones recursivas
 - ◆ Ejemplos



Otros conjuntos

- ◆ Los tipos definidos hasta ahora, ¿son suficientes para la tarea de programar?
 - ◆ por ejemplo, si estuviéramos programando un intérprete para un lenguaje de programación, ¿cómo representaríamos un programa?
- ◆ ¿Cómo definimos conjuntos nuevos? ¿Y si necesitamos que tengan infinitos elementos? ¿Cómo probamos propiedades de estos conjuntos?

Inducción/Recursión

- ◆ Para solucionar los tres problemas, usaremos INDUCCIÓN
- ◆ La inducción es un mecanismo que nos permite:
 - ◆ Definir conjuntos infinitos
 - ◆ Probar propiedades sobre sus elementos
 - ◆ Definir funciones recursivas sobre ellos, con garantía de terminación

Inducción estructural

- ◆ Supongamos que quiero definir el conjunto \mathbb{N} de todas las cadenas formadas por letras S , y terminadas en Z . ¿Cómo lo hago?
- ◆ **Def:** sea \mathbb{N} el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones
 - ◆ $Z \in \mathbb{N}$
 - ◆ si $e \in \mathbb{N}$, entonces $Se \in \mathbb{N}$

Inducción estructural

- ◆ Una definición inductiva de un conjunto \mathfrak{R} consiste en dar condiciones de dos tipos:
 - ◆ reglas base
 - ◆ que afirman que algún elemento simple pertenece a \mathfrak{R}
 - ◆ reglas inductivas
 - ◆ que afirman que un elemento compuesto pertenece a \mathfrak{R} siempre que sus partes pertenezcan a \mathfrak{R}
- y pedir que \mathfrak{R} sea el menor conjunto (en sentido de la inclusión) que satisfaga todas las reglas dadas.

Inducción estructural

- ◆ ¿Qué propiedades tiene un conjunto definido por inducción estructural?
 - ◆ Tiene infinitos elementos.
 - ◆ Todos sus elementos, o bien satisfacen una regla base, o bien satisfacen una regla inductiva.
 - ◆ Todos sus elementos son finitos.
 - ◆ El orden basado en "es parte de" es bien fundado (o sea, toda cadena descendente es finita).
(Ej.: **Z** es parte de **SZ**, **SZ** es parte de **SSZ**, etc.)

Ejemplo

- ♦ Sea BE definido inductivamente como:
 - ♦ $\mathbf{TT} \in BE$
 - ♦ $\mathbf{FF} \in BE$
 - ♦ si $e_1, e_2 \in BE$, entonces $(e_1 \mathbf{\&\&} e_2) \in BE$
 - ♦ si $e \in BE$, entonces $(\mathbf{\sim} e) \in BE$
- ♦ ¿Qué elementos tiene BE ?

Principio de inducción

- ◆ ¿Cómo demostramos la siguiente propiedad de los elementos de *BE*?
 - ◆ $P(x) \equiv x$ tiene tantos caracteres '(' como ')'.
 - ◆ **TT** y **FF** no tienen paréntesis, entonces, $P(\text{TT})$ y $P(\text{FF})$ se cumplen trivialmente
- ◆ Pero ¿cómo ver que $P(\sim e)$ se cumple?
 - ◆ ¡Debemos asumir que $P(e)$ se cumple!

Principio de inducción

- ◆ Sea S un conjunto inductivo, y sea P una propiedad sobre los elementos de S . *Si se cumple que:*
 - ◆ para cada elemento $z \in S$ tal que z cumple con una regla base, $P(z)$ es verdadero, y
 - ◆ para cada elemento $y \in S$ construido en una regla inductiva utilizando los elementos y_1, \dots, y_n , si $P(y_1), \dots, P(y_n)$ son verdaderos entonces $P(y)$ lo es, *entonces* $P(x)$ se cumple para todos los $x \in S$.

Principio de inducción

- ◆ En la definición previa,
 - ◆ cada caso donde se prueba que $P(z)$ es verdadero para un elemento base z , se llama ***caso base***.
 - ◆ cada caso donde se prueba que $P(y)$ es verdadero asumiendo que $P(y_1), \dots, P(y_n)$ lo son, se llama ***caso inductivo***; además, $P(y)$ es la ***tesis inductiva***, y $P(y_1) \wedge \dots \wedge P(y_n)$ es la ***hipótesis inductiva***.
- ◆ Decimos que la propiedad " $P(x)$ se cumple para todos los $x \in S$ " se demostró por ***inducción estructural***.

Principio de inducción

- ◆ **Ej.:** mostrar que para todo $e \in BE$, $P(e)$ se cumple, siendo $P(x) \equiv x$ tiene tantos caracteres '(' como ')'.
 - ◆ **Dem:** por inducción en la estructura de BE
 - ◆ **Casos base:** **TT** y **FF**
Trivialmente, pues ambos tienen cero de cada uno
 - ◆ **Casos inductivos:** $(e_1 \&\& e_2)$ y $(\sim e)$
Asumiendo que $P(e_1)$, $P(e_2)$ y $P(e)$ son verdaderos, entonces es fácil ver que $P((e_1 \&\& e_2))$ y $P(\sim e)$ también lo son.
 - ◆ Habiendo mostrado todos los casos, concluimos que $P(e)$ es verdadera para todo elemento de BE .

Recursión

- ◆ ¿Cómo definimos funciones sobre los elementos de *BE*?
- ◆ ¡Utilizando el valor de la misma función en los casos anteriores!
- ◆ ¿Y esto funciona?
- ◆ Sí, pues el orden "es parte de" es bien fundado, y por lo tanto nunca hay reducciones infinitas.

Recursión

◆ Ejemplo:

nleftp :: **BE** -> Int

nleftp **TT** = 0

nleftp **FF** = 0

nleftp (**$e_1 \&\&e_2$**) = 1 + nleftp e_1 + nleftp e_2

nleftp (**$\sim e$**) = 1 + nleftp e

(**Atención:** esta sintaxis no es correcta, pues **BE** no se puede definir así en Haskell; la misma sirve sólo a los efectos del ejemplo.)

Funciones recursivas

- ◆ Sea S un conjunto inductivo, y T uno cualquiera. Una definición recursiva de una función $f :: S \rightarrow T$ es una definición que posee la siguiente forma:
 - ◆ por cada elemento base x , el valor de $(f\ x)$ se da directamente usando valores previamente definidos
 - ◆ por cada elemento inductivo y , con partes inductivas y_1, \dots, y_n , el valor de $(f\ y)$ se da usando valores previamente definidos y los valores $(f\ y_1), \dots, (f\ y_n)$.

Ejemplo: LISTAS

- ◆ Dado un tipo cualquiera a , definimos inductivamente al conjunto $[a]$ con las siguientes reglas:
 - ◆ $[] :: [a]$
 - ◆ si $x :: a$ y $xs :: [a]$ entonces $x:xs :: [a]$
- ◆ ¿Qué elementos tiene $[\text{Bool}]$?
- ◆ ¿Y $[\text{Int}]$?



Ejemplo: LISTAS

- ◆ Definir por recursión una función `len` que cuente los elementos de una lista.

`len :: [a] -> Int`

`len [] = 0`

`len (x:xs) = 1 + len xs`

Caso base

Caso inductivo

Aplicación inductiva de `len`

Observaciones

- ◆ Hay una ecuación por cada caso de la definición de [a]
- ◆ Los paréntesis son necesarios; si no dice (len x):xs
- ◆ La función len está definida para toda lista (siempre termina y da un valor definido).
Esta propiedad está garantizada por la construcción de len, y por la naturaleza inductiva de las listas.
- ◆ Se pueden demostrar propiedades de len por inducción estructural en la lista argumento.

Ejemplo: LISTAS

- ◆ **Propiedad:** demostrar que para toda lista xs , su longitud es mayor o igual que cero.
- ◆ **Dem.:** por inducción en la estructura de xs
 - ◆ Caso base: $xs = []$
 $len [] = 0$ por def. de len , por lo tanto, $len [] \geq 0$
 - ◆ Caso inductivo: $xs = x:xs'$
HI) Asumimos $len xs' \geq 0$, (hipótesis inductiva).

$$\begin{aligned} len (x:xs') &= && \text{(por def. de } len) \\ 1 + len xs' &\geq && \text{(por HI y aritmética)} \\ 0 \end{aligned}$$

Conclusiones

◆ Este tema cubre:

- ◆ cómo definir conjuntos infinitos con características útiles (conjuntos inductivos).
- ◆ cómo demostrar propiedades sobre los elementos de los conjuntos inductivos.
- ◆ cómo definir funciones recursivas sobre conjuntos inductivos, garantizando su terminación en todos los casos.