3_central_limiting_theorem

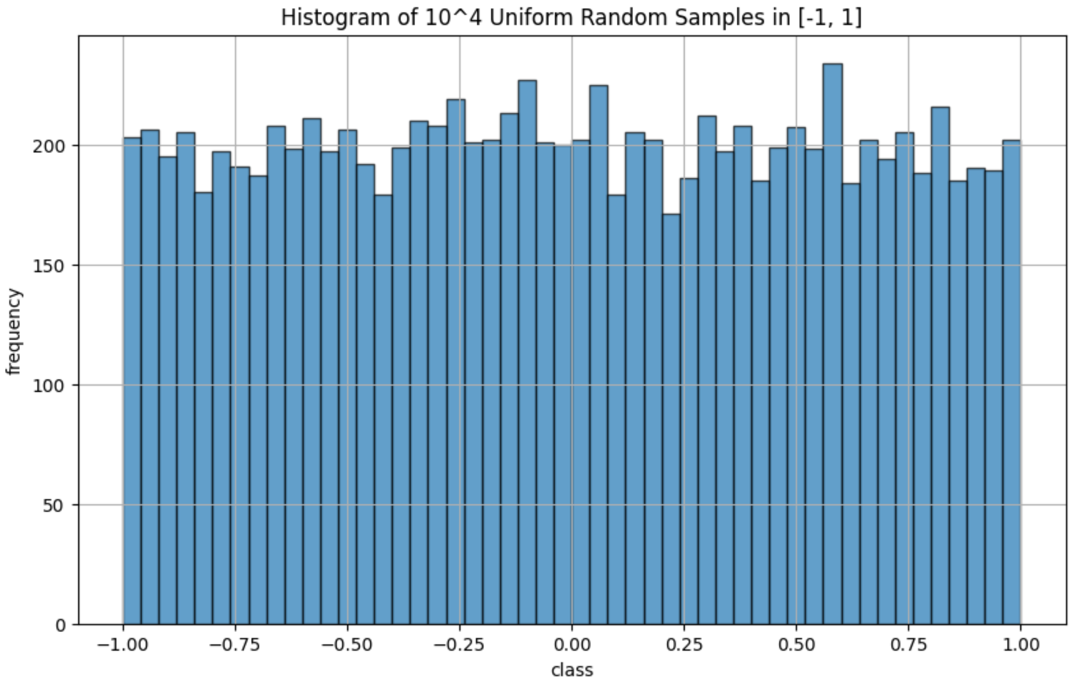
2024 年 5 月 27 日

0.1　第３問

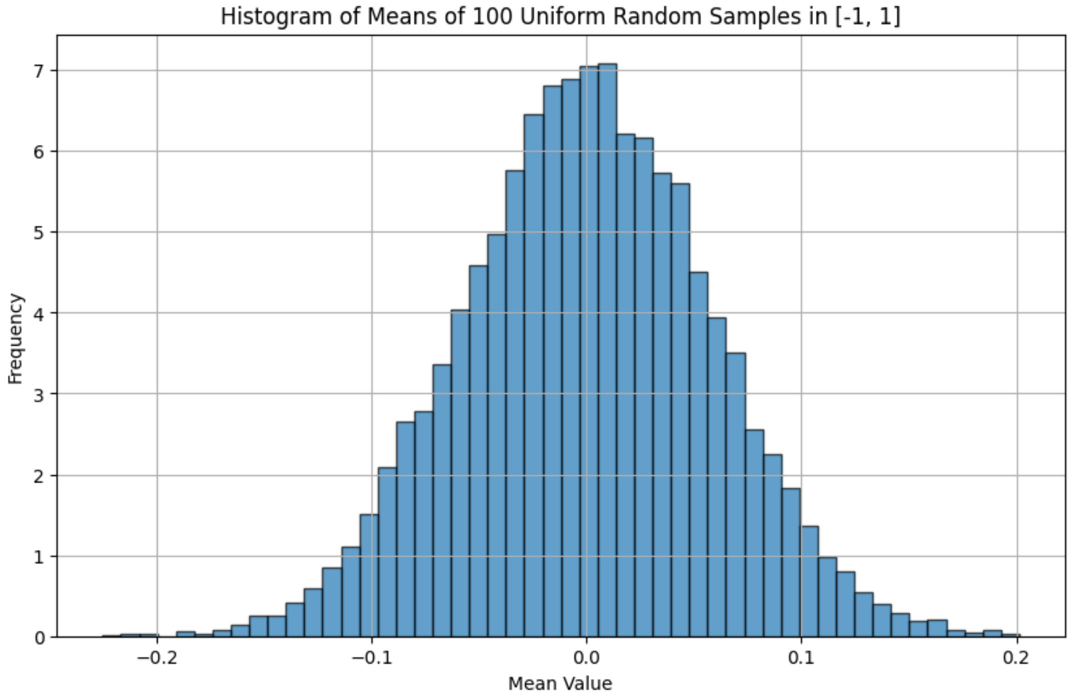
0.1.1　3-1

[2]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
```

[5]:
```
# 一様乱数を発生させる
num_samples = 10**4
uniform_random_samples = np.random.uniform(-1, 1, num_samples)

# 度数分布をプロットする
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(uniform_random_samples, bins=50, edgecolor='black', alpha=0.7)
plt.xlabel('class')
plt.ylabel('frequency')
plt.title('Histogram of 10^4 Uniform Random Samples in [-1, 1]')
plt.grid(True)
plt.show()
```



[7]:
```
# Generate 10^6 uniform random samples
num_samples = 10**6
uniform_random_samples = np.random.uniform(-1, 1, num_samples)

# Compute the averages of 100 samples
sample_size = 100
num_averages = num_samples // sample_size
averages = np.mean(uniform_random_samples.reshape(num_averages, sample_size),␣
    ↪axis=1)

# Plot the histogram of the averages
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(averages, bins=50, edgecolor='black', alpha=0.7, density=True)
plt.xlabel('Mean Value')
plt.ylabel('Frequency')
plt.title('Histogram of Means of 100 Uniform Random Samples in [-1, 1]')
plt.grid(True)
plt.show()
```



■解析的な考察　X_i を ([-1,1]) の範囲での一様乱数とすると、一様分布の平均 μ と分散 σ^2 は次の通りとなる。一様分布の平均：$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$

一様分布の分散：$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

今 n 個の独立な一様乱数 X_i を考える。その平均を $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とする。

サンプリング数 n とその平均値の分布の一般的性質を調べる。

まず $\bar{X}$ の平均と分散を求める。

平均 $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu = \mu = 0$

分散 $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1/3}{n} = \frac{1}{3n}$

$Z = \frac{\bar{X}-\mathbb{E}[\bar{X}]}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X})}}$ を標準化すると、Z は平均 0、分散 1 の標準正規分布に従う。

Z を展開すると $Z = \frac{\bar{X}-0}{\sqrt{1/(3n)}} = \bar{X}\sqrt{3n}$

以上より n 個の独立な乱数の平均は、n が大きくなるにつれて正規分布に収束する。具体的には、平均 0、分散 $\frac{1}{3n}$ の正規分布に近づく。