通知

- 期末考试为闭卷

 时间定在12月23日星期三下午的第1，2节课（即2：40PM开始）

 地点在 3-101

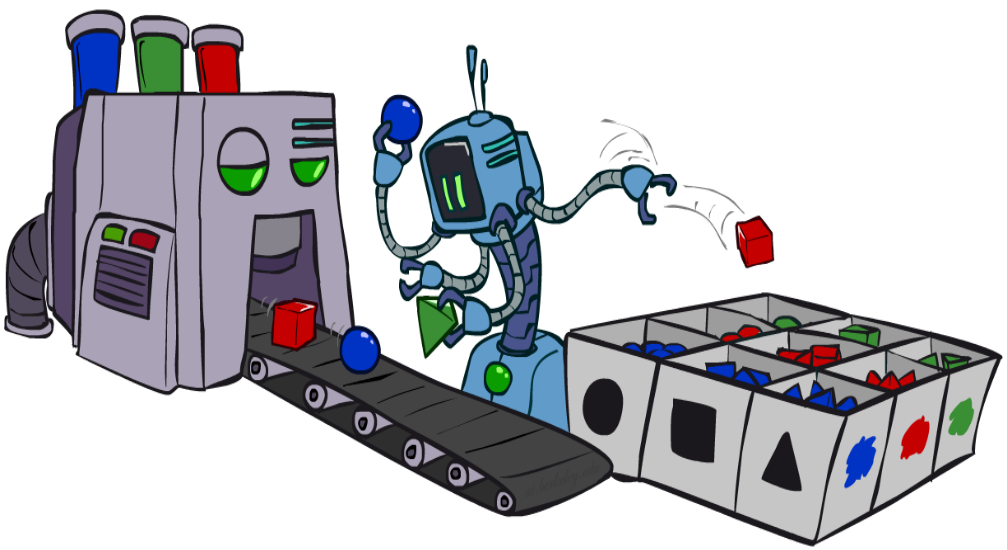
- 作业答案和考试范围已在课程网页贴出

今天的内容

- 课程设计展示（有准备的同学做）
- 贝叶斯网络(Bayes nets)
  - 近似推理

人工智能导论

贝叶斯网络: 近似推理APPROXIMATE INFERENCE

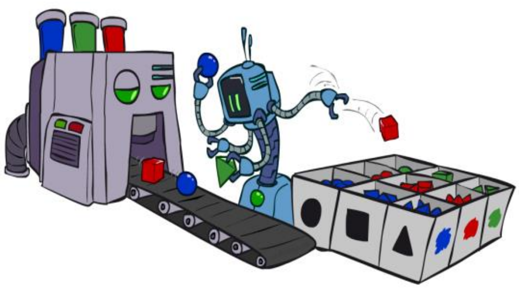


采样（Sampling）

采样很像重复的模拟

- 基本思想
  - 抽取 *N* 样本， 形成一个采样分布 *S*
  - 计算一个近似后验概率
  - 证明可以收敛到真实的概率 *P*

- 为什么采样？
  - 通常很快得到一个好的近似解
  - 算法简单而且通用 (很容易应用在不同的概率模型上)
  - 算法只需很少的存储空间 (O(n))
  - 可以应用于大的模型上；对比准确算法（比如变量消除法）



举例

- 假设你有两个大富翁游戏的智能体程序 ***A*** 和 ***B***
- A 获胜的概率是多少?
  - 方法 1:
    - 让 s 是一序列的骰子数，机会和公益金牌
    - 给定 s, 结果 $V(s)$ 可能是 1 （赢）, 0 （输）
    - ***A*** 赢的概率是 $\sum_s P(s)\, V(s)$
    - 问题: 无限多这样的序列 s !
  - 方法 2:
    - 采样 N (也许 100) 组序列从概率分布 $P(s)$, 即玩 N 次游戏
    - ***A*** 获胜的概率大概是 $(1/N) \sum_i V(s_i)$ 即在采样里获胜的比例

从一个离散分布中采样

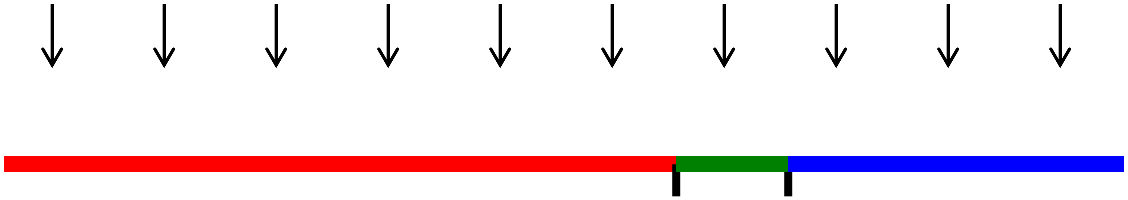
- 步骤 1: 获取一个采样 *u* 从均匀分布 [0, 1)
  - 例如 random()
- 步骤 2: 把这个采样值 *u* 转化成一个给定分布的输出结果。（通过关联每个输出结果 *x* 和一个 *P*(*x*)-大小的在[0,1) 上的一个子区间）

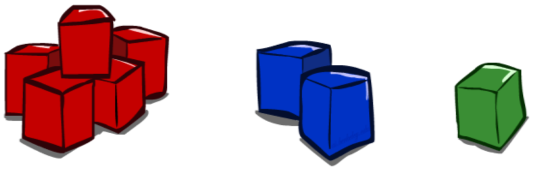
- 举例

C	P(C)
red	0.6
green	0.1
blue	0.3

$0.0 \le u < 0.6, \rightarrow C=red$
$0.6 \le u < 0.7, \rightarrow C=green$
$0.7 \le u < 1.0, \rightarrow C=blue$

- 如果 random() 返回 $u = 0.83$, 那么采样为 $C = \text{blue}$
- 再例如，在8 次采样以后有:

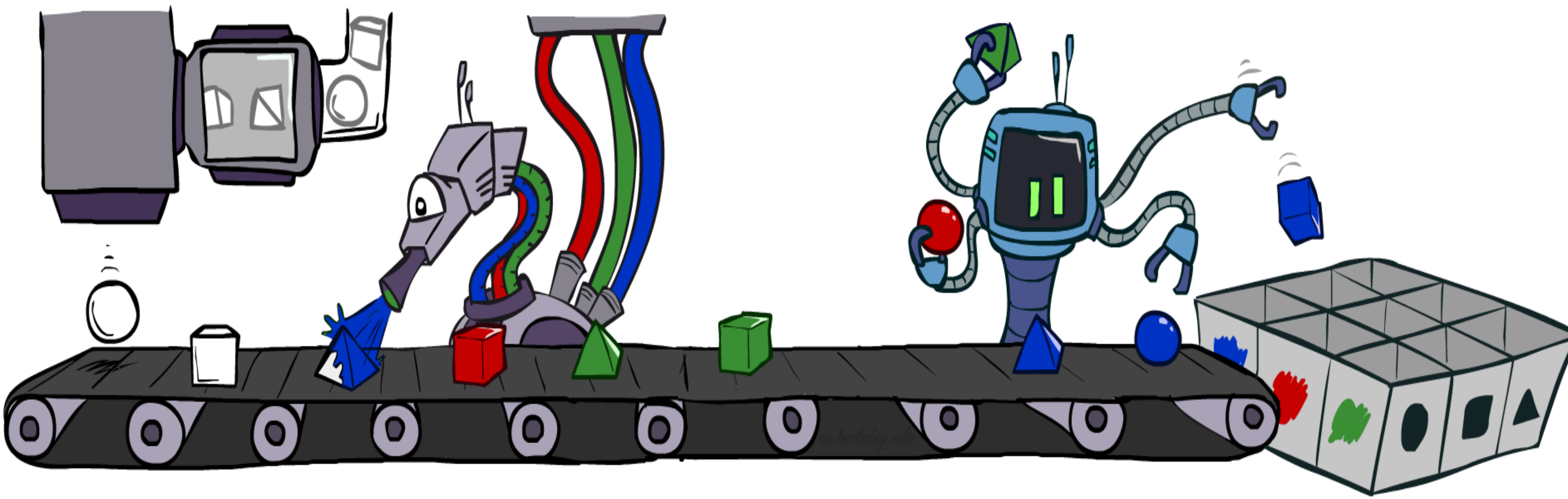




贝叶斯网络里的采样

- 先验采样（Prior Sampling)
- 拒绝抽样(Rejection Sampling)
- 似然性/可能性加权(Likelihood Weighting)
- 吉布斯采样(Gibbs Sampling)

先验采样(Prior Sampling)



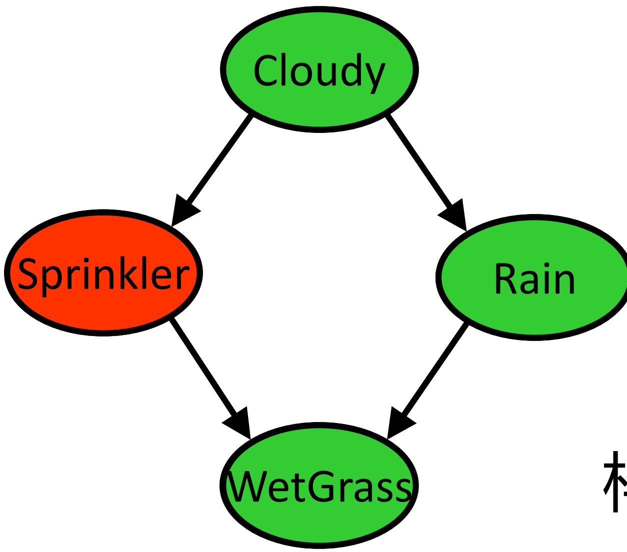
先验采样

$P(C)$

c	0.5
¬c	0.5

$P(S|C)$

c	s	0.1
	¬s	0.9
¬c	s	0.5
	¬s	0.5



$P(R|C)$

c	r	0.8
	¬r	0.2
¬c	r	0.2
	¬r	0.8

$P(W|S,R)$

s	r	w	0.99
		¬w	0.01
	¬r	w	0.90
		¬w	0.10
¬s	r	w	0.90
		¬w	0.10
	¬r	w	0.01
		¬w	0.99

样本:

c, ¬s, r, w(这个例子里)

¬c, s, ¬r, w

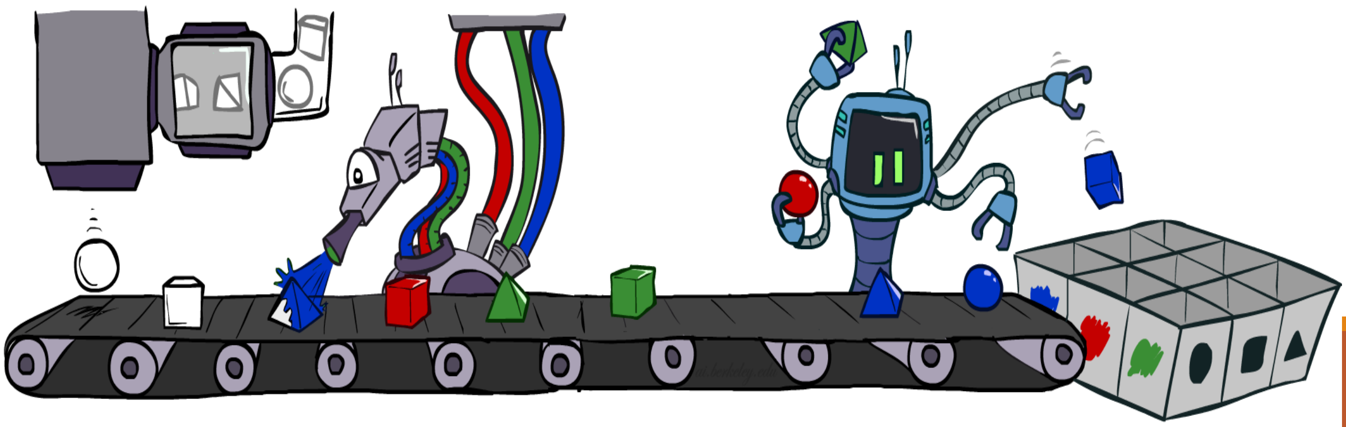
...

先验采样

For i=1, 2, …, n (按拓扑顺序)

- 采样 X_i 从 $P(X_i \mid parents(X_i))$

Return $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$



先验采样

- 这个过程产生这样的样本的概率是:

$$S_{PS}(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|\text{Parents}(X_i)) = P(x_1 \ldots x_n)$$

…即 是贝叶斯网络的联合概率

- 让 一个事件的样本数为 $N_{PS}(x_1 \ldots x_n)$

- 那么

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \hat{P}(x_1,\ldots,x_n) &= \lim_{N\to\infty} N_{PS}(x_1,\ldots,x_n)/N \\ &= S_{PS}(x_1,\ldots,x_n) \\ &= P(x_1 \ldots x_n)\end{aligned}$$

- 即, 这个采样过程是 一致的/连续的(consistent)

例如

我们从这个贝叶斯网络里获得一系列的样本：

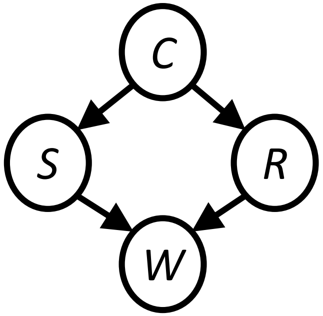
$c, \neg s, r, w$

c, s, r, w

$\neg c, s, r, w$

$c, \neg s, r, w$

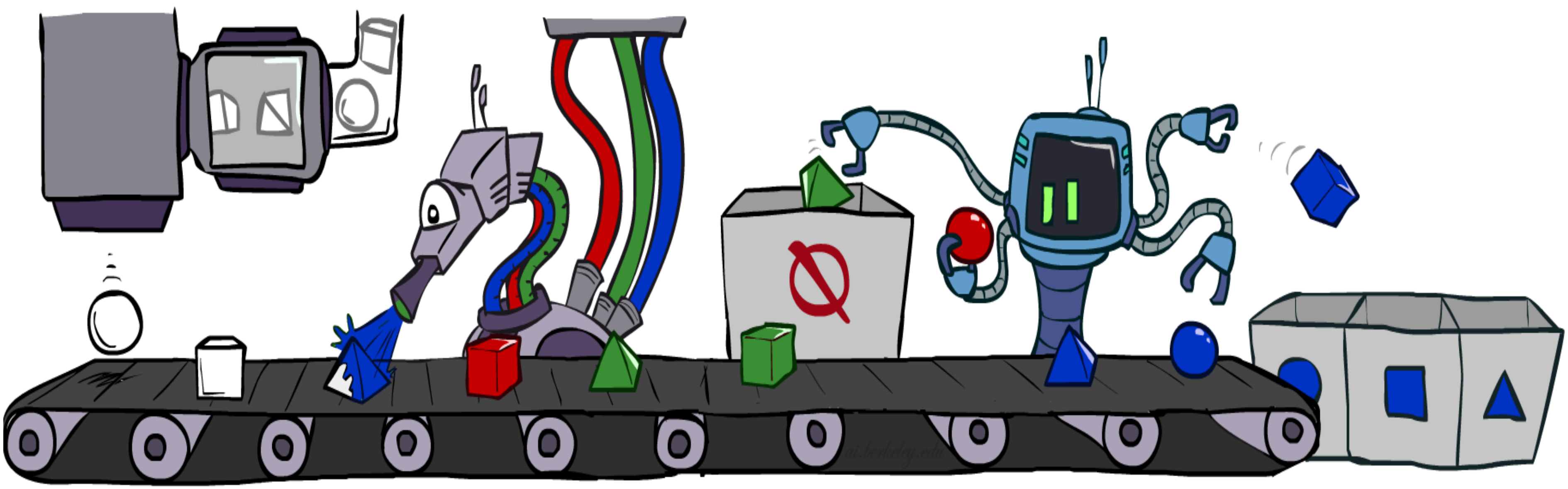
$\neg c, \neg s, \neg r, w$



如果我们想知道： $P(W)$

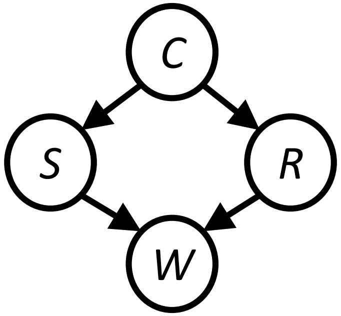
- 我们可以数出 <w:4, ¬w:1>
- 正规化后得到 $P(W)$ = <w:0.8, ¬w:0.2>
- 样本越多，越接近真实的分布
- 还可以估计其他的概率量
- 比如, 想查询概率 $P(C| r, w)$， 使用 $P(C| r, w) = \alpha P(C, r, w)$

拒绝采样(Rejection Sampling)



拒绝采样

- 为了计算条件概率，对先验采样进行简单修改
- 假如我们想计算 $P(C|\,r, w)$
- 计算采样中 C 的结果, 但是忽略（拒绝） 那些不含有 R=true, W=true的样本
  - 这就叫做拒绝采样
  - 对于条件概率的估计，也是满足一致性的 (即, N趋于无限大时， 等于理论真值)



c, ¬s, r, w

~~c, s, ¬r~~

~~¬c, s, r, ¬w~~

~~c, -s, ¬r~~

¬c, ¬s, r, w

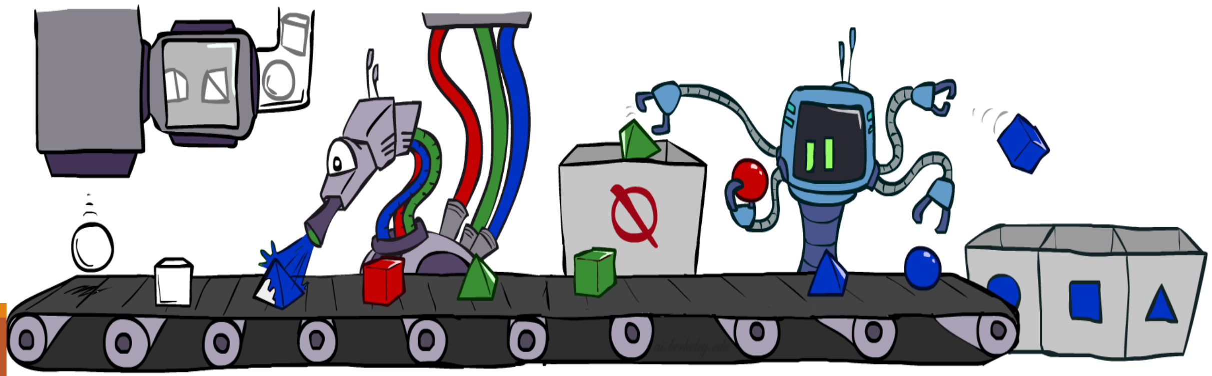
拒绝采样Rejection Sampling

输入: 观察值 $e_1,..,e_k$

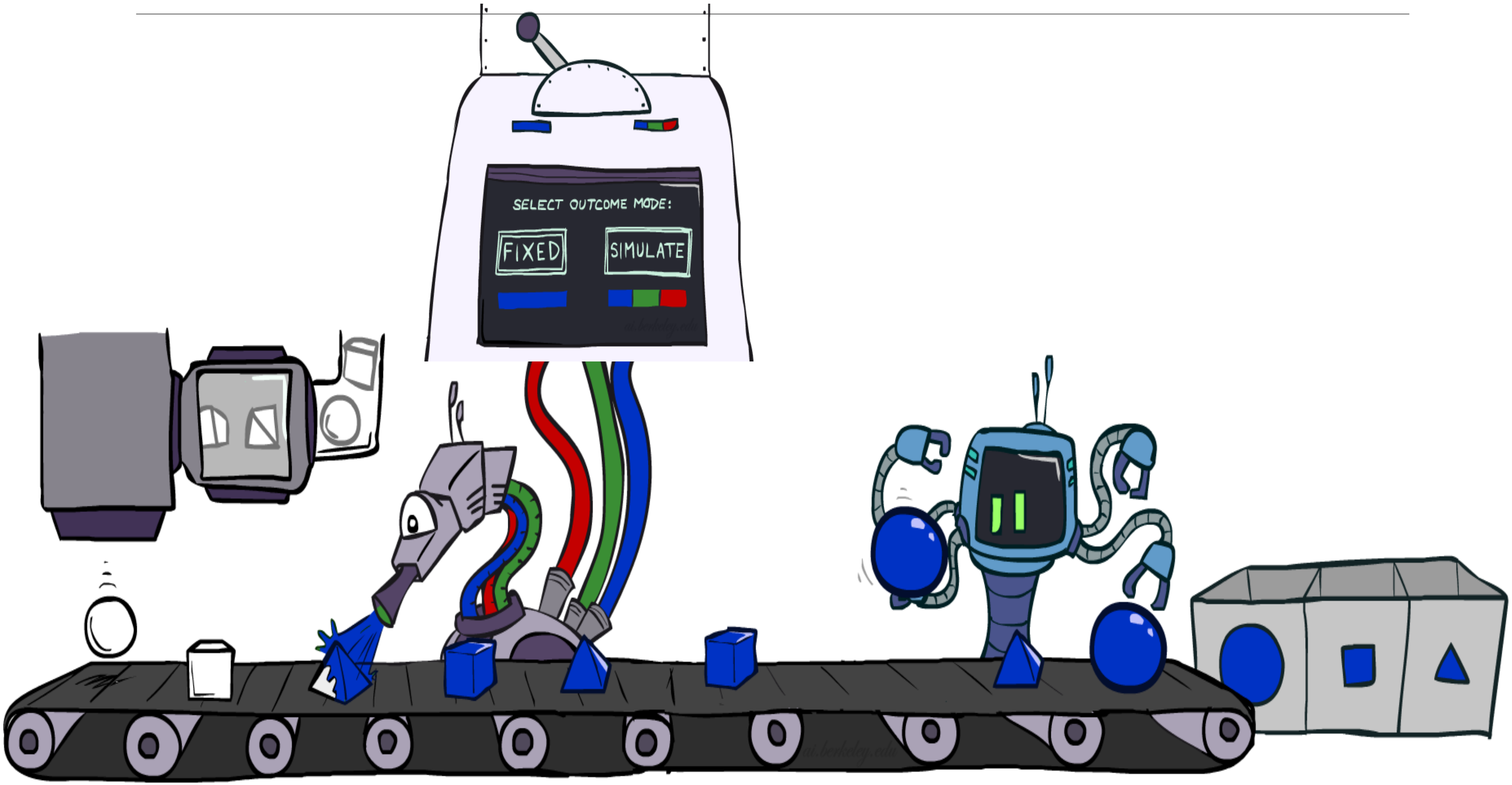
For i=1, 2, …, n

- 采样 X_i 从 $P(X_i \mid parents(X_i))$
- 如果 x_i 和观察值不一致
  - 拒绝这个样本: Return, 则在这个循环里没有样本产生

Return $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$



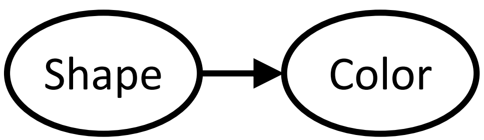
似然性加权（采样）
Likelihood Weighting



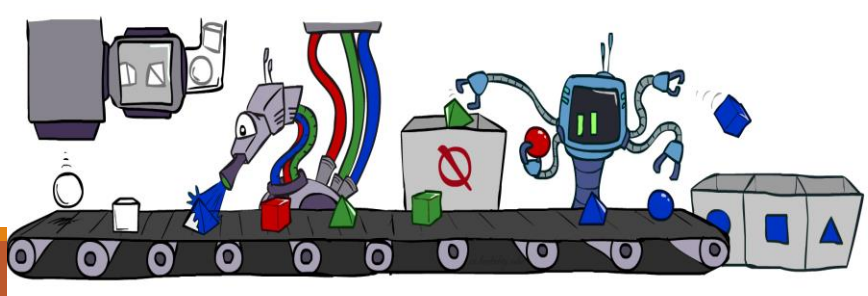
似然性加权（采样）

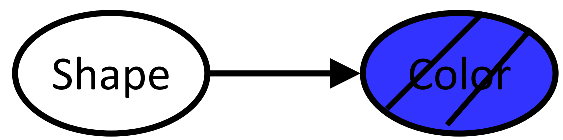
拒绝采样法的问题:
- 有可能拒绝许多样本，尤其当观察变量很多时
- 采样时没有利用已被观察变量的值
- 比如考虑 P(*Shape*|*Color=blue*)

- 想法: 固定观察变量的值，对其他变量值进行采样
  - 问题: 样本分布与理论分布不一致!
  - 解决办法: ***权重*** 每个样本，通过使用观察变量给定父变量的概率

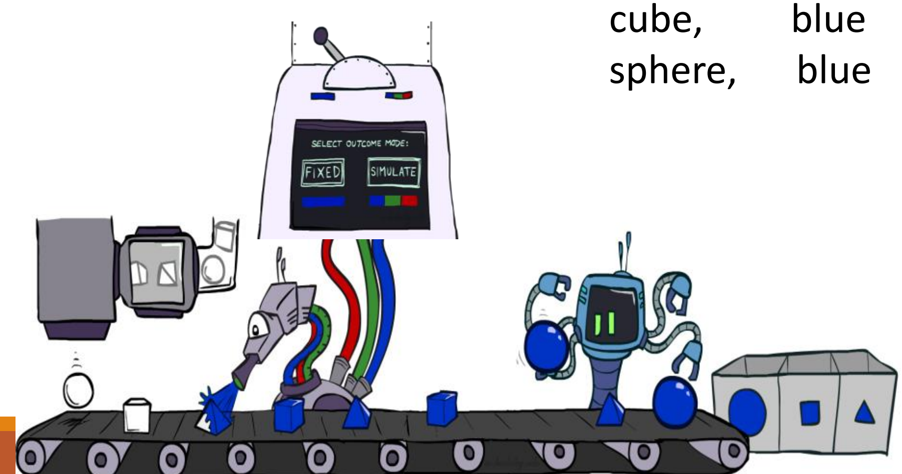


~~pyramid, green~~
~~pyramid, red~~
sphere, blue
~~cube, red~~
~~sphere, green~~





pyramid, blue
pyramid, blue
sphere, blue
cube, blue
sphere, blue



似然性加权（采样）

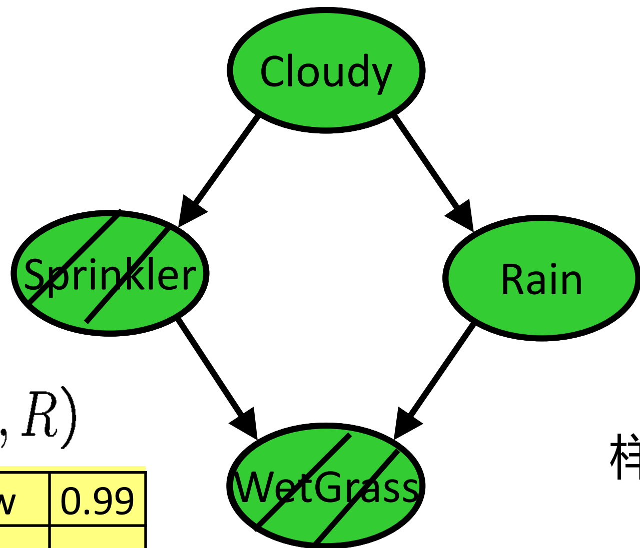
w 初始化为1.0；
拓扑排序：C, S, R,W
S, W 值固定为真

$P(C)$

c	0.5
¬c	0.5

$P(S|C)$

c	s	0.1
	¬s	0.9
¬c	s	0.5
	¬s	0.5



$P(R|C)$

c	r	0.8
	¬r	0.2
¬c	r	0.2
	¬r	0.8

$P(W|S,R)$

s	r	w	0.99
		¬w	0.01
	¬r	w	0.90
		¬w	0.10
¬s	r	w	0.90
		¬w	0.10
	¬r	w	0.01
		¬w	0.99

样本事件:

c, s, r, w

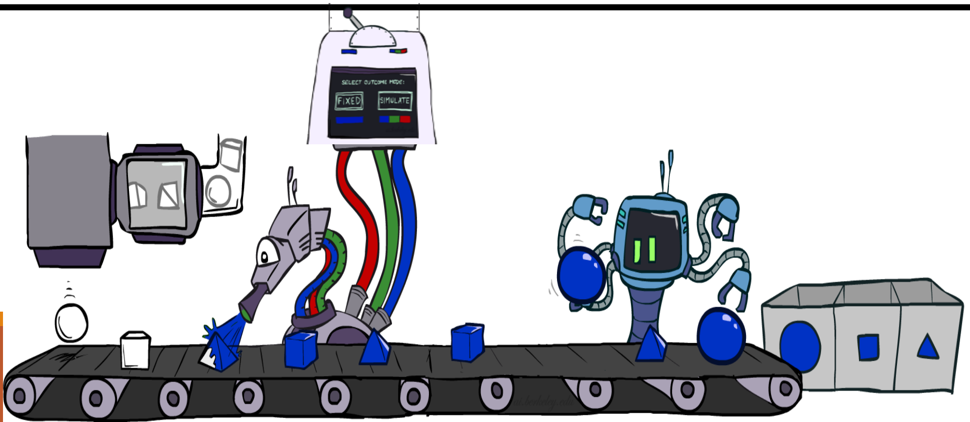
…

样本事件的权值:

$$w = 1.0 \times 0.1 \times 0.99$$

似然性加权采样

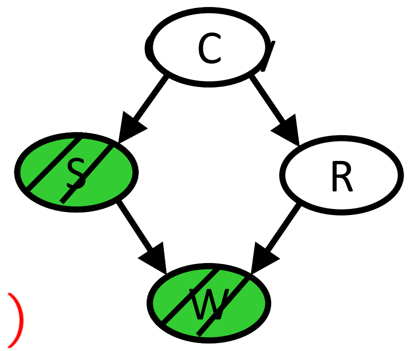
- 输入: 观察值 $e_1,..,e_k$
- w = 1.0
- for i=1, 2, …, n
  - 如果 X_i 是已观察的变量（ evidence variables ）
    - x_i = 观察到的 value_i for X_i
    - 让 $w = w * P(x_i \mid Parents(X_i))$
  - 否则
    - 抽样 x_i 从 $P(X_i \mid Parents(X_i))$
- return $(x_1, x_2, …, x_n)$, w



似然性加权采样

- 采样分布为（ z 为非观察变量的采样值 e 为固定的观察值）

$$S_{WS}(\mathbf{z}, \mathrm{e}) = \prod_{i=1}^{l} P(z_i|\mathrm{Parents}(Z_i))$$



- 现在, 每个样本都有权重

$$w(\mathbf{z}, \mathrm{e}) = \prod_{i=1}^{m} P(e_i|\mathrm{Parents}(E_i))$$

- 合起来, 加权的样本分布是具有一致性的，即：

$$S_{\mathrm{WS}}(z, e) \cdot w(z, e) = \prod_{i=1}^{l} P(z_i|\mathrm{Parents}(z_i)) \prod_{i=1}^{m} P(e_i|\mathrm{Parents}(e_i))$$

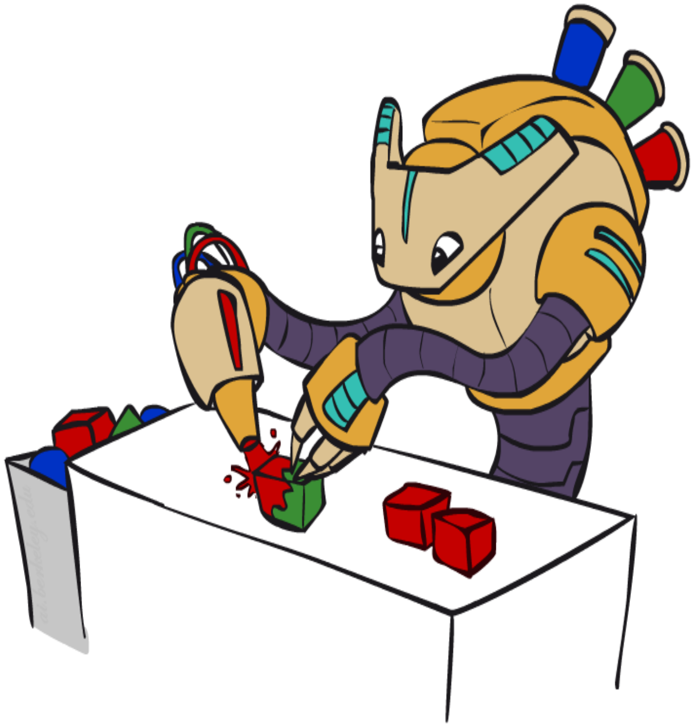
$$= P(\mathbf{z}, \mathrm{e})$$

似然性加权

- 优点：
  - 可利用所有样本（加权的）
  - *下游* 变量的采样值会被 *上游* 已观察变量的值所影响

- 也有弱点：
  - *上游* 变量 的采样值 不受 *下游* 观察变量值的影响
  - 假设观察到的值在 *k* 个叶节点上，那么样本的权重可能为 $O(2^{-k})$
  - 随着观察变量的增多，而且如果这些变量出现在拓扑顺序的后面，那么许多样本的权值会很小，只有极少的幸运样本将有相对很大的权值，从而主导估计概率的结果
- 我们希望的是，每个变量都可以“看见” *所有* 已观察到的值！

吉布斯采样(Gibbs Sampling)



马尔科夫蒙特卡洛 (Markov Chain Monte Carlo)

- MCMC (Markov chain Monte Carlo) 是随机算法家族一员，用来估计某个感兴趣的数值在一个很大的状态空间里
  - Markov chain = 一序列随机选择的状态 (“随机漫步random walk”), 其中每个状态的选择是基于它前一个状态
  - Monte Carlo = 摩纳哥的旅游城市，有一个著名的赌场

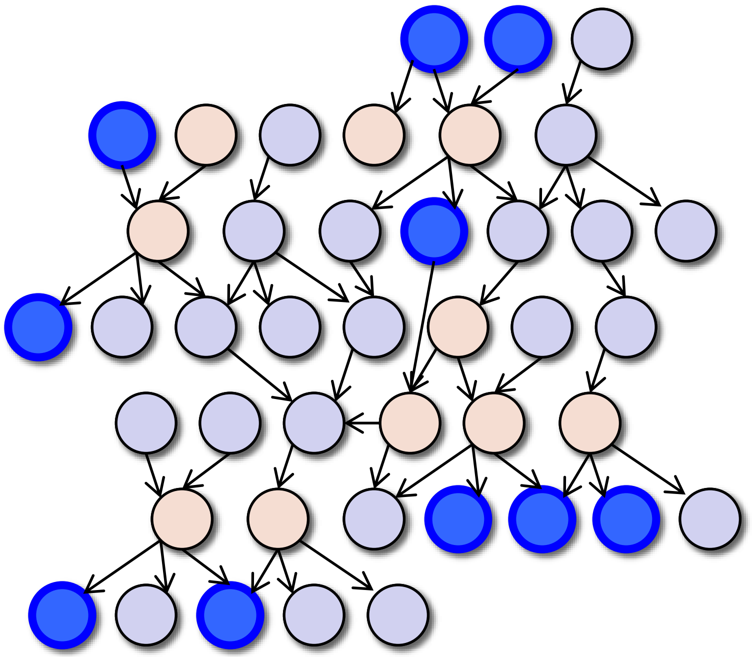
马尔科夫蒙特卡洛理论 Markov Chain Monte Carlo

- MCMC 属于随机算法家族，用于在一个很大的状态空间里，近似估计某些感兴趣的量
  - 马尔科夫链 = 一序列随机选择的状态 (“随机漫步random walk”), 每个状态的选择是条件取决于前一个状态
  - 蒙特卡洛理论 Monte Carlo = 一种算法 (通常基于随机采样) ，存在产生一个不正确解答的可能性（概率）
- MCMC = 随机漫步一会，平均化你所观察到的情况

吉布斯采样（Gibbs sampling）

- 属于 MCMC 家族一类
  - 状态是对所有变量的完整的赋值
    - (对比局部搜索里的 模拟退火算法，属于同一算法家族!)
  - 观察（证据）变量的值固定，改变其他变量的值
  - 当产生下一个状态时, 选出一个变量，并对其采样一个值，采样的分布是条件于所有其他变量
    - $X_i' \sim P(X_i \mid x_1,..,x_{i-1},x_{i+1},..,x_n)$
    - 趋向于朝高概率发生的状态移动，但也可能移动到一个低概率的状态
    - 在贝叶斯网络里, $P(X_i \mid x_1,..,x_{i-1},x_{i+1},..,x_n) = P(X_i \mid \text{马可夫毯}(X_i))$
- 定理: 吉布斯采样是具有一致性的
  - 给定吉布斯分布概率是远离0和1，并且变量选择是公平的

为什么这样做？

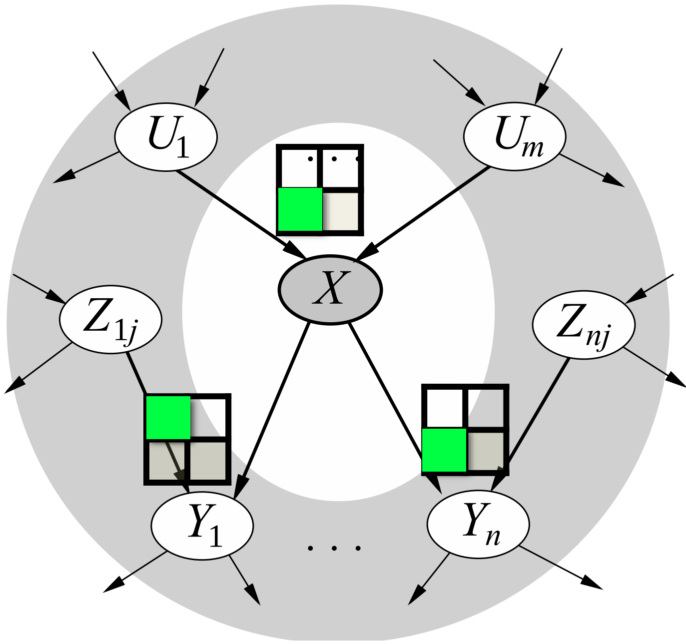


采样很快开始反应网络里所有的观察值（已观察节点的值对其他变量值的采样施加影响）

最终样本将从真实的后验概率分布上抽取!

如何进行采样？

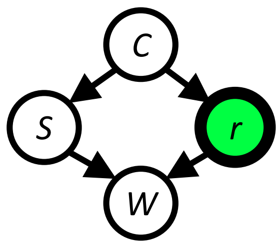
- 重复许多次：
  - 对一个非观察到的变量 X_i 进行采样，从概率分布：
  - $P(X_i \mid x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = P(X_i \mid 马尔科夫毯(X_i))$
  - $= \alpha \; P(X_i \mid u_1, \ldots, u_m) \; \prod_j P(y_j \mid parents(Y_j))$



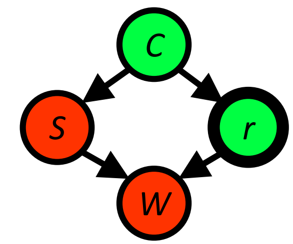
吉布斯采样举例: *P(S | r)*

Step 1: 固定观察值

- *R* = true

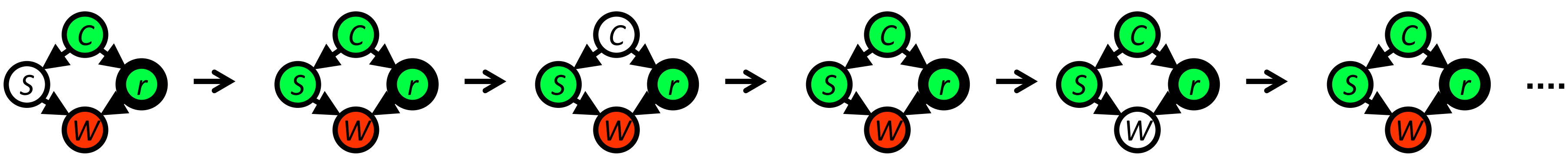


- Step 2: 初始化其他变量
  - 随机地



Step 3: 重复以下

- 选择一个非证据变量 *X*
- 重采样 *X* 从 *P*(*X* | *马可夫毯*(*X*))



采样 $S \sim P(S \mid c, r, \neg w)$

采样 $C \sim P(C \mid s, r)$

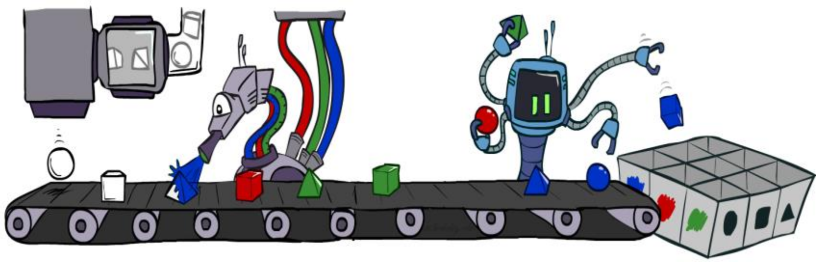
采样 $W \sim P(W \mid s, r)$

为什么这种方法有效?

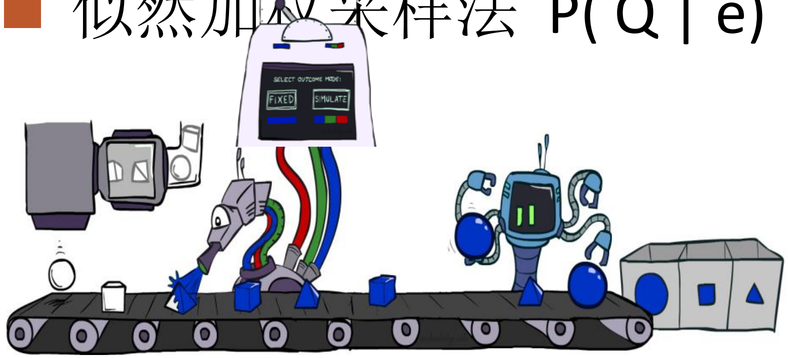
- 假定运行这种方法很长一段时间，并预测在时刻 t 到达任何一个状态的概率为： $\pi_t(x_1,\ldots,x_n)$ or $\pi_t(\underline{\mathbf{x}})$
- 对每个吉布斯采样步骤 (挑一个变量, 重采样它的值) 当它应用到一个状态 $\underline{\mathbf{x}}$ 时，有一个概率 $q(\underline{\mathbf{x}}' \mid \underline{\mathbf{x}})$ 移动到下个状态 $\underline{\mathbf{x}}'$
- 所以 $\pi_{t+1}(\underline{\mathbf{x}'}) = \sum_{\underline{\mathbf{x}}} q(\underline{\mathbf{x}}' \mid \underline{\mathbf{x}})\, \pi_t(\underline{\mathbf{x}})$ 或, 用矩阵或向量形式表示： $\pi_{t+1} = \mathrm{Q}\pi_t$
- 当这一动态过程处于平衡，即 $\pi_{t+1} = \pi_t$ ， 所以 $\mathrm{Q}\pi_t = \pi_t$
- 这种情况下有一个唯一解，即 $\pi_t = \mathrm{P}(x_1,\ldots,x_n \mid e_1,\ldots,e_k)$
- 所以当时刻 *t* 足够大时，下一个样本将会从真实的后验条件概率分布上被采集

贝叶斯网络采样技术小结

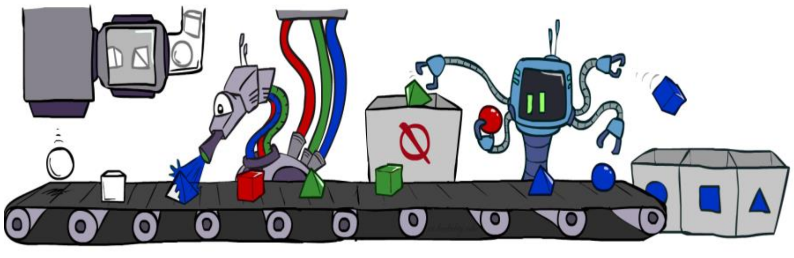
- 先验采样 P



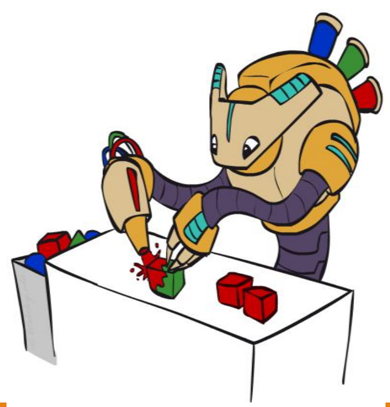
- 似然加权采样法 P(Q | e)



- 拒绝采样法 P(Q | e)



- 吉布斯采样 P(Q | e)



期末考试说明

- 闭卷，100分钟
- 时间地点
- 题型和范围
  - 选择，填空，计算，简答
  - 智能体和环境（相关概念）
  - 搜索算法（模型中的基本概念；A*, 贪婪，基于成本的统一搜索等；树搜索和图搜索策略，局部搜索算法）
  - 约束满足问题（表达，求解，约束图）
  - 博弈问题（零和博弈，最小最大算法，期望最小最大算法，剪枝）
  - 命题逻辑（基本概念，基本规则，等效，合取范式）
  - 概率基本概念和计算，贝叶斯网络的基本概念