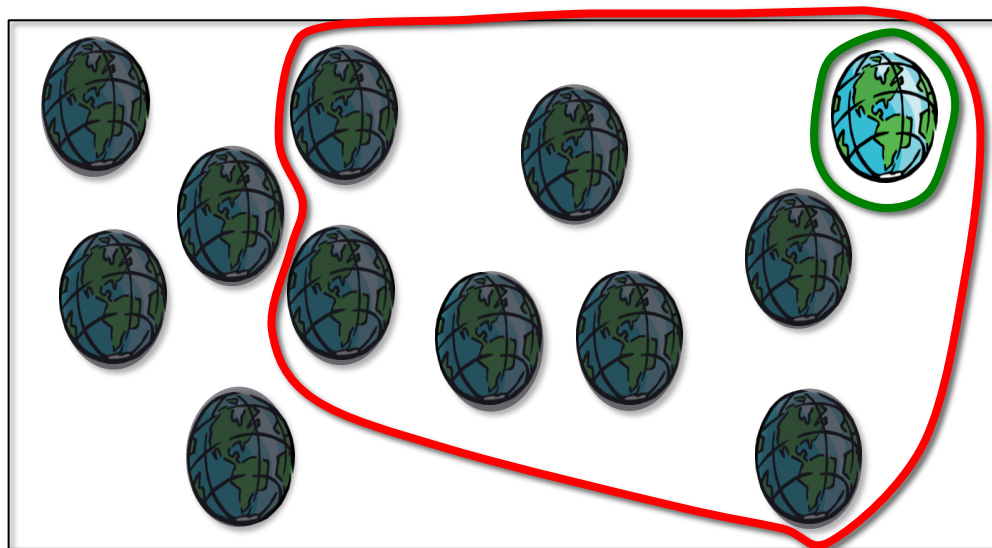


# 今天的内容

- 摘要复习上一次课的内容
- 逻辑型的智能体
- 概率

# 推理的内容: 蕴涵(entailment)

- **蕴涵**:  $\alpha \models \beta$  (“ $\alpha$  牵涉(entails)  $\beta$ ” or “ $\beta$  遵循于(follows from)  $\alpha$ ”)  
当且仅当在  $\alpha$  为真的每个世界里,  $\beta$  也是真
  - 换句话说,  $\alpha$ -的世界 (为真的那些世界) 是  $\beta$ -的世界的一个子集  
[ $\text{models}(\alpha) \subseteq \text{models}(\beta)$ ]
- 例如,  $\alpha_2 \models \alpha_1$
- (比如  $\alpha_2$  是  $\neg Q \wedge R \wedge S \wedge W$   
 $\alpha_1$  是  $\neg Q$ )



# 命题逻辑：语法

- 给定：一组 命题字符  $\{X_1, X_2, \dots, X_n, P, Q, R, \text{North}, \dots\}$  （可为真或假）
  - ( True 和 False 也是，真值固定)
- $X_i$  是一个句子（原子句）
- 复杂句
  - 如果  $\alpha$  是句子，那么  $\neg\alpha$  是一个句子（否定）
  - 如果  $\alpha$  和  $\beta$  是句子，那么  $\alpha \wedge \beta$  是一个句子（结合）
  - 如果  $\alpha$  和  $\beta$  是句子，那么  $\alpha \vee \beta$  是一个句子（分离）
  - 如果  $\alpha$  和  $\beta$  是句子，那么  $\alpha \Rightarrow \beta$  是一个句子（暗含,或条件的if ...then）
  - 如果  $\alpha$  和  $\beta$  是句子，那么  $\alpha \Leftrightarrow \beta$  是一个句子（双向条件的 if and only if ）
  - 逻辑连接符，和（）的组合
- 文字(literal): 原子语句和否定的原子语句
- 没有其他样式的句子!

# 命题逻辑: 语义

- 给定一个模型（**model**），决定一个句子的真值
- 真值表

$P$	$Q$	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
<i>false</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>true</i>
<i>false</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	<i>false</i>
<i>true</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>false</i>
<i>true</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	<i>true</i>

# 逻辑上的一致性

$$(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha) \quad \text{commutativity of } \wedge$$

$$(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha) \quad \text{commutativity of } \vee$$

$$((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \quad \text{associativity of } \wedge$$

$$((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \quad \text{associativity of } \vee$$

$$\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha \quad \text{double-negation elimination}$$

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha) \quad \text{contraposition}$$

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \quad \text{implication elimination}$$

$$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)) \quad \text{biconditional elimination}$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta) \quad \text{De Morgan}$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \quad \text{De Morgan}$$

$$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)) \quad \text{distributivity of } \wedge \text{ over } \vee$$

$$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)) \quad \text{distributivity of } \vee \text{ over } \wedge$$

# 简单的通过定理进行推断证明的过程: 前向推理(Forward chaining)

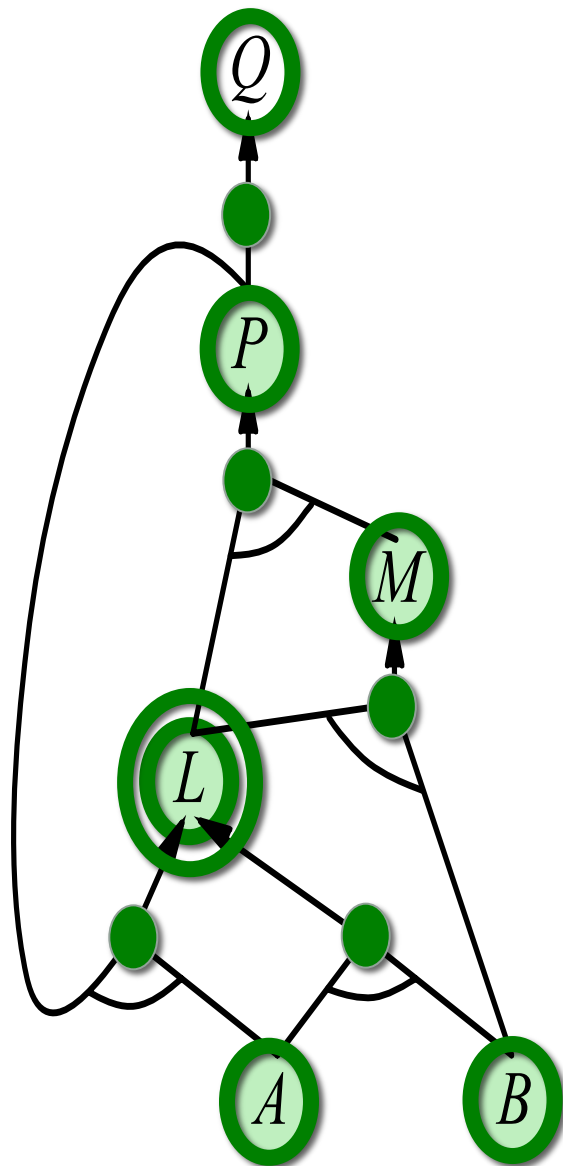
- 应用肯定前件式推理( **Modus Ponens**) 产生新的事实(单一正字符构成的语句):
  - 给定  $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots X_n \Rightarrow Y$  和  $X_1, X_2, \dots, X_n$
  - 推理出  $Y$
- 前向推理持续应用这个规则, 不断添加新的事实, 直到没有可添加的为止
- 要求 KB (知识库) 只包含 **限定子句(definite clauses)**:
  - 一组分离/析取(disjunction)的文字(literals), 只有一个是对的 (其他都含否定符); 可转成以下形式
  - (字符的结合/合取(conjunction))  $\Rightarrow$  字符; 或
  - 一个单一的字符 (注意  $X$  相当于  $\text{True} \Rightarrow X$ )

# 前向推理，举例：证明 Q（被蕴涵）

子句	COUNT	INFERRED
• $P \Rightarrow Q$	<del>1</del> 0	A <del>false</del> true
• $L \wedge M \Rightarrow P$	<del>2</del> 1 0	B <del>false</del> true
• $B \wedge L \Rightarrow M$	<del>2</del> 1 0	L <del>false</del> true
• $A \wedge P \Rightarrow L$	<del>2</del> 1 0	M <del>false</del> true
• $A \wedge B \Rightarrow L$	<del>2</del> 1 0	P <del>false</del> true
• A	<del>2</del> 1 0	Q <del>false</del> true
• B	0	
	0	

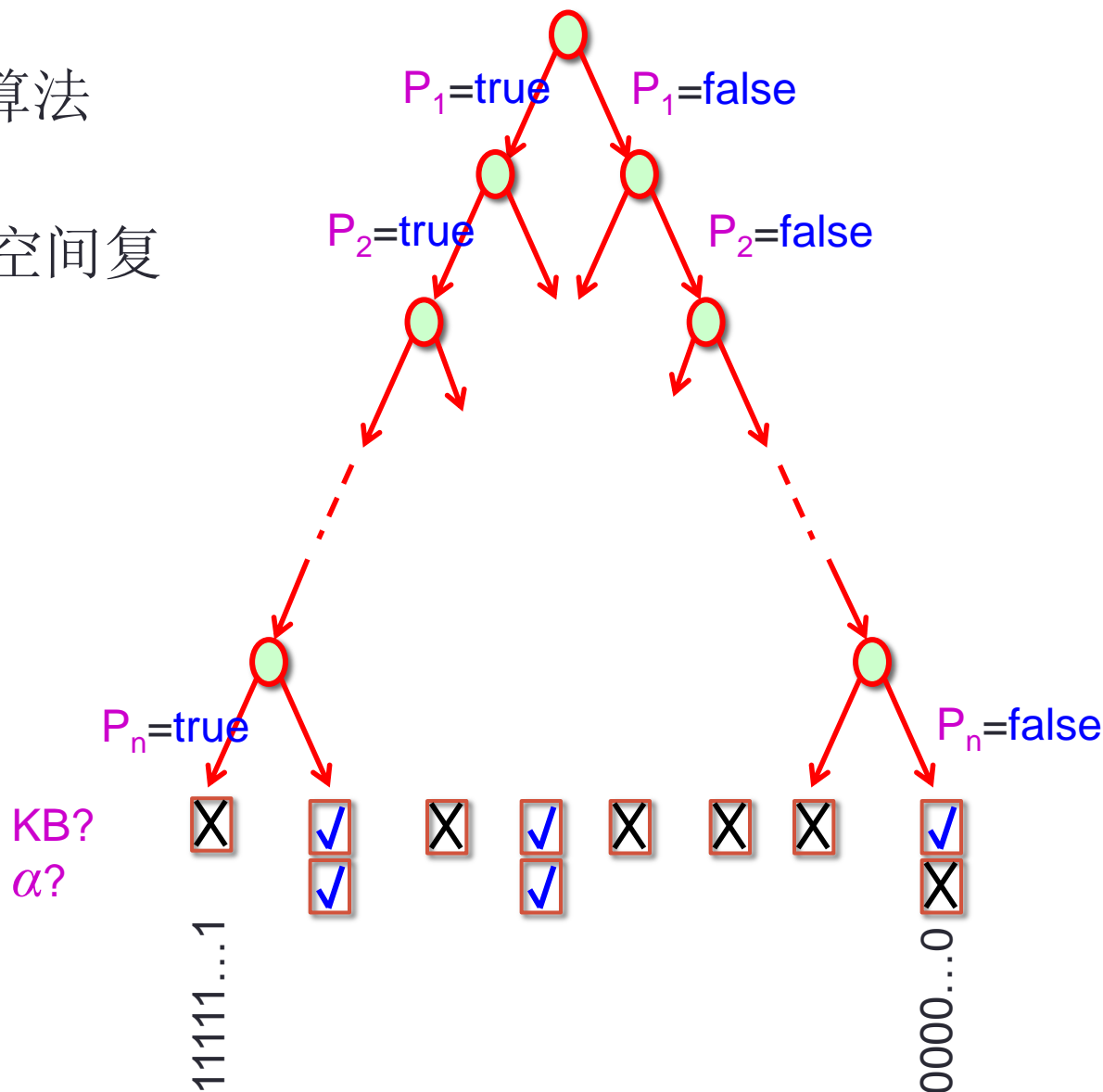
AGENDA

~~A~~ ~~B~~ ~~L~~ ~~M~~ ~~P~~ ~~L~~ ~~Q~~



# 简单的模型检查, 继续

- 深度优先, 类似于回溯算法 (backtracking) 的递归
- $O(2^n)$  时间复杂度, 线性空间复杂度
- 可以有更高效的算法!





# 可满足性和导出(蕴涵)

- 一个语句是 **可满足的**，如果它至少在一个世界里为真 (参见 CSPs!)
- 假设我们有一个超高效的 SAT solver; 我们如何能用它来测试蕴涵关系?
  - 假定  $\alpha \models \beta$
  - 那么  $\alpha \Rightarrow \beta$  为真 在所有世界 (演绎公理)
  - 因此  $\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$  为假 在所有世界
  - 因此  $\alpha \wedge \neg\beta$  为假 在所有世界, i.e., 不可满足的(unsatisfiable)
- 所以, 把否定的结论添加到 所知道的语句里, 测试其不可满足性 (un)satisfiability; 也叫 归谬法(reductio ad absurdum)
- 高效的 SAT solvers 需要 合取范式(**conjunctive normal form**)

# 合取范式(CNF)

替换双向条件，用两个暗示条件

替换  $\alpha \Rightarrow \beta$  用  $\neg\alpha \vee \beta$

分配  $\vee$  到  $\wedge$

- 每个句子都能表达成一个子句
- 每个子句都是文字(正的或否定的符号)的析取
- 到 CNF 的标准变换:
  - $At_{1,1\_0} \Rightarrow (Wall_{0,1} \Leftrightarrow Blocked\_W\_0)$
  - $At_{1,1\_0} \Rightarrow ((Wall_{0,1} \Rightarrow Blocked\_W\_0) \wedge (Blocked\_W\_0 \Rightarrow Wall_{0,1}))$
  - $\neg At_{1,1\_0} \vee ((\neg Wall_{0,1} \vee Blocked\_W\_0) \wedge (\neg Blocked\_W\_0 \vee Wall_{0,1}))$
  - $(\neg At_{1,1\_0} \vee \neg Wall_{0,1} \vee Blocked\_W\_0) \wedge$   
 $(\neg At_{1,1\_0} \vee \neg Blocked\_W\_0 \vee Wall_{0,1})$

# 高效的 SAT solvers

- DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland) 是现代SAT求解器的核心算法
- 本质上是一个对模型的回溯搜索，和一些额外的技术：
  - **提早终止**: 如果
    - 所有子句都被满足; e.g.,  $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg C)$  被满足，通过  $\{A=\text{true}\}$
    - 任何一个子句为假; e.g.,  $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg C)$  为假，当  $\{A=\text{false}, B=\text{false}\}$
  - **纯净的文字（字符）**: 如果一个字符在剩下所有未满足的子句里的符号都是统一的，那么赋给这个字符那个值
    - 例如,  $A$  是纯净的，并且正号的  $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg B)$  所以赋给  $\text{true}$
  - **单元子句**: 如果一个子句只剩下一个单一的文字字符，那么给这个字符赋值使之满足该子句
    - 例如, 如果  $A=\text{false}$ ,  $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg C)$  becomes  $(\text{false} \vee B) \wedge (\text{false} \vee \neg C)$ , i.e.  $(B) \wedge (\neg C)$
    - 满足单元子句的过程中经常会导致进一步的传递，产生新的单元子句。

# 效率

- DPLL的简单实现: 求解  $\sim 100$  变量
- 额外技巧:
  - 变量和值的选取排序 (参见 CSPs)
  - 分治法 (divide and conquer)
  - 记录下 无法求解的子情况, 作为额外的子句, 用来避免重蹈覆辙
  - 索引和 增量计算技巧, 使得DPLL 算法的每一步都是高效的 (通常  $O(1)$ )
    - 索引子句中每个变量 (字符) 的符号 (正或是否定的)
    - 变量赋值过程中持续记录已满足的子句数量
    - 持续记录每个子句中剩余的文字符号的数量
- DPLL的真正实现: 可以求解  $\sim 10,000,000$  变量

# SAT 求解器在现实中的应用

- 电路验证: 超大规模集成电路 是否计算正确?
- 软件验证: 程序是否计算正确的结果?
- 软件综合: 哪些程序计算正确结果?
- 协议验证: 这个安全协议能否被攻破?
- 协议合成: 哪些协议对于这个任务是安全的?
- 规划: 智能体的行为规划?

# 总结

- 一种可能的智能体框架: 知识 + 推理
- 逻辑 提供了一种对知识进行编码的正规方法
  - 一个逻辑的定义: 语法, 可能世界的集合, 真值条件
- 逻辑推理计算句子间的蕴涵关系

# 人工智能导论： 逻辑型的智能体 （基于命题逻辑的）

---

# 一个基于知识的智能体

**function** KB-AGENT(**percept**) **returns** 一个行动

内部记录: **KB**, 知识库

**t**, 整数, 初始为 0

**TELL**(**KB**, **MAKE-PERCEPT-SENTENCE**(**percept**, **t**))

**action**  $\leftarrow$  **ASK**(**KB**, **MAKE-ACTION-QUERY**(**t**))

**TELL**(**KB**, **MAKE-ACTION-SENTENCE**(**action**, **t**))

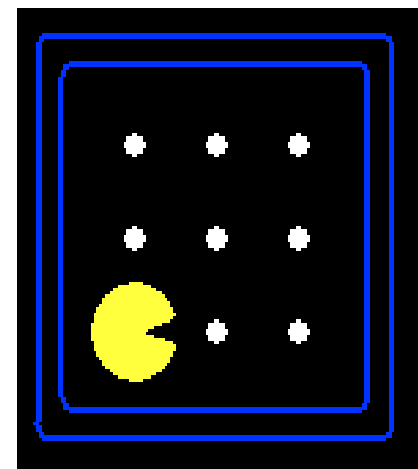
**t**  $\leftarrow$  **t** + 1

**return action**



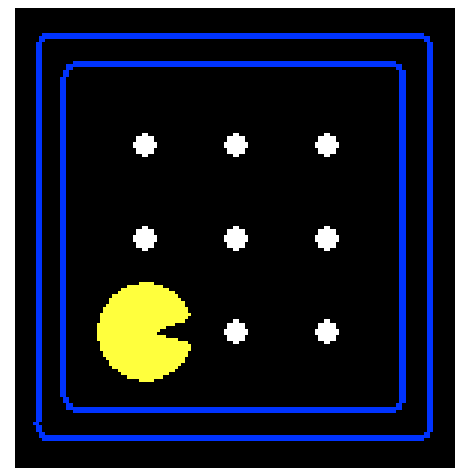
# 回忆: 部分可观察的Pacman 中的变量

- Pacman 只观察到局部周围的墙
- 问题建立: 我们需要的变量?
  - Pacman的 位置
    - $At_{1,1}_0$  (Pacman 在位置 [1,1] 在时刻 0)  $At_{3,3}_1$  等
  - 墙的位置
    - $Wall_{0,0}$   $Wall_{0,1}$  等
  - 感知
    - $Blocked\_W_0$  (在时刻 0, 向西有墙阻挡) 等.
  - 行动
    - $W_0$  (Pacman 向西移动 在时刻 0),  $E_0$  等.



# 回忆: 传感模型

- 描述引起 Pacman 的感知发生变化的可能的事实
- Pacman 感觉到向西有一面墙在时刻  $t$  , **当且仅当** 他在位置  $x,y$  并且 有一面墙在位置  $x-1,y$ 
  - $\text{Blocked\_W\_0} \Leftrightarrow ((\text{At\_1,1\_0} \wedge \text{Wall\_0,1}) \vee$   
 $(\text{At\_1,2\_0} \wedge \text{Wall\_0,2}) \vee$   
 $(\text{At\_1,3\_0} \wedge \text{Wall\_0,3}) \vee \dots )$



# 转换模型 (transition model)

- 每个 **状态变量** 在每个时刻如何获得它的值?
- 部分可感知的Pacman里的状态变量 是  $At_{x,y,t}$  , 例如,  $At_{3,3,17}$
- 一个状态变量获得它的值, 根据 **后继状态公理 (successor-state axiom)**
  - $$X_t \Leftrightarrow [X_{t-1} \wedge \neg(\text{某个 action}_{t-1} \text{ 导致 } X \text{ 为 false})] \vee [\neg X_{t-1} \wedge (\text{某个 action}_{t-1} \text{ 导致 } X \text{ 为 true})]$$
- 对于 Pacman 的位置:
  - $$At_{3,3,17} \Leftrightarrow [At_{3,3,16} \wedge \neg((\neg Wall_{3,4} \wedge N_{16}) \vee (\neg Wall_{4,3} \wedge E_{16}) \vee \dots)]$$
$$\vee [\neg At_{3,3,16} \wedge ((At_{3,2,16} \wedge \neg Wall_{3,3} \wedge N_{16}) \vee (At_{2,3,16} \wedge \neg Wall_{3,3} \wedge E_{16}) \vee \dots)]$$

# 初始状态

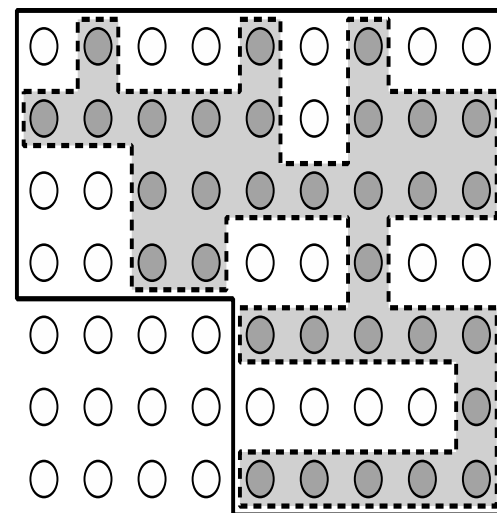
- 智能体可能知道它的初始位置:
  - $At_{1,1}_0$
- 或者, 它可能不知道:
  - $At_{1,1}_0 \vee At_{1,2}_0 \vee At_{1,3}_0 \vee \dots \vee At_{3,3}_0$
- 我们也需要一个 **值域约束** – 不能同时在两个不同的位置!
  - $\neg (At_{1,1}_0 \wedge At_{1,2}_0) \wedge \neg (At_{1,1}_0 \wedge At_{1,3}_0) \wedge \dots$
  - $\neg (At_{1,1}_1 \wedge At_{1,2}_1) \wedge \neg (At_{1,1}_1 \wedge At_{1,3}_1) \wedge \dots$
  - $\dots$

# 状态估计

- 回忆智能体在部分可观察情况下的 **信念状态(belief state)** 定义:
  - 给定行动和当前的感知, 相符合的世界状态的集合
  - **状态估计** 是指保持(预测/更新)当前的信念状态
- 对于一个逻辑型的智能体, 计算在当前状态下哪些变量为真, 只不过是一个逻辑推理的问题
  - 例如, 询问是否  $KB \wedge \langle \text{actions} \rangle \wedge \langle \text{percepts} \rangle \models \text{Wall\_2,2}$
  - 简单但效率低: 每一步的推理涉及到一个智能体整个行动感知的历史

# 状态估计，继续

- 一个更“积极主动的”状态估计形式：
  - 在每个行动和感知以后
    - 对每个状态变量  $X_t$ 
      - 如果  $X_t$  是被蕴涵的, 则加到 KB
      - 如果  $\neg X_t$  是被蕴涵的, 则加到 KB
- 对于准确的状态评估是否这就足够?
  - 不是! 可能的情况是  $X_t$  或  $\neg X_t$  都不被蕴涵, 并且  $Y_t$  或  $\neg Y_t$  也都不被蕴涵, 但是某个约束, 例如,  $X_t \vee Y_t$ , **是** 被蕴涵的
    - 例如: 初始不确定性的智能体的位置
- 普遍来讲, 完美的状态估计是很难达到的



# 可满足(satisfiability)来解规划(Planning)问题

- 给定一个超高效的 SAT 求解器，我们能用它来规划智能体的行动吗？
- 是的，对于完全可观察的，决定性的环境：规划问题是可解的当且仅当 存在某个对行动等可满足的赋值
- $T = 1$  到无穷，按以下内容构建知识库 (KB)，并运行 SAT solver:
  - 初始状态, 值域约束
  - 截至到时刻  $T$  的转换模型语句(包括后继状态转换公理，对于所有可能的行动)
  - 目标(Goal) 在时刻  $T$  达到
  - **先决条件公理**：（行动发生的先决条件） $At_{1,1_0} \wedge N_0 \Rightarrow \neg Wall_{1,2}$  等
  - **行动排他公理**：（避免同时采取多个行动） $\neg(N_0 \wedge W_0) \wedge \neg(N_0 \wedge S_0) \wedge \dots$  等

# SAT-Plan: 找到行动规划

- 找到最短行动规划路径

```
function SATPLAN(init, transition, goal,  $T_{\max}$ ) returns solution or failure
  inputs: init, transition, goal, constitute a description of the problem
            $T_{\max}$ , an upper limit for plan length

  for  $t = 0$  to  $T_{\max}$  do
    cnf  $\leftarrow$  TRANSLATE-TO-SAT(init, transition, goal,  $t$ )
    model  $\leftarrow$  SAT-SOLVER(cnf)
    if model is not null then
      return EXTRACT-SOLUTION(model)
  return failure
```



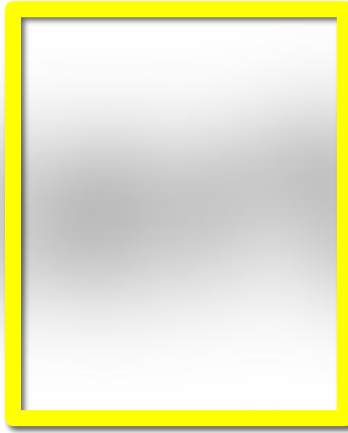
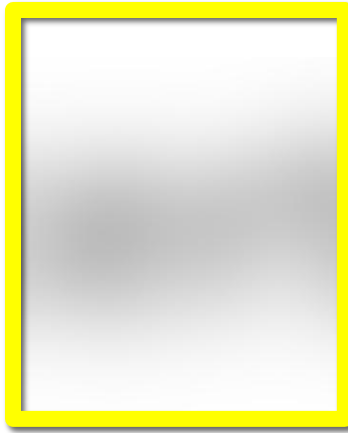
# 总结

- 声明法/陈述法(**declarative approach**) 构建智能体的框架
  - 知识库是陈述语句（包括公理，感知到的事实）
  - 逻辑推理– 事实被蕴涵的推理证明，规划智能体行动
- 现代超高效的**SAT** 求解器，使得此法可在实践中应用
- 弱点：语句表达
  - 例如 “对于每个时刻  $t$ ”，“对于每个方块位置  $[x,y]$ ”
  - 一阶逻辑(**first order logic**) 提高了语句的表达性；其逻辑推理方法与命题逻辑的方法一致

# 人工智能导论： 概率

---

齐琦



不确定性

# Uncertainty

# 不确定性(Uncertainty)

- 搭乘的航班计划登机时间是 11:25am
  - 让行动  $A_t$  = 距离登机时间提前  $t$  分钟从家里出发
  - $A_t$  行动将能保证赶上飞机吗?
- 可能出现问题:
  - 部分可观察性 (交通状况, 公交或出租车等待时间, 等)
  - 可能有误差的传感器 (交通广播的报告, 百度地图, 等)
  - 对交通流的建模和预测非常复杂
  - 缺乏对环境/世界动态性的知识 (车轮胎损坏? 道路临时施工堵塞?等)
- 如何用逻辑知识语句来代表这些问题?
  - 难以穷尽各种未知的情况

# 对不确定性的反应

- 忽视它？不行；为什么？
- 对逻辑规则的修改
  - $A_{1440} \rightarrow_{0.9999} \text{赶上飞机}$
  - $\text{赶上飞机} \rightarrow_{0.95} \neg \text{交通堵塞}$
  - 因此,  $A_{1440} \rightarrow_{0.949} \neg \text{交通堵塞}$ 
    - 逻辑规则所代表的因果关系不正确
- 概率(Probability)
  - 根据现有的情况并采取行动  $A_{120}$ , 赶上飞机的概率是 0.92

# 概率(Probability)

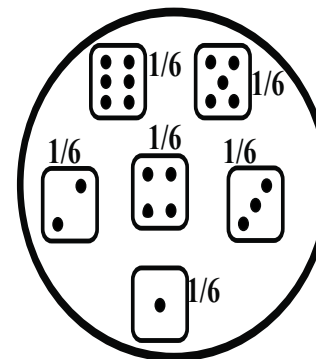
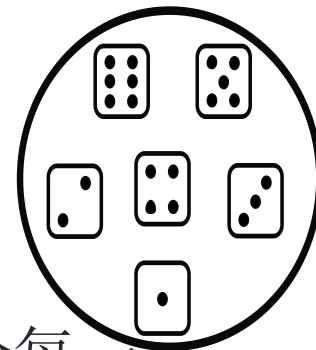
- 概率是对 复杂，不确定情况某种程度上的总结代表
  - 懒惰性(**laziness**): 太多的意外情况难以罗列, 等
  - 无知性(**ignorance**): 对某些情况缺乏了解和知识, 等
- 主观的(**Subjective**) or 贝叶斯(**Bayesian**) 概率:
  - 命题相关概率, 根据自己的知识
  - 例如,  $P(\text{CatchPlane} \mid A_{120}, \text{sunny}) = 0.92$
- 命题有关概率随新知识观察的变化:
  - 例如,  $P(\text{CatchPlane} \mid A_{120}, \text{sunny}, \text{NoDelaysOnBridge}) = 0.96$

# 决策(Decisions)

- 假设我们有：
  - $P(\text{CatchPlane} \mid A_{60}, \text{all my evidence...}) = 0.51$
  - $P(\text{CatchPlane} \mid A_{120}, \text{all my evidence...}) = 0.97$
  - $P(\text{CatchPlane} \mid A_{1440}, \text{all my evidence...}) = 0.9999$
- 选择哪一个行动？
- 还取决于**偏好(preferences)**，例如，不能错过飞机，机场等待时间，机场的食品 等.
- **(功用/利益 原理) Utility theory**，代表和推断偏好
- **(决策原理) Decision theory** = 功用原理 + 概率原理
- **(最大化功用期值) Maximize expected utility** :
  - $a^* = \operatorname{argmax}_a \sum_s P(s \mid a) U(s)$

# 概率的基本法则

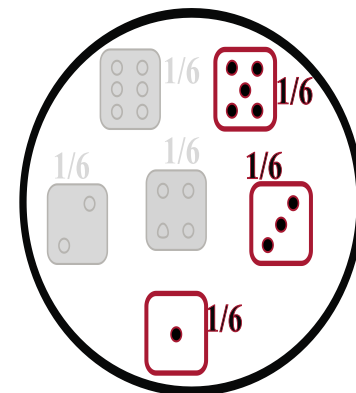
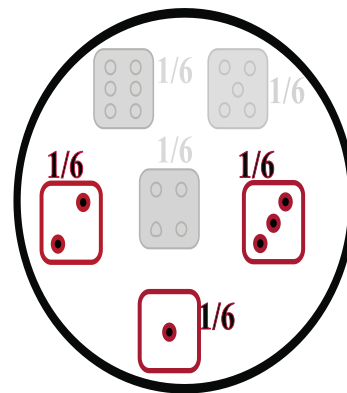
- 开始于一组可能世界的集合  $\Omega$ 
  - 例如, 一个骰子的6个可能结果,  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **概率模型(probability model)** 赋予一个数  $P(\omega)$  给每一个世界  $\omega$ 
  - $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$ .
- 这些数必须满足
  - $0 \leq P(\omega) \leq 1$
  - $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$





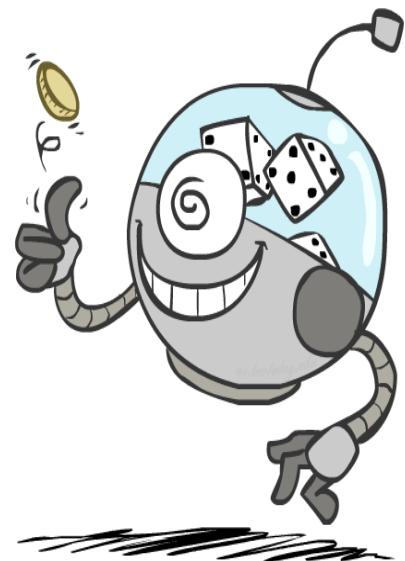
# 基本法则（继续）

- 一个 **事件(event)** 是  $\Omega$  的一个子集
  - “投数  $< 4$ ” 是集合  $\{1,2,3\}$
  - “投数是奇数”，  $\{1,3,5\}$
- 一个事件的概率是在对应世界概率数值之和
  - $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$
  - $P(\text{投数} < 4) = P(1) + P(2) + P(3) = 1/2$



# 随机变量(Random Variables)

- 一个随机变量描述了世界中我们可能不确定的某个方面（正式的讲，是 $\omega$ 上的一个决定性的函数）
  - $R$  = 天是否将会下雨？
  - $Odd$  = 骰子的投数是否将会是一个奇数？
  - $T$  = 天气是热还是冷？
  - $D$  = 花费多长时间能够到达机场？
- 大写字母开头
- 随机变量也有值域
  - $Odd$  in  $\{true, false\}$  e.g.  $Odd(1)=true$ ,  $Odd(6) = false$ 
    - 通常把事件  $Odd=true$  写成  $odd$ ,  $Odd=false$  写成  $\neg odd$
  - $T$  in  $\{hot, cold\}$
  - $D$  in  $[0, \infty)$

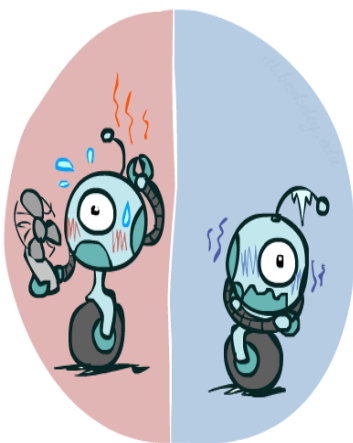


# 概率分布(Probability Distributions)

- 每个概率由一个值来代表，并且加和为 1

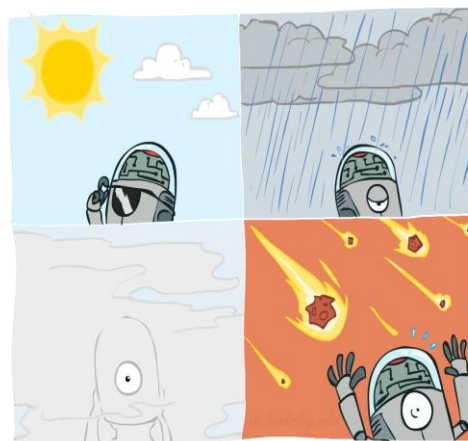
■ 天气:

• 温度:



$P(T)$

T	P
hot	0.5
cold	0.5



$P(W)$

W	P
sun	0.6
rain	0.1
fog	0.3
meteor	0.0

# 概率分布

- 每个概率模型自动为每个随机变量固定了一个分布

$P(T)$		$P(W)$	
T	P	W	P
hot	0.5	sun	0.6
cold	0.5	rain	0.1
		fog	0.3
		meteor	0.0

- 一个分布是概率值的一个表
- 一个概率值 是一个单一的数

$$P(W = \text{rain}) = 0.1$$

简略标识:

$$P(\text{hot}) = P(T = \text{hot}),$$

$$P(\text{cold}) = P(T = \text{cold}),$$

$$P(\text{rain}) = P(W = \text{rain}),$$

...

只要值域里的每个值都  
唯一即可

# 联合分布(Joint Distributions)

- 一组随机变量的联合分布:

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

为每一组赋值（或结果）指定了一个真实的数值:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- 必须遵守:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

$$P(T, W)$$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

# 联合分布中可能的世界

- 通常情况下
  - 从随机变量和它们的值域开始
  - 构建可能的世界，即对变量的所有的赋值组合
- 例如, 两个骰子  $Roll_1$  and  $Roll_2$ 
  - 可能的世界有多少?  $6 \times 6 = 36$
  - 它们的概率是多少?  $1/36$  each (为什么??)
- $n$  个变量, 每个变量的值域大小是  $d$ , 分布的大小是多少?
- 除了最小的分布以外, 通常情况下的分布很难全部手写罗列出来!

 $d^n$

# 事件的概率

- 回忆：一个事件的概率是该事件所有世界的概率值之和
- 所以，给定一个所有变量的联合分布，就可以计算任何事件的概率！
  - 概率 hot AND sunny?
  - 概率 hot?
  - 概率 hot OR sunny?
- 通常我们关心的都是 **部分赋值** ( ***partial assignments*** ) 的事件，比如  $P(T=\text{hot})$

$P(T, W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

# 问题: 事件概率

- $P(X=\text{true}, Y=\text{true})$  ?

- $P(X=\text{true})$  ?

- $P(X \Rightarrow Y)$  ?

$P(X, Y)$

X	Y	P
true	true	0.2
true	false	0.3
false	true	0.4
false	false	0.1



# 边缘分布(Marginal Distributions)

- 边缘分布是消除掉某些变量后的子表
- 边缘化 (加和): 通过求和来合并行

$P(T, W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

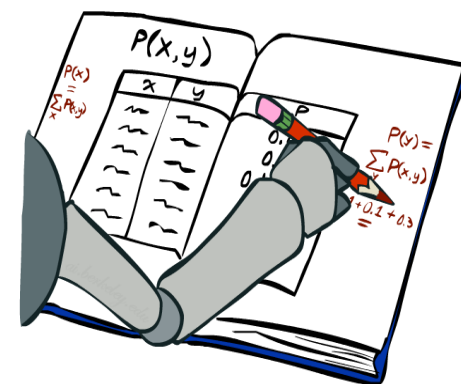


$P(T)$

T	P
hot	0.5
cold	0.5

$P(W)$

W	P
sun	0.6
rain	0.4



$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

# 提问: 边缘分布

$P(X, Y)$

X	Y	P
true	true	0.2
true	false	0.3
false	true	0.4
false	false	0.1



$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$

$P(X)$

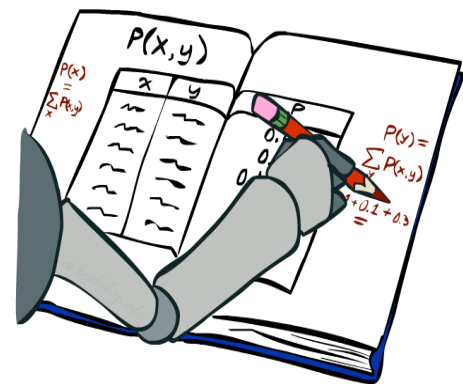
X	P
true	
false	

$P(Y)$

Y	P
true	
false	



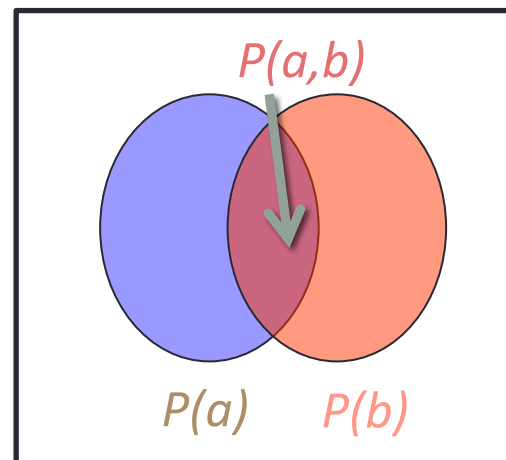
$$P(y) = \sum_x P(x, y)$$



# 条件概率(Conditional Probabilities)

- 联合概率和条件概率间的简单关系
  - 一个条件概率的定义

$$P(a|b) = \frac{P(a,b)}{P(b)}$$



$P(T, W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(W = s|T = c) = \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c)} = 0.4$$

$$\begin{aligned} &= P(W = s, T = c) + P(W = r, T = c) \\ &= 0.2 + 0.3 = 0.5 \end{aligned}$$

# 提问: 条件概率

- $P(X=\text{true} \mid Y=\text{true})$  ?

$P(X, Y)$

X	Y	P
true	true	0.2
true	false	0.3
false	true	0.4
false	false	0.1

- $P(X=\text{false} \mid Y=\text{true})$  ?

- $P(Y=\text{false} \mid X=\text{true})$  ?

# 条件分布(Conditional Distributions)

- 某些变量当其他变量的值固定的时候, 的概率分布

条件分布

$P(W|T)$

$P(W T = hot)$	
W	P
sun	0.8
rain	0.2

$P(W T = cold)$	
W	P
sun	0.4
rain	0.6

联合分布

$P(T, W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

# 正规化/标准化(Normalization) 技巧

$P(T, W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$\begin{aligned}P(W = s|T = c) &= \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c)} \\&= \frac{P(W = s, T = c)}{P(W = s, T = c) + P(W = r, T = c)} \\&= \frac{0.2}{0.2 + 0.3} = 0.4\end{aligned}$$

用条件公式  
计算

$P(W|T = c)$

W	P
sun	0.4
rain	0.6

$$\begin{aligned}P(W = r|T = c) &= \frac{P(W = r, T = c)}{P(T = c)} \\&= \frac{P(W = r, T = c)}{P(W = s, T = c) + P(W = r, T = c)} \\&= \frac{0.3}{0.2 + 0.3} = 0.6\end{aligned}$$

# 正规化技巧

$$\begin{aligned} P(W = s|T = c) &= \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c)} \\ &= \frac{P(W = s, T = c)}{P(W = s, T = c) + P(W = r, T = c)} \\ &= \frac{0.2}{0.2 + 0.3} = 0.4 \end{aligned}$$

$P(T, W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

选择 那些符合证据  
(evidence)的  
联合概率



$P(c, W)$

T	W	P
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

正规化 这些选项  
(使它们的和为1)

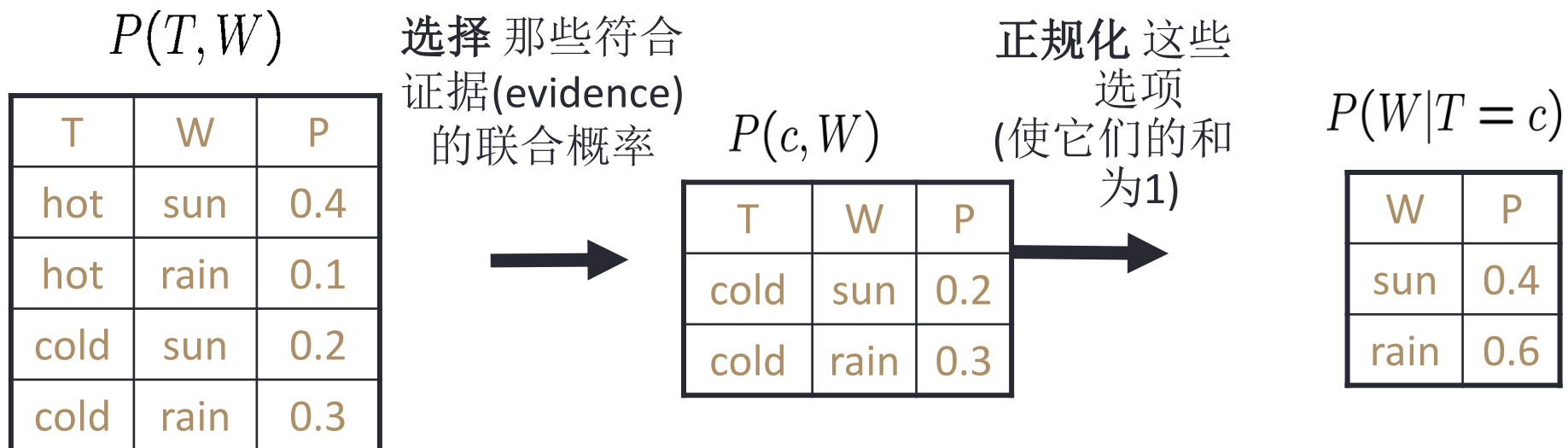


$P(W|T = c)$

W	P
sun	0.4
rain	0.6

$$\begin{aligned} P(W = r|T = c) &= \frac{P(W = r, T = c)}{P(T = c)} \\ &= \frac{P(W = r, T = c)}{P(W = s, T = c) + P(W = r, T = c)} \\ &= \frac{0.3}{0.2 + 0.3} = 0.6 \end{aligned}$$

# 正规化技巧



- 为什么是这样？选项之和是  $P(\text{evidence})$ ! (这里是， $P(T=c)$ )

$$P(x_1|x_2) = \frac{P(x_1, x_2)}{P(x_2)} = \frac{P(x_1, x_2)}{\sum_{x_1} P(x_1, x_2)}$$

与公式相符合



# 正规化的定义

- (字典解释) 使之回归到一个常态条件下

所有项之和为1

- 步骤:
  - 第一步: 计算  $Z = \text{所有项之和}$
  - 第二步: 把每一项除以  $Z$

## • 例 1

W	P
sun	0.2
rain	0.3

正规化  
 $Z = 0.5$

W	P
sun	0.4
rain	0.6

## ■ 例 2

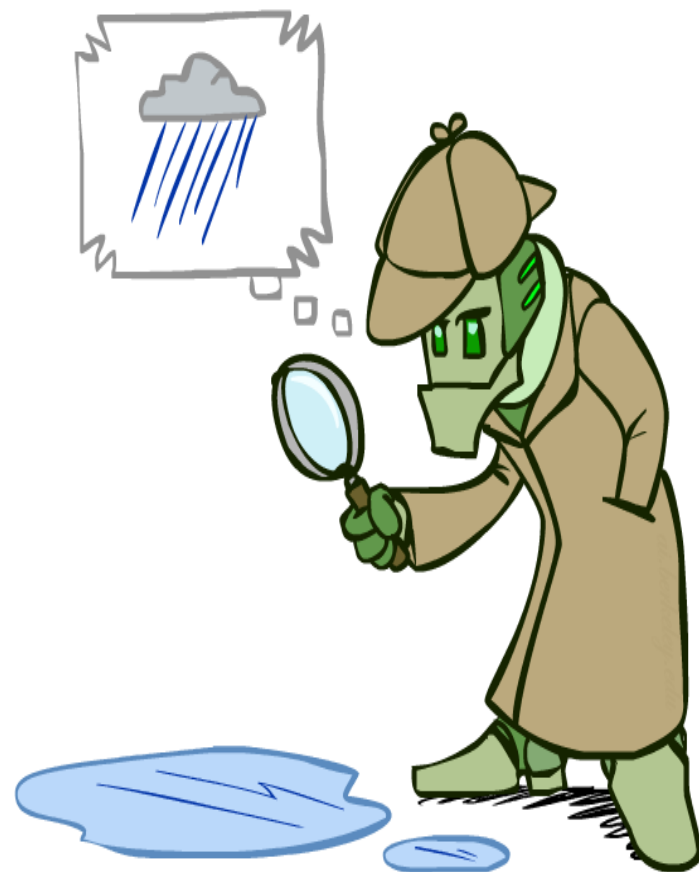
T	W	P
hot	sun	20
hot	rain	5
cold	sun	10
cold	rain	15

正规化  
 $Z = 50$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

# 概率推理(Probabilistic Inference)

- **概率推理**: 从其他已知概率里计算一个想知道的概率 (例如, 从联合概率中计算条件概率)
- 通常我们计算的都是**条件概率**
  - $P(\text{准时到机场} \mid \text{没有交通事故发生}) = 0.90$
  - 这些代表了智能体的**信念(beliefs)**, 在给定证据(evidence)下
- 概率会随新的证据而变化:
  - $P(\text{准时到达} \mid \text{无交通事故, 早上5点出发}) = 0.95$
  - $\text{准时到达} \mid \text{无交通事故, 早上5点出发, 下雨} = 0.80$
  - 观察到新的证据时, 会引发**信念(beliefs)**的更新



# 通过列举(Enumeration)来推理

\* 多个查询  
变量也可以

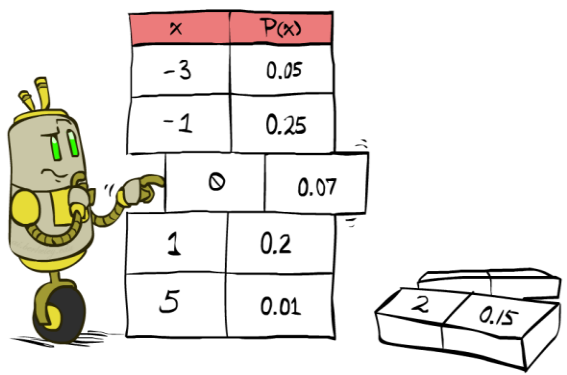
• 通常情况:

- 证据变量:  $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$
  - 查询\* 变量:  $Q$
  - 隐藏变量:  $H_1 \dots H_r$
- $$\left. \begin{array}{l} E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k \\ Q \\ H_1 \dots H_r \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_1, X_2, \dots X_n \\ \text{所有变量} \end{array}$$

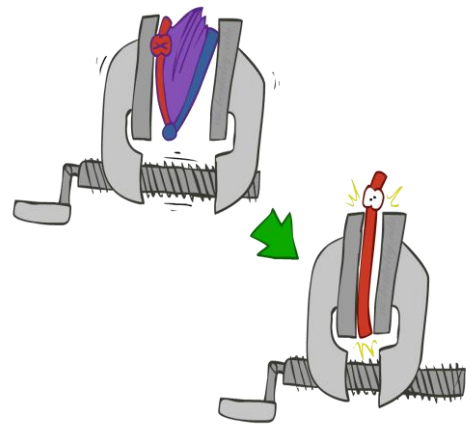
■ 我们想要的:

$$P(Q|e_1 \dots e_k)$$

■ **第一步:** 选择和证据相一致的项



■ **第二步:** 求和消掉隐藏变量H，以得到查询和证据变量的联合分布



■ **第三步:** 正规化

$$\times \frac{1}{Z}$$

$$P(Q, e_1 \dots e_k) = \sum_{h_1 \dots h_r} P(Q, \underbrace{h_1 \dots h_r, e_1 \dots e_k}_{X_1, X_2, \dots X_n})$$

$$Z = \sum_q P(Q, e_1 \dots e_k)$$

$$P(Q|e_1 \dots e_k) = \frac{1}{Z} P(Q, e_1 \dots e_k)$$

# 通过列举来推理

- $P(W)$ ?
- $P(W \mid \text{winter})$ ?
- $P(W \mid \text{winter, hot})$ ?

S	T	W	P
summer	hot	sun	0.30
summer	hot	rain	0.05
summer	cold	sun	0.10
summer	cold	rain	0.05
winter	hot	sun	0.10
winter	hot	rain	0.05
winter	cold	sun	0.15
winter	cold	rain	0.20

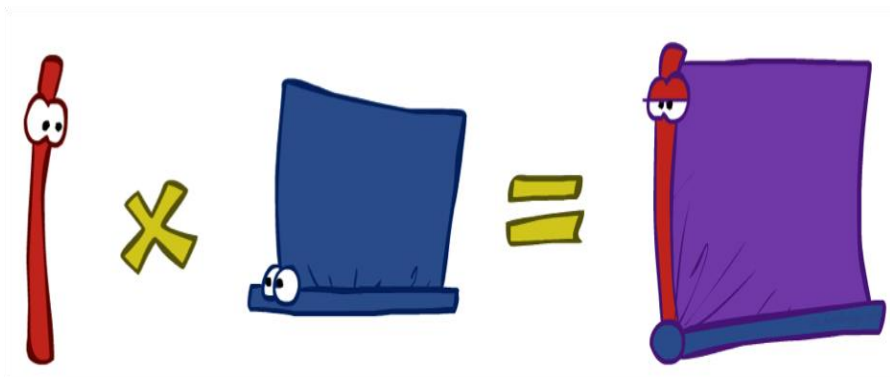
# 列举推理

- 明显的问题:
  - 最差情况下时间复杂度  $O(d^n)$
  - 空间复杂度  $O(d^n)$ ，需要存储联合分布

# 乘法规则(The Product Rule)

- 已有条件分布，想要计算联合分布

$$P(y)P(x|y) = P(x, y) \quad \longleftrightarrow \quad P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$$



# 乘法规则

$$P(y)P(x|y) = P(x, y)$$

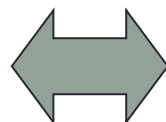
- 举例:

$P(W)$

R	P
sun	0.8
rain	0.2

$P(D|W)$

D	W	P
wet	sun	0.1
dry	sun	0.9
wet	rain	0.7
dry	rain	0.3



$P(D, W)$

D	W	P
wet	sun	0.08
dry	sun	0.72
wet	rain	0.14
dry	rain	0.06

# 链式法则(The Chain Rule)

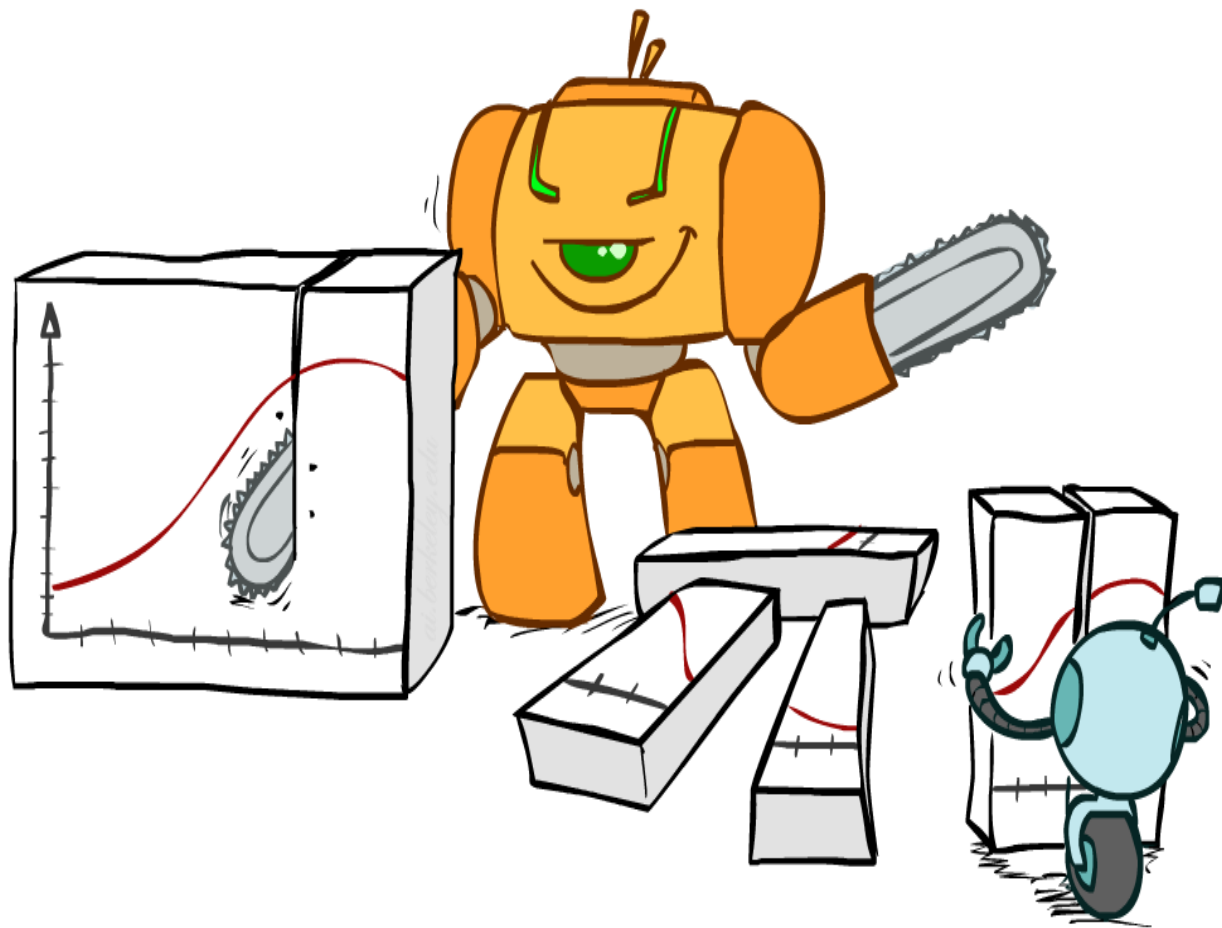
- 更普遍化的, 任何联合分布可以写成条件分布的增量相乘

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2)$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_i P(x_i|x_1 \dots x_{i-1})$$



# 贝叶斯法则



# 贝叶斯法则(Bayes' Rule)

- 两种方法因式分解一由两个变量组成的联合分布:

$$P(x, y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x)$$

那是我的法则!

- 相除后, 我们得到:

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)}{P(y)}P(x)$$

- 为什么这个有用?
  - 让我们计算一个条件概率, 从它的相反的形式
  - 通常一个条件概率很难计算, 但是相对应的另一个却很简单
  - 许多人工智能系统的基础
- 最重要的人工智能公式之一!



$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

# 用贝叶斯法则进行推断

- 举例: 从因果关系概率推断诊断概率:

$$P(\text{cause}|\text{effect}) = \frac{P(\text{effect}|\text{cause})P(\text{cause})}{P(\text{effect})}$$

- 举例:

- M: 脑脊膜炎, S: 脖子发僵

$$\left. \begin{aligned} P(+m) &= 0.0001 \\ P(+s|+m) &= 0.8 \\ P(+s|-m) &= 0.01 \end{aligned} \right\} \text{例子中给定的}$$

$$P(+m|+s) = \frac{P(+s|+m)P(+m)}{P(+s)} = \frac{P(+s|+m)P(+m)}{P(+s|+m)P(+m) + P(+s|-m)P(-m)} = \frac{0.8 \times 0.0001}{0.8 \times 0.0001 + 0.01 \times 0.999}$$

- M的后验概率(posterior probability) 仍旧非常小: 0.007944 (将近 80x 大 – 为什么?)
- 如果患了脖子僵硬仍需去检查! 为什么?

# 下一次讲的内容

- 独立性(Independence)
- 条件无关性(Conditional independence)
- 贝叶斯网络(Bayes nets)